TS. MAI XUÂN VINH (Chủ biên)
PHẠM KIM CHUNG – PHẠM CHÍ TUÂN
ĐÀO VĂN CHUNG – DƯƠNG VĂN SƠN
K2P.NET.VN

TƯ DUY LOGIC TÌM TÒI LỜI GIẢI

HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Dành cho học sinh khối THPT
Dành cho học sinh ôn thi THPT Quốc gia
Tài liệu tham khảo cho học sinh và giáo viên



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỤC LỤC

CHƯƠNG I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

CHƯƠNG II. SUY LUẬN TÌM LỜI GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG KỸ NĂNG ĐẶC BIỆT HÓA

CHƯƠNG III. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TỔNG HỢP

Lời nói đầu

Trong cuộc sống có rất nhiều yếu tố để tạo nên sự thành công, tuy nhiên ba yếu tố không thể thiếu đó là: kinh nghiệm, tư duy và sự nỗ lực. Với những người yêu toán nói chung và yêu toán sơ cấp nói riêng ba yếu tố đó càng khắc họa một cách rõ nét.

Bài toán Giải hệ phương trình trong các đề thi ĐH-CĐ và các kì thi HSG những năm gần đây đã xuất hiện với mật độ ngày càng dày, cách tư duy của người ra đề nhiều mới mẻ, vì vậy nó thường được đưa vào loạt những bài toán ở mức độ vận dụng cao từ các mức độ nhận thức trong đề ra.

Để giải quyết Hệ phương trình hầu hết các học sinh thường chỉ biết sử dụng kinh nghiệm giải toán nhờ vào việc đã gặp một hướng giải quyết nào trước đó mà quên mất rằng mọi thứ đều có nguyên do của nó, để giỏi toán nói chung và giỏi Hệ phương trình nói riêng chúng ta luôn tự biết đặt cho mình câu hỏi vì sao ?

Từ những vấn đề nảy sinh đó cuốn sách " Tư duy Logic tìm tòi lời giải Hệ phương trình" ra đời nhằm đáp ứng được phần nào mong mỏi của bạn đọc để chinh phục những hệ phương trình xuất hiện trong các đề thi.

Cuốn sách được chia làm ba chương như ba yếu tố không thể thiếu để thành công:

Chương I. Phương pháp giải Hệ phương trình.

Nhằm nhắc lại những kỹ năng quen thuộc mà các bạn đã từng gặp để giải Hệ phương trình thông qua những suy luận từ kinh nghiệm giải toán.

Chương II. Suy luận tìm lời giải Hệ phương trình bằng kỹ năng đặc biệt hóa.

Là một chương hoàn toàn mới mẻ của cuốn sách, chắc chắn rằng các bạn chưa từng tiếp xúc với nó. Chương này sẽ giúp các bạn tiếp xúc với một lối tư duy đơn giản nhưng vô cùng hiệu quả để giải quyết hầu như các hệ phương trình xuất hiện trong đề thi.

Chương III. Hệ phương trình tổng hợp.

Là chương bao gồm những bài toán được tuyển chọn và giải chi tiết nhằm giúp các bạn rèn luyện kỹ năng, đúc rút kinh nghiệm trong quá trình tự luyện tập.

Hy vọng cuốn sách bạn đang có trong tay sẽ góp một phần nhỏ giúp bạn trả lời được những câu hỏi vì sao ? mà bấy lâu các bạn còn vướng mắc.

Trong quá trình biên soạn có thể cuốn sách gặp phải những lỗi hoặc có sai sót, rất mong bạn đọc thông cảm và góp ý cùng chúng tôi để cho những lần tái bản tiếp theo được hoàn thiện hơn.

Trân trọng !

Nhóm tác giả.

CHƯƠNG I.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. PHƯƠNG PHÁP THẾ ĐẠI SỐ.

Trong mục này, chúng ta sẽ tìm hiểu một trong những phương pháp có tính ứng dụng mạnh mẽ trong nhiều phương pháp giải hệ. Phương pháp này nó được xem là một công cụ mạnh mẽ nhất để giải hệ, dù tính chất của nó khá đơn giản nhưng tất cả các bước đi kỹ thuật nào đó để giải một hệ phương trình thì sau cùng cũng phải dùng nó để tìm ra kết quả. Nó có thể đóng vai trò trực tiếp hoặc gián tiếp để giải quyết một bài hệ phương trình. Tuy nhiên, trong đề mục này, chúng ta sẽ tìm hiểu lối đi giải các bài toán giải trực tiếp bằng phương pháp này.

1) Sử dụng phương pháp thế:

Hệ phương trình được giải bằng phương pháp thế là loại hệ có thể cho dưới các hình thức sau :

$\begin{cases} y = f(x) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = f(y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} k = f(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ *với* k *là hằng số.*

- *Đối với hệ có dạng :* $\begin{cases} f(x,y) = k \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ *(*k *là hằng số)*

Ta thường giải quyết hệ này bằng phương pháp thế "hằng số k *". Để nhận biết hệ phương trình bằng phương pháp thế hằng số, ta cần chú ý đến "hằng số" ở mỗi phương trình trong hệ có sự giống nhau hoặc có sự tương tác với nhau để tạo ra sự đồng bậc, sau đó tìm cách xây dựng các mối liên quan giữa các biến trong hệ khi thay hằng số bởi biến số. Với cách thay thế " hằng số" như vậy để thành công thường chúng ta sẽ thu được một phương trình phân tích được nhân tử chung, phương trình giải bằng các phương pháp giải phương trình cơ bản.*

Có 2 kỹ thuật chính thường được áp dung.

* *Kỹ thuật 1: Thế trực tiếp hằng số để tạo được nhân tử chung đối với một số hệ hữu tỉ, hệ chứa căn thức mà mối quan hệ giữa các biến có liên quan chặt chẽ tới hằng số.*

* *Kỹ thuật 2: Thế trực tiếp hằng số để tạo sự đồng bậc đối với một số hệ phương hữu tỉ, hệ chứa căn thức có dáng dấp của sự đẳng cấp. Mục tiêu chính là quan sát hệ để tạo ra tạo sự đồng bậc trong một phương trình trong hệ.*

a) Kỹ thuật 1: Thế hằng số trực tiếp trong hệ để tạo nhân tử chung.

Ví dụ 1:

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (2x^2 + y)(x + y) + x(2x + 1) = 7 - 2y \\ x(4x + 1) = 7 - 3y \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Nhìn vào hệ phương trình đang xét, ta thấy ngay cả hai phương trình trong hệ đều chứa số 7. Do đó ý tưởng đầu tiên ta sẽ tìm mối liên quan giữa các biến xung quanh số 7 xem thế nào ?

Ở phương trình thứ hai trong hệ biến đổi ta có : $7 = 4x^2 + x + 3y$.

Mặt khác ta lại có : $x(2x+1) = 7 - 2y \Leftrightarrow 7 = 2x^2 + x + 2y$.

Khi đó ta có : $4x^2 + x + 3y = 2x^2 + x + 2y \Leftrightarrow 2x^2 + y = 0$.

Vậy rõ ràng khi thay $7 = 4x^2 + x + 3y$ vào phương trình thứ nhất trong hệ ta sẽ thu được một phương trình có nhân tử chung là $2x^2 + y$.

Từ đó ta nhận thấy hệ này giải quyết được bằng phương pháp thế hằng số.

Lời giải :

Từ phương trình thứ hai trong hệ ta có : $7 = 4x^2 + x + 3y$.

Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta thu được phương trình :

$$(2x^2+y)(x+y) + 2x^2 + x = 4x^2 + x + 3y - 2y \Leftrightarrow (2x^2+y)(x+y) = 2x^2 + y$$

$$\Leftrightarrow (2x^2+y)(x+y-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2x^2 \\ y = 1 - x \end{array}\right.$$

⊕ Với $y = -2x^2$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$7 = 4x^2 + x - 6x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 7 = 0$ (vô nghiệm)

⊕ Với $y = 1 - x$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$$7 = 4x^2 + x + 3(1-x) \Leftrightarrow 2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \Rightarrow y = \dfrac{3-\sqrt{17}}{4} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \Rightarrow y = \dfrac{3+\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm

$$(x;y) = \left\{\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4};\frac{3-\sqrt{17}}{4}\right);\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4};\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)\right\}.$$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 + 7y = (x+y)^2 + x^2y + 7x + 4 \\ 3x^2 + y^2 + 8y + 4 = 8x \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$

Phân tích: Nhìn vào hệ phương trình, theo hướng tự nhiên chúng ta thấy rõ ràng từ phương trình thứ nhất trong hệ chúng ta khai thác là không khả thi. Tuy nhiên, quan sát ta thấy trong cả hai phương trình trong hệ ta thấy cả hai đều có chứa số 4, chắc điều này không phải là ngẫu nhiên. Ta thử mạnh dạn rút hằng số theo biến thay vào phương trình thứ nhất trong hệ xem thế nào ?

Từ phương trình thứ hai trong hệ ta có: $4 = 8x - 3x^2 - y^2 - 8y$.

Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta thu được :

$x^3 + 7y = x^2 + 2xy + y^2 + x^2y + 7x + 8x - 3x^2 - y^2 - 8y$

$\Leftrightarrow x^3 - x^2y + 2x^2 - 2xy - 15x + 15y = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + 2x - 15) = 0$.

Và tới đây mọi chuyện đã được sáng tỏ là hệ phương trình này hoàn toàn có thể giải quyết bằng phương pháp thế hằng số.

Lời giải:

Từ phương trình thứ hai trong hệ ta có: $4 = 8x - 3x^2 - y^2 - 8y$.

Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta thu được:

$x^3 + 7y = x^2 + 2xy + y^2 + x^2y + 7x + 8x - 3x^2 - y^2 - 8y$

$\Leftrightarrow x^3 - x^2y + 2x^2 - 2xy - 15x + 15y = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + 2x - 15) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x^2 + 2x - 15 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = 3 \\ x = -5 \end{array}\right..$$

① Với $x = y$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có: $x^2 + 1 = 0$ (vô nghiệm).

⊕ Với $x = 3$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có:

$$y^2 + 8y + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = -7 \end{array}\right..$$

⊕ Với $x = -5$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có:

$y^2 + 8y + 119 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm : $(x;y) = \{(3;-1);(3;-7)\}$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\dfrac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1+2x) = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$

(Khối A – 2008)

Phân tích : Rõ ràng nhìn vào hệ ta thấy cách đặt đề của bài toán, ta có thể nghĩ ngay đến lựa chọn thế bằng hằng số. Tuy nhiên, với cách đặt đề như thế này ta cần có một chút chuẩn bị trước để xem đường lối ta suy nghĩ sẽ trợ giúp chúng ta bao nhiêu phần trăm trên bước đường cụ thể hóa lời giải.

Không khó chúng ta nhận thấy phương trình thứ hai chứa một hằng đẳng thức. Thật vậy, ta có :

$$x^4+y^2+xy(1+2x)=-\frac{5}{4}\Leftrightarrow\left(x^2+y\right)^2+xy=-\frac{5}{4}$$

Ở phương trình thứ nhất trong hệ, ta thấy nếu ta nhóm nhân tử ta cũng thu được đại lượng x^2+y. Thật vậy ta có :

$$x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\frac{5}{4}\Leftrightarrow\left(x^2+y\right)(1+xy)+xy=-\frac{5}{4}$$

Nhận xét khi thay hằng số cho nhau ta sẽ khử được đại lượng xy và bắt được nhân tử chung là đại lượng x^2+y.

Tới đây, ta nhận thấy hệ này vẫn có thể giải quyết tốt bằng phương pháp thế hằng số.

Lời giải :

Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ: $\begin{cases}\left(x^2+y\right)(1+xy)+xy=-\frac{5}{4}\\ \left(x^2+y\right)^2+xy=-\frac{5}{4}\end{cases}$.

Khi đó từ hệ mới ta có :

$$\left(x^2+y\right)(1+xy)+xy=\left(x^2+y\right)^2+xy\Leftrightarrow\left(x^2+y\right)\left(1+xy-x^2-y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-x^2\\ 1+xy=x^2+y\end{array}\right.$$

⊕ Với $y=-x^2$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ mới ta thu được phương trình: $x^3=\frac{5}{4}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{5}{4}}\Rightarrow y=-\sqrt[3]{\frac{25}{16}}$.

⊕ Với $xy=x^2+y-1$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ mới ta thu được phương trình :

$$\left(x^2+y\right)^2+x^2+y-1=-\frac{5}{4}\Leftrightarrow 4\left(x^2+y\right)^2+4\left(x^2+y\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2+2y+1\right)^2=0\Leftrightarrow 2x^2+2y+1=0\Leftrightarrow y=-\frac{2x^2+1}{2}$$

Thay $y=-\frac{2x^2+1}{2}$ vào phương trình thứ hai trong hệ mới ta thu được phương trình :

$$\left(x^2-\frac{2x^2+1}{2}\right)^2-x\left(\frac{2x^2+1}{2}\right)=-\frac{5}{4}\Leftrightarrow\frac{x\left(2x^2+1\right)}{2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2x^3+x-3=0$$

$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2+2x+3)=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}$ vì $2x^2+2x+3=0$ (vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=\left\{\left(1;-\frac{3}{2}\right);\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}};\sqrt[3]{\frac{25}{16}}\right)\right\}$.

Bình luận : Với hệ phương trình mới $\begin{cases}(x^2+y)(1+xy)+xy=-\frac{5}{4}\\(x^2+y)^2+xy=-\frac{5}{4}\end{cases}$, ta nhận thấy có thể ẩn phụ hóa để giải quyết với việc ẩn phụ hóa hai biến $u=x^2+y, v=xy$ đưa về đối xứng. Tuy nhiên ta cũng dễ thấy rằng hệ này cấu tạo khá lỏng nên ta vẫn có thể giải quyết hệ bằng phương pháp thế hằng số như trên.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases}x(x-3y)=4(y^2+2)\\(xy-4)(x+y)=8\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Nhìn vào hệ phương trình, ta thấy phương trình thứ hai trong hệ đối xứng với hai biến x,y nhưng phương trình thứ nhất trong hệ các biến lại đẳng cấp. Đặc biệt trong cả hai phương trình trong hệ đều có sự tương đồng hai hằng số là 4 và 8, do đó ta cần chọn thay thế trong hệ bởi hệ số nào cho thuận tiện. Không khó để nhận thấy hệ số 4 gắn với biến còn hệ số 8 thì đóng vai trò là hệ số tự do thật sự. Do đó, để thay thế có tính khả quan hơn chúng ta sẽ thay thế quan hệ giữa các biến trong hệ bằng hệ số 8.

Ta biến đổi hệ phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases}x^2-3xy-4y^2=8\\x^2y+y^2x-4x-4y=8\end{cases}$.

Khi đó ta có:

$x^2y+y^2x-4x-4y=x^2-3xy-4y^2$

$\Leftrightarrow (y-1)x^2+(y^2+3y-4)x+4y(y-1)=0$

$\Leftrightarrow (y-1)(x^2+(y+4)x+4y)=0 \Leftrightarrow (y-1)(x+y)(x+4)=0$

Vậy rõ ràng hướng đi thế hằng số 8 là thành công.

Lời giải :

Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ: $\begin{cases}x^2-3xy-4y^2=8\\x^2y+y^2x-4x-4y=8\end{cases}$

Từ hệ ta có:

$x^2y+y^2x-4x-4y=x^2-3xy-4y^2$

$$\Leftrightarrow (y-1)x^2+\left(y^2+3y-4\right)x+4y(y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)\left(x^2+(y+4)x+4y\right)=0 \Leftrightarrow (y-1)(x+y)(x+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-x \\ x=-4 \end{array}\right.$$

⊕ Với $y=1$ thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có phương trình :

$$x^2-3x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{57}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{57}}{2} \end{array}\right.$$

⊕ Với $y=-x$ thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có phương trình : $0\cdot x^2=8$ (vô lí).

⊕ Với $x=-4$ thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có phương trình:

$$y^2-3y-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \\ y=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm:

$$(x;y)=\left\{\left(\frac{3+\sqrt{57}}{2};1\right);\left(\frac{3-\sqrt{57}}{2};1\right);\left(-4;\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right);\left(-4;\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\right\}.$$

Ví dụ 5:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y^2-xy-2y^2=-1 \\ x^3y^3+x^2y^3-2xy^2+3xy^3-12y^2=-1 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Quan sát hệ đã cho, ta thấy hệ có cấu trúc gần giống với ví dụ 3 đã xét ở trên. Tuy nhiên nếu trong trường hợp này nếu ta thế trực tiếp hằng số -1 thì khả năng biến đổi đại số chắc sẽ khó khăn trong việc bắt nhân tử chung.

Mặt khác quan sát cả hai phương trình trong hệ, ta nhận thấy hệ đang xét thì phương trình thứ hai có chứa hằng đẳng thức liên quan đến phương trình thứ nhất trong hệ.

Thật vậy ta có: $x^3y^3+1=(xy+1)\left(x^2y^2-xy+1\right)$.

Từ đây ta có thể lên ý tưởng thế $2y^2=x^2y^2-xy+1$ vào phương trình thứ hai trong hệ để thực hiện việc nhóm hạng tử rồi bắt nhân tử chung. Nhưng rõ ràng việc này cũng đòi hỏi một sự khéo léo nhất định mới có thể thành công.

Hãy để ý sự sắp xếp trong hệ ở cả phương trình đối với biến y, từ đây ta nghĩ tới việc xét các khả năng của làm cho hệ có nghiệm của y rồi lược giản đưa hệ về hệ dễ nhìn hơn.

Không khó để nhận thấy hệ này có nghiệm thì $y \neq 0$. Do đó ta đưa hệ về dạng :

$$\begin{cases} x^2 - \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2} = 2 \\ x^3 + x^2 - 2x \cdot \dfrac{1}{y} + 3x - 12 \cdot \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y^3} = 0 \end{cases}$$

Với hệ mới ta đặt $t = \dfrac{1}{y}$ thì hệ trở thành: $\begin{cases} x^2 - xt + t^2 = 2 \\ x^3 + t^3 + x^2 - 2xt - 12t + 3x = 0 \end{cases}$

Với hệ mới phương trình thứ nhất trong hệ là một phương trình đẳng cấp bậc hai nhưng phương trình thứ hai trong hệ lại không có gì đặc biệt. Tuy nhiên với nhận định ban đầu ở trên chúng ta đã biết ở phương trình thứ hai trong hệ có sự xuất hiện của một hằng đẳng thức.

Thật vậy, ta có : $x^3 + t^3 = (x+t)\left(x^2 - xt + t^2\right)$.

Với nhận xét này ta có phương trình thứ hai trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$x^3 + t^3 + x^2 - 12t - 2xt + 3x = 0 \Leftrightarrow (x+t)\left(x^2 - xt + t^2\right) + x^2 - 2xt - 12t + 3x = 0.$$

Khi đó từ phương trình thứ nhất trong hệ ta thế : $2 = x^2 - xt + t^2$ vào phương trình vừa biến đổi ta sẽ thu được phương trình :

$$2(x+t) + x^2 - 2xt - 12t + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x+5) - 2t(x+5) = 0.$$

Tới đây, hệ được xem là thành công trong việc thế hằng số.

Lời giải : Nhận xét $y = 0$ không thỏa hệ phương trình đã cho.

Với $y \neq 0$ ta biến đổi hệ đã cho trở thành :

$$\begin{cases} x^2 - \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2} = 2 \\ x^3 + x^2 - 2x \cdot \dfrac{1}{y} + 3x - 12 \cdot \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y^3} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $t = \dfrac{1}{y}$ khi đó hệ (1) trở thành : $\begin{cases} x^2 - xt + t^2 = 2 \\ x^3 + t^3 + x^2 - 2xt - 12t + 3x = 0 \end{cases}$

Từ phương trình thứ hai trong hệ ta biến đổi thành phương trình :

$$x^3 + t^3 + x^2 - 12t - 2xt + 3x = 0 \Leftrightarrow (x+t)\left(x^2 - xt + t^2\right) + x^2 - 2xt - 12t + 3x = 0$$

Kết hợp với phương trình thứ nhất trong hệ ta có phương trình vừa biến đổi trở thành :

$2(x+t)+x^2-2xt-12t+3x=0 \Leftrightarrow x^2+5x-2xt-10t=0$

$\Leftrightarrow x(x+5)-2t(x+5)=0 \Leftrightarrow (x+5)(x-2t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=2t \end{array}\right.$

⊕ Với $x=-5$ ta thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta được :

$t^2+5t+23=0$ (vô lí).

⊕ Với $x=2t$ ta thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta được:

$3t^2=2 \Leftrightarrow t=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$.

⊕ Với $t=\pm\frac{\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=\left\{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{2}\right);\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3};-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right\}$.

Bình luận: Hệ này như đã phân tích có thể giải bằng phương pháp thế biến theo biến, tuy nhiên hạn chế của nó chính là xử lý biến đổi đại số không thuận lợi đòi hỏi khả năng biến đổi rất khéo léo. Tuy nhiên, nếu quan sát sự đặc biệt của biến y ta sẽ cho được phép biến đổi hệ trở nên dễ nhìn hơn và từ đó phép thế hằng số sẽ phát huy được tác dụng của nó và làm cho lời giải bài toán được gọn nhẹ hơn.

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+2xy+3}=x+3y \\ \dfrac{x^3-9y^3}{x-y}=(4x+9y)xy^2 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Phân tích : Quan sát hệ ta thấy hệ có cấu trúc vừa chứa căn thức vừa chứa phân thức, khó có thể biết được xuất phát từ đâu để thuận lợi cho việc giải hệ. Thông thường với hệ kiểu này chúng ta hay xuất phát từ phương trình không chứa căn trong hệ. Tuy nhiên, ở phương trình thứ hai trong hệ rõ ràng ta khó khai thác được gì từ đây. Phương trình thứ nhất tuy chứa căn thức nhưng lại là dạng cơ bản $\sqrt{f(x)}=g(x)$ nên ta sử dụng phép nâng lũy thừa để làm căn thức. Mặt khác khi nâng lũy thừa chúng ta sẽ làm giảm mất đại lượng x^2, rồi sau đó ta sẽ cố gắng xem lại mối quan hệ giữa các biến như thế nào với nhau ?

Ta có: $\sqrt{x^2+2xy+3}=x+3y \Rightarrow x^2+2xy+3=x^2+6xy+9y^2 \Leftrightarrow 4xy+9y^2=3$.

Quan sát vế phải của phương trình hai trong hệ ta thấy có liên quan chặt chẽ với kết quả vừa thu được.

Thật vậy, ta có : $\frac{x^3-9y^3}{x-y}=(4x+9y)xy^2 \Leftrightarrow \frac{x^3-9y^3}{x-y}=\left(4xy+9y^2\right)xy$.

Khi đó thay vào ta biến đổi sẽ có phương trình : $x^3-9y^3=3(x-y)xy$.

Vế trái và vế phải phương trình biến đổi gợi hình ảnh hằng đẳng thức nên ta có tìm mối liên hệ cho hai biến x,y nên có thể giải quyết tốt bài toán.

Như vậy xem như hệ này cũng thành công trong việc thế bằng hằng số.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x^2+2xy+3\ge 0 \\ x-y\ne 0 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$$\sqrt{x^2+2xy+3}=x+3y \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y\ge 0 \\ x^2+2xy+3=(x+3y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y\ge 0 \\ 4xy+9y^2=3 \end{cases}.$$

Từ phương trình thứ hai trong hệ ta biến đổi trở thành phương trình :

$x^3-9y^3=\left(4xy+9y^2\right)xy(x-y)$ (1).

Thay $3=4xy+9y^2$ vào (1) ta có :

$$x^3-9y^3=3xy(x-y) \Leftrightarrow (x-y)^3=8y^3 \Leftrightarrow x=3y.$$

Thay $x=3y$ vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$$\sqrt{15y^2+3}=6y \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0 \\ 21y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{7}}{7} \Rightarrow x=\frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $(x,y)=\left(\frac{3\sqrt{7}}{7};\frac{\sqrt{7}}{7}\right)$.

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-4y^2}=2(2-y) \\ y\sqrt{x^2-4y^2}=1 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Hệ phương trình đang xét là một hệ chứa căn thức và hình thức của nó cũng chưa giúp chúng ta định hướng thế nào cho cách giải bằng phương pháp này. Từ định dạng của phương trình thứ hai trong hệ cho ta hướng biến đổi phương trình thứ nhất trong hệ.

Cụ thể ta biến đổi hệ trở thành : $\begin{cases} 2y+\sqrt{x^2-4y^2}=4-x \\ y\sqrt{x^2-4y^2}=1 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ hai trong hệ và cấu trúc mới trong phương trình thứ nhất trong hệ, giúp ta định hướng sẽ dùng phép nâng lũy thừa để khử bớt các đại lượng và làm xuất hiện đại lượng có mặt ở phương trình thứ hai trong hệ.

Cụ thể ta có :

$2y+\sqrt{x^2-4y^2}=4-x\Rightarrow 4y^2+4y\sqrt{x^2-4y^2}+x^2-4y^2=16-2x+x^2$

$\Leftrightarrow 2y\sqrt{x^2-4y^2}=8-x$

Rõ ràng tới đây ta nhận thấy chỉ cần thay hệ số $1=y\sqrt{x^2-4y^2}$ là xem như hệ được giải quyết trọn vẹn.

Lời giải : Điều kiện : $x^2-4y^2\geq 0$.

Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ : $\begin{cases}2y+\sqrt{x^2-4y^2}=4-x\\ y\sqrt{x^2-4y^2}=1\end{cases}$ (1)

Từ phương trình thứ nhất trong hệ (1) ta có :

$2y+\sqrt{x^2-4y^2}=4-x\Rightarrow 4y^2+4y\sqrt{x^2-4y^2}+x^2-4y^2=16-2x+x^2$

$\Leftrightarrow 2y\sqrt{x^2-4y^2}=8-x$ (2)

Thế $1=y\sqrt{x^2-4y^2}$ vào (2) ta có : $2=8-x\Leftrightarrow x=6$

Thay $x=6$ vào (2) ta có :

$$y\sqrt{36-4y^2}=1\Leftrightarrow\begin{cases}y\geq 0\\ 4y^4-36y^2+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\pm\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-2\right)}{2}\\ y=\pm\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+2\right)}{2}\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện và thử lại ta có nghiệm của hệ phương trình là:

$$(x;y)=\left\{\left(6;\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-2\right)}{2}\right);\left(6;-\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-2\right)}{2}\right);\left(6;\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+2\right)}{2}\right);\left(6;-\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+2\right)}{2}\right)\right\}.$$

Bình luận : Hệ này có thể dùng ẩn phụ hoặc cách khác để giải. Tuy nhiên, dưới con mắt "thế hằng số" ta thấy bài toán vẫn được giải rất gọn.

b) Kỹ thuật 2 : Thế hằng số để tạo sự đồng bậc trong hệ và bắt nhân tử chung.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+y^3=2\\ x^2y+3xy^2+2y^3=6\end{cases}$ $\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Phân tích: Quan sát hệ phương trình ta nhận thấy đối với cả hai phương trình trong hệ thì vế trái đều có bậc 3, vế phải đều có bậc 0. Nên ta sẽ đưa ý tưởng đưa một trong hai hệ về phương trình đồng bậc để phân tích bắt nhân tử chung bằng phép thế hằng số.

Ở hệ này ta sẽ tạo phương trình đồng bậc cho phương trình thứ hai trong hệ bằng phép thế hằng số từ phương trình thứ nhất.

Cụ thể ta có : $x^2y+3xy^2+2y^3=6 \Leftrightarrow x^2y+3xy^2+2y^3=3\left(x^3+y^3\right)$

$\Leftrightarrow xy(x+y)+2y^2(x+y)=3(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$

$\Leftrightarrow (x+y)\left(3x^2-4xy+y^2\right)=0$.

Tới đây xem như hệ đã được giải quyết.

Lời giải :

Ta biến đổi phương trình thứ hai trong hệ ta được : $x^2y+3xy^2+2y^3=3\cdot 2$ (1)

Thay $2=x^3+y^3$ vào (1) ta được phương trình :

$x^2y+3xy^2+2y^3=3\left(x^3+y^3\right)$

$\Leftrightarrow xy(x+y)+2y^2(x+y)=3(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$

$\Leftrightarrow (x+y)\left(3x^2-4xy+y^2\right)=0 \Leftrightarrow (x+y)(x-y)(3x-y)=0$.

⊕ Với $x=y$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có :

$2x^3=2 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$.

⊕ Với $x=-y$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có : $0\cdot x^3=2$ (vô lí).

⊕ Với $y=3x$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có :

$14x^3=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{14}} \Rightarrow y=\frac{3}{\sqrt[3]{14}}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x,y)=\left\{(1;1);\left(\frac{1}{\sqrt[3]{14}};\frac{3}{\sqrt[3]{14}}\right)\right\}$.

Bình luận: Hệ đang xét thực chất là một hệ đẳng cấp bậc ba ta có thể sử dụng phương pháp chung của hệ đẳng cấp để giải quyết. Sau này chúng ta sẽ gặp lại trong các phần sau. Tuy nhiên với lời giải trên chúng ta thấy bài toán giải theo phép thế hằng số tạo sự đồng bậc có lời giải cũng khá đẹp mắt.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\left(x^3-3x\right)=y^3+3y\\2\left(x^2-1\right)=5y^2+1\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Hình thức của hệ đã cho chưa giúp chúng ta nhận biết điều gì. Ta sẽ biến đổi một chút hệ đã cho trở thành : $\begin{cases}2x^3-y^3=3(2x+y)\\2x^2-5y^2=3\end{cases}$

Quan sát hệ mới ta nhận thấy ở phương trình thứ nhất trong hệ vế trái có bậc 3, vế phải có bậc 1. Mặt khác ở phương trình thứ hai trong hai vế trái có bậc 2, vế phải có bậc 0. Suy nghĩ tự nhiên thấy cả hai phương trình trong hệ đều chứa hằng số 3 giống nhau nên ta liên tưởng đến phương án tạo sự đồng bậc cho một phương trình trong hệ. Cụ thể ta sẽ ghép bậc 2 với bậc 1 để tạo bậc 3.

Cụ thể ta có : $2x^3 - y^3 = 3(2x + y) \Leftrightarrow 2x^3 - y^3 = (2x^2 - 5y^2)(2x + y)$

$\Leftrightarrow x^3 + x^2y - 5xy^2 - 2y^3 = 0$

Đây là một phương trình đẳng cấp nên ta có thể giải quyết. Như vậy, xem như hệ này cũng được giải quyết được bằng kỹ thuật thế tạo sự đồng bậc.

Lời giải : Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x^3 - y^3 = 3(2x + y) \\ 2x^2 - 5y^2 = 3 \end{cases}.$$

Thay $3 = 2x^2 - 5y^2$ vào phương trình thứ nhất trong hệ mới biến đổi ta có :

$2x^3 - y^3 = 3(2x + y) \Leftrightarrow 2x^3 - y^3 = (2x^2 - 5y^2)(2x + y)$

$\Leftrightarrow x^3 + x^2y - 5xy^2 - 2y^3 = 0 \ (1)$.

Nhận xét $(x; y) = (0; 0)$ không thỏa hệ. Với $x \neq 0$ ta có (1) trở thành :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{y}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} - 2\right)\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{y}\right) + 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ x = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2}y \\ x = \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2}y \end{array}\right.$$

⊕ Với $x = 2y$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có :

$y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = \pm 2$.

⊕ Với $x = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2}y$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có :

$$2\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}y\right)^2 - 5y^2 = 3 \Leftrightarrow y^2 = -\frac{6 + 9\sqrt{5}}{41} \text{ (vô lí).}$$

⊕ Với $x = \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2}y$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có :

$$2\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}y\right)^2-5y^2=3\Leftrightarrow y^2=\frac{9\sqrt{5}-6}{41}\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{9\sqrt{5}-6}{41}}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm:

$$(x;y)=\left\{\begin{array}{l}(2;1);(-2;-1);\\ \left(\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt{\frac{9\sqrt{5}-6}{41}};\sqrt{\frac{9\sqrt{5}-6}{41}}\right);\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt{\frac{9\sqrt{5}-6}{41}};-\sqrt{\frac{9\sqrt{5}-6}{41}}\right)\end{array}\right\}$$

Ví dụ 3 : Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+3y^3-xy^2=1\\ x^4+6y^4=x+2y\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Phân tích : Quan sát hệ ta thấy ngay rằng vế trái phương trình thứ nhất trong hệ có bậc là 3, còn vế trái phương trình thứ hai trong hệ có bậc 4 và vế phải có bậc 1.

Do đó ý tưởng là ta thế hằng số $1=x^3+3y^3-xy^2$ vào vế phải của phương trình thứ hai để tạo sự đồng bậc.

Khi đó ta có: $x^4+6y^4=\left(x^3+3y^3-xy^2\right)(x+2y)$.

Thu gọn phương trình này ta có: $xy\left(2x^2-xy+y^2\right)=0$.

Tới đây ta xem như hệ đã được giải quyết.

Lời giải :

Kết hợp với phương trình thứ nhất trong hệ ta biến đổi phương trình thứ hai trong hệ ta có :

$$x^4+6y^4=\left(x^3+3y^3-xy^2\right)(x+2y)\Leftrightarrow xy\left(2x^2-xy+y^2\right)=0\quad (1)$$

Nhận xét: $2x^2-xy+y^2=x^2+\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}>0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Do đó từ (1) ta có: $xy=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ y=0\end{array}\right.$.

⊕ Với $x=0$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có: $y=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

⊕ Với $y=0$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có: $x=1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm: $(x;y)=\left\{\left(0;\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right);(1;0)\right\}$.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+y^3=1\\ x^7+y^7=x^4+y^4\end{cases}$

Phân tích : Quan sát hệ phương trình ta thấy phương trình thứ hai trong hệ vế trái có bậc 7, vế phải có bậc 4. Hệ số đi kèm vế phải là 1 nên từ phương trình thứ nhất có vế trái là bậc 3 và vế phải chứa hệ số 1, ta thế $1 = x^3 + y^3$ vào vế phải của phương trình thứ hai ta sẽ tạo được sự đồng bậc.

Lời giải : Thế $1 = x^3 + y^3$ vào vế phải phương trình thứ hai trong hệ ta có :

$$x^7 + y^7 = \left(x^3 + y^3\right)\left(x^4 + y^4\right) \Leftrightarrow x^3y^3\left(x + y\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ x = -y \end{array}\right.$$

⊕ Với $x = 0$ thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có : $y = 1$.

⊕ Với $y = 0$ thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có : $x = 1$.

⊕ Với $x = -y$ thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có : $0 \cdot y^3 = 1$ (vô lí).

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(x;y\right) = \left\{\left(0;1\right);\left(1;0\right)\right\}$.

Bình luận: Qua lời giải trên các bạn nhận thấy hệ được giải rất gọn nhẹ. Tuy nhiên, hình thức của rõ ràng cho ta thấy ngay tính đối xứng của hệ nên nhiều lúc trong chúng ta rất máy móc để giải quyết bằng phương pháp hệ đối xứng đã biết, như thế sẽ rất khó khăn trong biến đổi đại số vì bậc trong hệ khá cao. Với cách nhìn thế hệ số để tạo sự đồng bậc, chúng ta đã làm nên sự khác biệt lời giải cho bài toán.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 8y^2 = 12 \\ x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \end{cases} \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$

Phân tích : Quan sát hệ ta nhận thấy vế trái của phương trình thứ hai trong hệ có chứa hai bậc 3 và một bậc nhất đó là 12y. Tuy nhiên hệ số 12 lại xuất hiện ở phương trình thứ nhất trong hệ, lại có vế trái phương trình thứ nhất lại chứa bậc 2 nên ta sẽ tiến hành phép thế để tạo được sự đồng bậc.

Cụ thể ta có: $x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2xy^2 + \left(x^2 + 8y^2\right)y = 0$.

Phương trình cuối thu được là phương trình đẳng cấp bậc 3 nên ta hoàn toàn có thể giải quyết tốt.

Lời giải :

Thế $12 = x^2 + 8y^2$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2xy^2 + \left(x^2 + 8y^2\right)y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2y + 2xy^2 + 8y^3 = 0 \qquad (1).$$

Với $y = 0$ ta nhận thấy không thỏa hệ. Với $y \neq 0$ ta biến đổi phương trình (1) ta có:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3+\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\left(\frac{x}{y}\right)+8=0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}+2\right)\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}+4\right]=0 \quad (2)$$

Nhận xét : $\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}+4=\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$. Do đó $(2)\Leftrightarrow x=-2y$.

Thế $x=-2y$ vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$12y^2=12 \Leftrightarrow y=\pm1 \Rightarrow x=\pm2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=\{(-2;1);(2;-1)\}$.

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ 7(x^5+y^5)=31(x^3+y^3) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này ta nhận thấy rằng vế trái phương trình thứ hai là bậc 5, vế phải phương trình thứ hai bậc 3 còn phương trình thứ nhất bậc là 2. Do đó ta có ý tưởng thế hệ số để đưa phương trình thứ hai về dạng phương trình đồng bậc. Tuy nhiên quan sát hệ của phương trình thứ hai ta thấy không liên quan gì tới hệ số 3 ở phương trình thứ nhất trong hệ. Do đó việc đầu tiên ta sẽ tạo hệ số 3 cho phương trình thứ hai trong hệ để tạo tiền đề cho phép thế của chúng ta thành công.

Cụ thể ta biến đổi phương trình thứ hai trong hệ tương đương với phương trình :

$21(x^5+y^5)=31\cdot3(x^3+y^3) \Leftrightarrow 21(x^5+y^5)=31(x^2+xy+y^2)(x^3+y^3)$.

Tới đây ta xem hướng phân tích đã khả quan. Vậy chúng ta sẽ tiến hành giải quyết hệ.

Lời giải :

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ : $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ 21(x^5+y^5)=31\cdot3(x^3+y^3) \end{cases}$

Thế $3=x^2+xy+y^2$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình : $21(x^5+y^5)=31(x^2+xy+y^2)(x^3+y^3)$

$\Leftrightarrow 10x^5+31x^4y+31x^3y^2+31xy^3+10y^4=0$ (1).

Nhận xét hệ luôn có nghiệm (x ; y) = (0 ; 0).

Do đó với $x\neq0$, đặt $x=ty$ ta có (1) trở thành phương trình sau :

$10t^5+31t^4+31t^3+31t+10=0 \Leftrightarrow (t+1)(10t^4+21t^3+10t^2+21t+10)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ 10t^4+21t^3+10t^2+21t+10=0 \end{array}\right.$

⊕ Với $t=-1 \Leftrightarrow y=-x$ thế vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$y=\pm\sqrt{3} \Rightarrow x=\mp\sqrt{3}$.

⊕ Với $10t^4+21t^3+10t^2+21t+10=0$ ta biến đổi về phương trình sau :

$10\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)+21\left(t+\frac{1}{t}\right)+10=0\ (2)$ vì $t=0$ không thỏa phương trình

Đặt $u=t+\frac{1}{t} \Rightarrow t^2+\frac{1}{t^2}=u^2-2$, $|u|\ge 2$. Lúc đó phương trình (2) trở thành

phương trình: $10u^2+21u-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\frac{2}{5}(l) \\ u=-\frac{5}{2} \end{array}\right.$

⊕ Với $u=-\frac{5}{2} \Leftrightarrow t+\frac{1}{t}=-\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2y \\ -2x=y \end{array}\right.$.

⊕ Với $x=-2y$ ta thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1 \Rightarrow x=\mp 2$.

⊕ Với $y=-2x$ ta thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1 \Rightarrow y=\mp 2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là :

$(x,y)=\left\{(1;-2);(-1;2);(-2;1);(2;-1);\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right);\left(\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)\right\}$.

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{x}-3y\sqrt{y}=3\left(\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right) \\ x-2y=6 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích: Quan sát hệ phương trình đã cho, không khó để nhận thấy vế trái của phương trình thứ nhất có bậc $\frac{3}{2}$, vế phải có bậc là $\frac{1}{2}$. Còn phương trình thứ hai trong hệ thì vế trái có bậc là 1. Do đó ý tưởng ta sẽ ghép bậc 1 và bậc $\frac{1}{2}$ để tạo ra phương trình đồng bậc $\frac{3}{2}$ nhờ vào việc thế hệ số.

Cụ thể ta có: $x\sqrt{x}-3y\sqrt{y}=3\left(\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right) \Leftrightarrow 2x\sqrt{x}-6y\sqrt{y}=6\left(\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)$

Thế $6=x-2y$ ta có :

$2x\sqrt{x}-6y\sqrt{y}=(x-2y)\left(\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(x-3\sqrt{xy}+2y\right)=0$.

Tới đây ta xem như hệ vẫn giải quyết xong.

Lời giải : Điều kiện: $x \geq 0; y \geq 0$.

Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ :

$$\begin{cases} 2x\sqrt{x} - 6y\sqrt{y} = 6\left(\sqrt{x} + 3\sqrt{y}\right) \\ x - 2y = 6 \end{cases} (1).$$

Thế $6 = x - 2y$ vào phương trình thứ hai trong hệ (1) ta có phương trình :

$$2x\sqrt{x} - 6y\sqrt{y} = (x - 2y)\left(\sqrt{x} + 3\sqrt{y}\right) \Leftrightarrow x\sqrt{x} - 3x\sqrt{y} + 2y\sqrt{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(x - 3\sqrt{xy} + 2y\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} - 2\sqrt{y}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = y \\ x = 4y \end{array}\right..$$

⊕ Với $x = 0$ ta thay vào phương trình thứ hai trong hệ (1) ta có $y = -3$ (loại).

⊕ Với $x = y$ ta thay vào phương trình thứ hai trong hệ (1) ta có $y = -6$ (loại).

⊕ Với $x = 4y$ ta thay vào phương trình thứ hai trong hệ (1) ta có $y = 3 \Rightarrow x = 12$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (12; 3)$.

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x\sqrt{y+3} = -1 - y \\ x\left(x^2 - 2\right) + 4(2y + 5)\sqrt{y+3} = 0 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Hệ đang xét có chứa căn thức và cấu trúc của hệ cũng không khó để phán đoán. Thật vậy, phương trình thứ nhất trong hệ nếu được viết lại thành :

$$x^2 - 3x\sqrt{y+3} + y + 3 = 2$$

Phương trình vừa biến đổi là đẳng cấp với hai biến $x, \sqrt{y+3}$.

Tiếp tục biến đổi phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$x^3 + 8(y + 3)\sqrt{y+3} = 2\left(x + 2\sqrt{y+3}\right)$$

Nhận thấy vế trái phương trình này có vế trái bậc 3 với hai biến $x, \sqrt{y+3}$, còn vế phải là bậc 1 với hai biến $x, \sqrt{y+3}$ và chứa hệ số 2. Do đó ý tưởng sẽ thế hằng số bằng biến để tạo sự đồng bậc cho hai vế của phương trình thứ hai trong hệ.

Xem như là đường hướng đi của hệ đã giải quyết, tuy nhiên để cho gọn hệ ta sẽ tiến hành đặt cho biến $\sqrt{y+3} = a$.

Lời giải : Điều kiện : $y \geq -3$.

Đặt $a = \sqrt{y+3}, a \geq 0$.

Ta có : $a^2 - 3 = y$.

Khi đó hệ phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases} x^2 - 3xa + a^2 = 2 \\ x^3 + 8a^3 = 2(x + 2a) \end{cases}$ (1)

Thế $2 = x^2 - 3xa + a^2$ vào phương trình thứ hai trong hệ (1) ta thu được phương trình:

$x^3 + 8a^3 = (x^2 - 3xa + a^2)(x + 2a) \Leftrightarrow a(x^2 + 5xa + 6a^2) = 0$

$\Leftrightarrow a(x + 2a)(x + 3a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ x = -2a \\ x = -3a \end{array}\right.$

⊕ Với $a = 0$ thay vào phương trình thứ nhất trong hệ (1) ta được : $x^2 = 2$. Khi đó ta có: $\begin{cases} x^2 = 2 \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ \sqrt{y+3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = -3 \end{cases}$

⊕ Với $x = -3a$ thay vào phương trình thứ nhất trong hệ (1) ta được : $a = \sqrt{\frac{2}{19}}$. Khi đó ta có: $\begin{cases} x = -3a \\ a = \sqrt{\frac{2}{19}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3\sqrt{\frac{2}{19}} \\ \sqrt{y+3} = \sqrt{\frac{2}{19}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3\sqrt{\frac{2}{19}} \\ y = -\frac{55}{19} \end{cases}$

⊕ Với $x = -2a$ thay vào phương trình thứ nhất trong hệ (1) ta được $a = \sqrt{\frac{2}{11}}$. Khi đó ta có : $\begin{cases} x = -2a \\ a = \sqrt{\frac{2}{11}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\sqrt{\frac{2}{11}} \\ \sqrt{y+3} = \sqrt{\frac{2}{11}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\sqrt{\frac{2}{11}} \\ y = -\frac{31}{11} \end{cases}$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là :

$(x, y) = \left\{(\sqrt{2}; -3); (-\sqrt{2}; -3); \left(-3\sqrt{\frac{2}{19}}; -\frac{55}{19}\right); \left(-2\sqrt{\frac{2}{11}}; -\frac{31}{11}\right)\right\}$.

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y(x - 6y) = 9 \\ y(2xy + 9(y^2 + 3)) = 9(y^2 + 1)\sqrt{xy} \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích: Quan sát hệ phương trình ta thấy phương trình thứ hai trong hệ với cách nhóm hạng tử như thế chưa giúp chúng ta định hướng được điều gì? Do đó ta tiến hành biến đổi trước phương trình này.

Cụ thể ta có :

$y\left(2xy+9\left(y^2+3\right)\right)=9\left(y^2+1\right)\sqrt{xy} \Leftrightarrow 2xy^2+9y^3+27y=9y^2\sqrt{xy}+9\sqrt{xy}$.

Tới đây, ta nhận thấy trong phương trình vừa biến đổi có đại lượng $\sqrt{xy}$, mặt khác lại có mặt đại lượng xy^2 nên ta tiến hành tách $xy^2=xy\cdot y$.

Mặt khác từ phương trình thứ nhất trong hệ ta cũng có đại lượng xy nên ta đưa suy nghĩ về việc làm giảm căn thức thông qua phép đặt $a=\sqrt{xy}$. Khi đó ta sẽ có hệ phương trình :

$$\begin{cases} a^2-6y^2=9 \\ 2a^2y+9y^3+27y=9ay^2+9a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-6y^2=9 \\ 2a^2y+9y^3-9ay^2=9a-27y \end{cases}$$

Với hệ mới là một hệ mà thông qua các ví dụ trước chúng ta thấy được hệ này đa có thể giải quyết bằng phương pháp thế hằng số.

Thật vậy ta có :

$$2a^2y+9y^3-9ay^2=\left(a^2-6y^2\right)(a-3y) \Leftrightarrow a^3-5a^2y+3ay^2+9y^3=0.$$

Phương trình cuối là phương trình đẳng cấp bậc 3.

Lời giải : Điều kiện: $xy\geq 0$.

Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ :

$$\begin{cases} xy-6y^2=9 \\ 2xy^2+9y^3+27y=9y^2\sqrt{xy}+9\sqrt{xy} \end{cases}$$

Đặt $a=\sqrt{xy}$, $a\geq 0$. Khi đó hệ mới sẽ trở thành hệ phương trình :

$$\begin{cases} a^2-6y^2=9 \\ 2a^2y+9y^3+27y=9ay^2+9a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-6y^2=9 \\ 2a^2y+9y^3-9ay^2=9(a-3y) \end{cases} \quad (1)$$

Thế $9=a^2-6y^2$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$2a^2y-9ay^2+9y^3=\left(a^2-6y^2\right)(a-3y) \qquad (2).$$

Nhận xét với $y=0$ không thỏa hệ. Với $y\neq 0$ ta biến đổi phương trình (2) trở thành :

$$2\left(\frac{a}{y}\right)^2-9\left(\frac{a}{y}\right)+9=\left(\left(\frac{a}{y}\right)^2-6\right)\left(\frac{a}{y}-3\right) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{y}-3\right)\left(2\frac{a}{y}-3\right)=\left(\left(\frac{a}{y}\right)^2-6\right)\left(\frac{a}{y}-3\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{y}-3\right)\left(\left(\frac{a}{y}\right)^2-2\frac{a}{y}-3\right)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{y}-3\right)^2\left(\frac{a}{y}+1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3y \\ a=-y \end{array}\right.$$

⊕ Với $a=3y \Rightarrow y>0$ thế vào phương trình thứ nhất trong hệ (1) ta có :

$y=\sqrt{3}\Rightarrow a=3\sqrt{3}\Rightarrow x=9\sqrt{3}$

⊕ Với $a=-y\Rightarrow y<0$ thế vào phương trình thứ nhất trong hệ (1) ta có: $y^2=-\frac{9}{5}$

(vô lí)

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left(9\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

- *Đối với hệ có dạng* $\begin{cases}y=f(x)\\g(x,y)=0\end{cases}\vee\begin{cases}x=f(y)\\g(x,y)=0\end{cases}$

Ta thường giải quyết hệ này theo việc rút biến $y=f(x)$ hoặc $x=f(y)$ thay vào $g(x,y)=0$ rồi giải. Chú ý rằng để thành công thì phương trình $g(x,y)=0$ phải có thể giải được bằng những phương pháp khả thi. Đơn giản bởi vì khi thay thế như vậy thường với hệ phương trình hữu tỉ là chúng ta thu được phương trình có bậc khá cao hoặc phương trình có dạng quá phức tạp làm cho việc triển khai kỹ năng đại số khá khó khăn, đôi lúc không tìm được hướng giải quyết tốt.

Ví dụ 1:

Giải hệ phương trình : $\begin{cases}2x-y=1\\3(y-3x+1)x^2+\left(y^2+2x+2\right)(x-1)=-3y\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Quan sát hệ ta thấy ngay được rằng từ phương trình thứ nhất trong hệ ta dễ dàng rút được $y=2x-1$.

Thay kết quả vừa rút vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được một phương trình bậc ba theo biến x.

Lời giải : Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có : $y=2x-1$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$3x^2(2x-1-3x+1)+\left((2x-1)^2+2x+2\right)(x-1)+3(2x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2-5x+6\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\x^2-5x+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=1\\x=2\Rightarrow y=3\\x=3\Rightarrow y=5\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm : $(x;y)=\{(1;1);(2;3);(3;5)\}$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases}6x^3+x^2y-x=10\\x^2-y=2(x+3)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Không khó để nhận thấy, từ phương trình thứ hai ta rút

$y = x^2 - 2x + 6$ thay vào phương trình thứ nhất là giải quyết được bài toán.

Lời giải :

Từ phương trình thứ hai trong hệ ta có: $y = x^2 - 2x + 6$.

Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có phương trình :

$$6x^3 + x^2\left(x^2 - 2x + 6\right) - x = 10 \Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 6x^2 - x - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)\left(x^2 + 3x + 5\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = 6 \\ x = -2 \Rightarrow y = 14 \end{array}\right.$$ vì $x^2 + 3x + 5 = 0$ (vô lí).

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(3x + 1 - y) = 1 \\ (y - 3x)^2 + \dfrac{9}{x^2} = 6 - x \end{cases}$

Phân tích : Không khó để biết với hình thức của hệ đã cho thì nghiệm của hệ sẽ không có dạng $(x, y) = (0, y)$.

Do đó với $x \neq 0$ thì từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có : $y = -\dfrac{1}{x} + 3x + 1$.

Từ đây, ta có thể thay vào phương trình thứ hai trong hệ thu được phương trình bậc ba.

Vậy xem như hệ đã được giải quyết.

Lời giải :

Điều kiện $x \neq 0$.

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta rút được : $y = -\dfrac{1}{x} + 3x + 1$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + \frac{9}{x^2} = 6 - x \Leftrightarrow (x-1)^2 + 9 = x^2(6 - x)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x-5)\left(x^2 - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \Rightarrow y = \dfrac{79}{5} \\ x = \sqrt{2} \Rightarrow y = \dfrac{2 + 5\sqrt{2}}{2} \\ x = -\sqrt{2} \Rightarrow y = \dfrac{2 - 5\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là :

$$(x; y) = \left\{\left(5; \frac{79}{5}\right); \left(\sqrt{2}; \frac{2 + 5\sqrt{2}}{2}\right); \left(-\sqrt{2}; \frac{2 - 5\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình : $\begin{cases}(2x-1)^2+4(x-1)y+4y^2=21\\ x^2+(y-1)^2=5\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Hệ phương trình đang xét có cấu trúc để nhận xét rút thế có khó khăn một chút. Tuy nhiên, nếu tinh ý nhận xét được ở cả phương trình thứ nhất và phương trình thứ hai đều chứa đại lượng x^2+y^2.

Thật vậy, ta có khi khai triển vế trái phương trình thứ nhất trong hệ ta sẽ nhóm được đại lượng $4(x^2+y^2)$. Kết hợp với khai triển vế trái phương trình thứ hai trong hệ chúng ta sẽ thu được $x^2+y^2=4+2y$.

Như vậy khi ta thực hiện phép thế x^2+y^2 vào phương trình thứ nhất trong hệ, ta sẽ thu được một phương trình mà các biến x,y chỉ là bậc nhất nên ta tiếp tục sử dụng rút thế giữa hai biến x,y cho nhau.

Vậy xem như cơ bản là bài toán đã được giải quyết.

Lời giải :

Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ phương trình:

$$\begin{cases}4(x^2+y^2)-4x+4(x-1)y=20\\ x^2+y^2=2y+4\end{cases}\quad(1)$$

Thế $x^2+y^2=2y+4$ vào phương trình thứ nhất trong hệ (1) ta có :

$$4(2y+4)-4x+4(x-1)y=20\Leftrightarrow(x+1)(y-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ y=1\end{array}\right.$$

⊕ Với $x=-1$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ (1) ta có :

$$y^2-2y-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1\\ y=3\end{array}\right.$$

⊕ Với $y=1$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ (1) ta có : $x^2=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{5}\\ x=-\sqrt{5}\end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm :

$(x,y)=\left\{(-1;-1);(-1;3);(\sqrt{5};1);(-\sqrt{5};1)\right\}$.

Ví dụ 5 :

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^4(x^2+27y^2)-3x=13-3x^3y(x^2+9y^2)\\ x(x+3y-1)=5\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Quan sát hệ này, chúng ta dễ nhận thấy từ phương trình thứ hai có thể rút y theo x.

Thật vậy ta có : $y = \dfrac{x + 5 - x^2}{3x}$. Nếu ta thế tự nhiên như vậy thì do cấu tạo bậc của biến x đề bài cho, chúng ta sẽ gặp trở ngại ngay với phương trình bậc khá cao là bậc 6.

Với kiểu phương trình bậc 6 nếu không dám chắc chắn nghiệm của hệ ở định mức "vắt kiệt" có thể nhất thì khả năng giải trực tiếp nó là không cao.

Tuy vậy, ta để ý được rằng ở phương trình thứ nhất trong hệ nếu ta thực hiện phép biến đổi sau đây :

$$x^4\left(x^2 + 27y^2\right) + 3x^3y\left(x^2 + 9y^2\right) = 3x + 13$$

Ở phương trình này nhận thấy ở vế trái các hệ số lần lượt là $1;3;27;27$ là các hệ số đứng trước các đại lượng có số mũ giảm dần theo biến x và tăng dần theo biến y nên ta liên tưởng tới hằng đẳng thức sau :

$$\left(x^2 + 3xy\right)^3 = x^6 + 3x^5y + 27x^4y^2 + 27x^3y^3$$

Mặt khác phương trình thứ hai trong hệ ta sắp xếp lại như sau : $x^2 + 3xy = x + 5$

Với các nhận xét này ta thấy hệ đã cho được viết lại : $\begin{cases} \left(x^2 + 3xy\right)^3 = 3x + 13 \\ x^2 + 3xy = x + 5 \end{cases}$.

Và tới đây đã biết được hướng để giải quyết tốt hệ này.

Lời giải :

Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ phương trình :

$$\begin{cases} \left(x^2 + 3xy\right)^3 = 3x + 13 \\ x^2 + 3xy = x + 5 \end{cases} \quad (1)$$

Thay $x^2 + 3xy = x + 5$ vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có phương trình:

$(x + 5)^3 - 3(x + 5) + 2 = 0 \Leftrightarrow a^3 - 3a + 2 = 0$ với $a = x + 5$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2(a + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \Rightarrow y = \dfrac{5}{4} \\ x = -7 \Rightarrow y = \dfrac{17}{7} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y) = \left\{\left(-7;\dfrac{17}{7}\right);\left(-4;\dfrac{5}{4}\right)\right\}$.

Ví dụ 6 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+(y-1)^2=1 \\ 5x^3-4x^3y-x^2y=4xy-5x+y \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích: Quan sát hệ này, ta chưa thấy được ta sẽ rút cái gì và thế cái gì. Tuy nhiên nếu ta tinh ý một chút ta để ý phương trình thứ hai trong hệ có các hệ số quá đẹp mắt cộng hưởng với các biến tham gia với từng cặp hệ số cho ta được phép biến đổi sau đây.

Ta có :

$5x^3-4x^3y-x^2y=4xy-5x+y \Leftrightarrow 5x\left(x^2+1\right)-4xy\left(x^2+1\right)-y\left(x^2+1\right)=0$

Mặt khác ta luôn có : $x^2+1>0$ nên ta lại có : $5x-y(1+4x)=0$.

Tới đây mọi thứ đã được rõ ràng.

Lời giải : Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2=1 \\ \left(x^2+1\right)(5x-4xy-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y-1)^2=1 \\ 5x=(4x+1)y \end{cases} \quad (1)$$

⊕ Với $x=-\frac{1}{4}$ thì hệ (1) vô nghiệm.

⊕ Với $x\neq-\frac{1}{4}$, từ phương trình thứ hai trong hệ (1) ta có: $y=\frac{5x}{4x+1}$

Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có phương trình.

$$x^2+\left(\frac{5x}{4x+1}-1\right)^2=1 \Leftrightarrow x^2(4x+1)^2+(x-1)^2=(4x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (4x+1)^2\left(x^2-1\right)+(x-1)^2=0 \Leftrightarrow (x-1)\left[(4x+1)^2(x+1)+(x-1)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)\left(8x^2+12x+5\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=1 \Rightarrow y=1 \end{array}\right. \text{ vì } 8x^2+12x+5>0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x,y)=\{(0;0);(1;1)\}$.

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(y^2-8x+5\right)x^2+6y-5=0 \\ xy+1=x^2+y \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Quan sát hệ phương trình đã cho, ta để ý thấy phương trình thứ hai nếu ta chuyển vế thì ta sẽ thu được một nhân tử chung hay nói cách khác nếu ta cho $x=1$ thì phương trình thứ hai luôn thỏa.

Thật vậy, ta có : $xy-y-x^2+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(y-x-1)=0$

Tới đây mọi việc đã được sáng tỏ.

Lời giải : Phương trình thứ hai trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$xy-y-x^2+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(y-x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y=x+1 \end{array}\right.$$

⊕ Với $x=1$ thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$$y^2+6y-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-3+\sqrt{17} \\ y=-3-\sqrt{17} \end{array}\right.$$

⊕ Với $y=x+1$ thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$$\left((x+1)^2-8x+5\right)x^2+6(x+1)-5=0 \Leftrightarrow x^4-6x^3+6x^2+6x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-3x-1\right)^2=x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-1=0 \\ x^2-4x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{2} \Rightarrow y=2-\sqrt{2} \\ x=1+\sqrt{2} \Rightarrow y=2+\sqrt{2} \\ x=2-\sqrt{5} \Rightarrow y=3-\sqrt{5} \\ x=2+\sqrt{5} \Rightarrow y=3+\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm :

$$(x;y)=\left\{\left(1;-3\pm\sqrt{17}\right);\left(1-\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right);\left(1+\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right);\left(2-\sqrt{5};3-\sqrt{5}\right);\left(2+\sqrt{5};3+\sqrt{5}\right)\right\}.$$

Ví dụ 8 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-y=1 \\ \sqrt{x^2+2y+3}=3x-5 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này rõ ràng, ngay từ phương trình thứ nhất ta rút $y=x-1$, thay vào phương trình thứ hai ta sẽ gặp một phương trình chứa căn dạng cơ bản $\sqrt{f(x)}=g(x)$.

Lời giải : Điều kiện : $x^2+2y+3\ge 0$.

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có : $y=x-1$

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$\sqrt{x^2+2x+1}=3x-5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5\ge 0 \\ x^2+2x+1=(3x-5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{5}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=2$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x,y)=(3;2)$.

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x(x-y)=6-x-2y \\ (x+2)\sqrt{y^2+4}=y\sqrt{x^2+4y+8} \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Phân tích : Với hệ này rõ ràng ta không thể tìm mối liên quan rút thế giữa hai biến x, y từ phương trình thứ hai trong hệ.

Vậy ta cần bắt đầu từ phương trình thứ nhất trong hệ vì hình thức đơn giản và dễ biến đổi hơn.

Cụ thể ta có :

$x(x-y)=6-x-2y \Leftrightarrow x^2+x-6-xy+2y=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3)-(x-2)y=0$

Tới đây ta thấy bài toán đã có thể giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $x^2+4y+8 \geq 0$

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta biến đổi :

$$x(x-y)=6-x-2y \Leftrightarrow x^2+x-6-xy+2y=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+3)-(x-2)y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ y=x+3 \end{array}\right.$$

⊕ Với $x=2$ ta thay vào phương thứ hai trong hệ ta có:

$4\sqrt{y^2+4}=y\sqrt{4y+12}=0 \Rightarrow$ sai nghiệm.

⊕ Với $y=x+3$ ta thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có :

$$(x+2)\sqrt{(x+3)^2+4}=(x+3)\sqrt{x^2+4x+20}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\sqrt{(x+3)^2+4}=(x+3)\sqrt{(x+2)^2+16}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x+3) \geq 0 \\ (x+2)^2(x+3)^2+4(x+2)^2=(x+3)^2(x+2)^2+16(x+3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \vee x \geq -2 \\ \left[\begin{array}{l} 2(x+3)=x+2 \\ 2(x+3)=-x-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -3 \vee x \geq -2 \\ \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-\frac{8}{3} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-4 \Rightarrow y=-1.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là: $(x, y)=(-4;-1)$.

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y+\sqrt{x-3}=1 \\ \sqrt{x-2y}+2\sqrt{x+8y+5}=8 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích: Không khó để nhận thấy hệ này có hướng đi rút $y=1-\sqrt{x-3}$ và thay vào phương trình thứ hai để giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-2y \geq 0 \\ x+8y+5 \geq 0 \end{cases}$.

ến

Từ phương thứ nhất trong hệ ta có : $y = 1 - \sqrt{x-3}$.

và Thay vào phương trình thứ hai ta thu được phương trình :

$$\sqrt{x - 2\left(1-\sqrt{x-3}\right)} + 2\sqrt{x + 8\left(1-\sqrt{x-3}\right)+5} = 8$$

0 $$\Leftrightarrow \sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}} + 2\sqrt{x+13-8\sqrt{x-3}} = 8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-3}+1\right)^2} + 2\sqrt{\left(\sqrt{x-3}-4\right)^2} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}+1+2\left|\sqrt{x-3}-4\right| = 8$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x-3}-4 \ge 0 \\ \sqrt{x-3}+1+2\left(\sqrt{x-3}-4\right)=8 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x-3}-4 < 0 \\ \sqrt{x-3}+1-2\left(\sqrt{x-3}-4\right)=8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \dfrac{16}{3} \\ \sqrt{x-3}=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{16}{3} \\ \sqrt{x-3}=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 28 \Rightarrow y = -4 \\ x = 4 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) = \{(4;0);(28;-4)\}$

Ví dụ 11 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x-1 = \sqrt{7x^2-4x-y} \\ \sqrt{x^2+7}-2 = \sqrt{\dfrac{2x^2+14}{3y+3}} \end{cases} (x,y \in \mathbb{R})$.

Phân tích : Quan sát hệ phương trình ta thấy đối với phương trình thứ hai trong hệ có hình thức khá cồng kềnh, phương trình thứ nhất trong hệ có hình thức gọn nhẹ hơn. Mặt khác trong phương trình thứ nhất nếu ta nâng lũy thừa lên sẽ triệt tiêu được đại lượng $4x$ cộng thêm ta sẽ thu được đại lượng $y+1$ là đại lượng có mặt trong phương trình thứ hai trong hệ. Như vậy xem như việc tìm đại lượng rút thế của ta đã có.

Cụ thể ta có :

Từ phương trình thứ nhất sử dụng phép nâng lũy thừa ta có được: $y+1 = 3x^2$.

Thay vào phương trình thứ hai ta thu được phương trình:

$$3x\left(\sqrt{x^2+7}-2\right) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+7}.$$

Phương trình thu được là một phương trình vô tỷ không khó để giải quyết.

Vậy xem như bài toán đã được giải quyết.

Lời giải :

Điều kiện : $\begin{cases} 7x^2-4x-y \ge 0 \\ y > -1 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$$\sqrt{7x^2-4x-y}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ y+1=3x^2 \end{cases}.$$

Thay $y+1=3x^2$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$\sqrt{x^2+7}-2=\sqrt{\frac{2x^2+14}{9x^2}} \Leftrightarrow 3x\left(\sqrt{x^2+7}-2\right)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+7}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+7}=\frac{6x}{3x-\sqrt{2}}\ (1)$$

Để giải (1) ta có hai cách :

⊕ Cách 1: Sử dụng phương pháp bắt nhân tử chung nhờ phép liên hiệp.

Ta có (1) tương đương với:

$$\sqrt{x^2+7}-3=\frac{6x}{3x-\sqrt{2}}-3 \Leftrightarrow \frac{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{x^2+7}+3}=-\frac{3\left(x-\sqrt{2}\right)}{3x-\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{2}\right)\left(\frac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+7}+3}+\frac{3}{3x-\sqrt{2}}\right)=0 \Leftrightarrow x-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2} \Rightarrow y=5$$

Do $\dfrac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+7}+3}+\dfrac{3}{3x-\sqrt{2}}>0,\ \forall x \geq \dfrac{1}{2}$.

⊕ Cách 2 : Sử dụng phương pháp hàm số .

Ta đặt $f(x)=\sqrt{x^2+7}$, $g(x)=\dfrac{6x}{3x-\sqrt{2}}$ với $x \geq \dfrac{1}{2}$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}}>0, \forall x \geq \dfrac{1}{2}$; $g(x)=-\dfrac{6\sqrt{2}}{\left(3x-\sqrt{2}\right)^2}<0, \forall x \geq \dfrac{1}{2}$.

Do đó trên nửa khoảng $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ thì ta có:

- Hàm số f(x) là hàm số đồng biến.
- Hàm số g(x) là hàm số nghịch biến.

Nên từ (1) ta có phương trình f(x) = g(x) có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Mà $f\left(\sqrt{2}\right)=g\left(\sqrt{2}\right)=3$.

Do đó (1) có nghiệm duy nhất $x=\sqrt{2} \Rightarrow y=5$.

Như vậy đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left(\sqrt{2};5\right)$.

Ví dụ 12: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-\sqrt{y-1}=2 \\ y+2\sqrt{x+y-4}=2\left(2\sqrt{x-1}-x\right) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Phân tích : Quan sát hệ phương trình, ta thấy cả hai phương trình trong hệ đều chứa căn thức. Tuy nhiên, rõ ràng cấu trúc của phương trình thứ hai trong hệ cho ta cái nhìn phức tạp còn phương trình thứ nhất nó có cấu trúc của dạng phương trình vô tỉ cơ bản.

Mặt khác mối quan hệ giữa các biến ở phương trình thứ nhất cho ta cảm nhận được có thể rút biến y theo x.

Thật vậy ta có: $\sqrt{y-1}=x-2\Rightarrow y=x^2-4x+5$.

Với kết quả này, ta thay vào phương trình thứ hai ta được một phương trình theo biến x nên hoàn toàn có thể giải quyết được.

Vậy xem như đường lối để giải hệ ta đã có.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge 1 \\ x+y\ge 4 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ hai ta có : $\sqrt{y-1}=x-2\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 2 \\ y=x^2-4x+5 \end{cases}$.

Thay $y=x^2-4x+5$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$$x^2-4x+5+2\sqrt{x^2-3x+1}=4\sqrt{x-1}-2x$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+5+2\sqrt{x^2-3x+1}-4\sqrt{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+1+2\sqrt{x^2-3x+1}+1+x-1-4\sqrt{x-1}+4=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2-3x+1}+1\right)^2+\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \sqrt{x^2-3x+1}-1=0 \\ \sqrt{x-1}-2=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-3x=0 \\ x=5 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ Hệ vô nghiệm.

Ví dụ 13: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x-\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\sqrt{y}=-3-\dfrac{2}{x} \\ x^2-\sqrt{y}=11-2\sqrt{(x+5)(y+2)} \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Quan sát hệ phương trình ta nhận thấy cả hai phương trình đều chứa $\sqrt{y}$ nên ta sẽ quan tâm đến đại lượng này. Không khó để nhận thấy chúng

ta sẽ khó khai thác được gì từ đại lượng $\sqrt{y}$ từ phương trình thứ hai trong hệ, nên ta chuyển sang phương trình thứ nhất trong hệ.

Quy đồng mẫu số biến đổi phương trình thứ nhất trong hệ ta thu được phương trình : $x^2-(x+2)\sqrt{y}=-3x-2$

Ở phương trình vừa biến đổi dễ dàng phát hiện ra được :

$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$.

Như vậy từ phương trình thứ nhất trong hệ ta sẽ thu được :

$(x+2)(x+1-\sqrt{y})=0$.

Tới đây, ta đã tìm được mối liên hệ giữa các biến x, y trong hệ . Vậy xem như hệ đã cho đã được giải quyết tốt.

Lời giải :

Điều kiện : $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \geq 0 \\ (x+5)(y+2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 0 \neq x \geq -5 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta biến đổi có được phương trình :

$x^2-(x+2)\sqrt{y}=-3x-2 \Leftrightarrow (x+2)\sqrt{y}=(x+1)(x+2)$

$\Leftrightarrow (x+2)(x+1-\sqrt{y})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ \sqrt{y}=x+1 \end{array}\right.$.

Vì $y \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Kết hợp với điều kiện ta có : $0 \neq x \geq -1$.

⊕ Với $x=-2$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$4-\sqrt{y}=11-2\sqrt{3(y+2)} \Leftrightarrow 2\sqrt{3(y+2)}=\sqrt{y}+7$

$\Leftrightarrow 12(y+2)=y+14\sqrt{y}+49 \Leftrightarrow 14\sqrt{y}=11y-25$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \dfrac{25}{11} \\ 196y=121y^2-550y+625 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \dfrac{25}{11} \\ 121y^2-746y+625=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=\dfrac{625}{121}$.

⊕ Với $\sqrt{y}=x+1$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình

$x^2-x-12+2\sqrt{(x+5)(x^2+2x+3)}=0$

$\Leftrightarrow x^2+2x+3+2\sqrt{(x+5)(x^2+2x+3)}-3(x+5)=0$

$\Leftrightarrow 3\left(\dfrac{x+5}{x^2+2x+3}\right)-2\sqrt{\dfrac{x+5}{x^2+2x+3}}-1=0 \quad (1)$

Đặt $t=\sqrt{\frac{x+5}{x^2+2x+3}}$, $t\ge 0$. Khi đó phương trình (1) trở thành :

$$3t^2-2t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-\frac{1}{3}(l)\end{array}\right.$$

⊕ Với $t=1$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x+5}{x^2+2x+3}}=1\Leftrightarrow x^2+2x+3=x+5\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=4\\ x=-2(l)\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là :

$$(x;y)=\left\{(1;4);\left(-2;\frac{625}{121}\right)\right\}.$$

Ví dụ 14:

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x-\frac{2}{x}\right)^2+4\left(\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}\right)=1+4(y+2)^3\\ y^2-x=-2(2y+3)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Phân tích : Quan sát hệ phương trình đang xét, không khó để nhận thấy lối đi chính là chúng ta cần làm gọn lại phương trình thứ nhất trong hệ là ưu tiên hàng đầu.

Cụ thể ta có phương trình thứ nhất trong hệ được làm gọn lại thành phương trình : $(x^2-2)^2+4(3x-10)=x^2+4x^2(y+2)^3$

Tiếp theo không khó để chúng ta nhận thấy rằng ở phương trình thứ hai trong hệ ta hoàn toàn có thể rút biến x theo y.

Cụ thể ta có : $x=y^2+4y+6$. Ta đem kết quả này thế vào phương trình thứ nhất trong hệ thì bài toán dễ hoàn toàn được giải quyết.

Nếu nhận định như vậy các bạn sẽ gặp khó khăn ngay tức khăn với phép biến đổi đại số.

Thậy vậy, vì khi rút x theo y thì ta có biến y được biểu diễn ở dạng tam thức bậc 2. Như vậy khi thế vào phương trình thứ nhất trong hệ ta sẽ thu được phương trình có bậc là 8, chưa kể rất khó khăn nếu tiếp tục khai triển hằng đẳng thức tiếp theo cho đại lượng sau :

$$(x^2-2)^2=\left((y^2+4y+6)^2-2\right)^2=(y^4+8y^3+28y^2+48y+34)^2$$

Tuy nhiên nếu ta quan sát để ý một chút và đặt câu hỏi tại sao ở phương trình thứ nhất trong hệ lại chỉ xuất hiện đại lượng $(y+2)^3$?

Mặt khác khi rút x theo y ta để ý rằng $x = y^2 + 4y + 6 = (y+2)^2 + 2$.

Và câu trả lời ta được rõ, có nghĩa là đề cho muốn chúng ta hướng tới cách rút thế như sau :

$x = y^2 + 4y + 6 \Leftrightarrow x - 2 = (y+2)^2 \Rightarrow y + 2 = \sqrt{x-2}$.

Với cách rút thế như thế này chúng ta sẽ dẫn tới phương trình thứ hai trong hệ sẽ trở thành : $x^2 - 4x^2 + 12x - 36 = x^2 + 4x^2(x-2)\sqrt{x-2}$

Một chút biến đổi ta có :

$x^2\left(x^2 - 4 - 4(x-2)\sqrt{x-2}\right) = (x-6)^2 \Leftrightarrow x^2(x-2)\left(\sqrt{x-2}-2\right)^2 = (x-6)^2$.

Phương trình cuối cùng thu được không khó để giải quyết. Do đó ta xem như kết thúc đường hướng giải hệ này ở đây.

Lời giải : Điều kiện : $x \neq 0$.

Hệ phương trình đã cho biến đổi thành hệ :

$$\begin{cases}(x^2-2)^2 + 4(3x-10) = x^2 + 4x^2(y+2)^3 \\ x = y^2 + 4y + 6\end{cases}$$

Ta có : $x = y^2 + 4y + 6 \Leftrightarrow x - 2 = (y+2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ y + 2 = \sqrt{x-2}\end{cases}$

Thế $y + 2 = \sqrt{x-2}$ vào phương trình thứ nhất trong hệ mới ta có :

$$x^4 - 4x^2 + 12x - 36 = x^2 + 4x^2(x-2)\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x^2 - 4 - 4(x-2)\sqrt{x-2}\right) = (x-6)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-2)\left(x - 2 - 4\sqrt{x-2} + 4\right) = (x-6)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-2)\left(\sqrt{x-2}-2\right)^2 = (x-6)^2 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-2)\left(\sqrt{x-2}-2\right)^2 = (x-2-4)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-2)\left(\sqrt{x-2}-2\right)^2 = \left(\sqrt{x-2}-2\right)^2\left(\sqrt{x-2}+2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2} - 2 = 0 \\ x^2(x-2) = \left(\sqrt{x-2}+2\right)^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2} = 2 \\ x^3 - 2x^2 - x - 2 = 4\sqrt{x-2}\end{array}\right.$$

⊕ Với $\sqrt{x-2} = 2 \Leftrightarrow x = 6 \Rightarrow y = 0$.

⊕ Với $x^3 - 2x^2 - x - 2 = 4\sqrt{x-2} \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x - 6 + 4\left(1 - \sqrt{x-2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+2)-\dfrac{4(x-3)}{\sqrt{x-2+1}}=0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left(x^2+3x+2-\dfrac{4}{\sqrt{x-2+1}}\right)=0 \qquad (2)$

Ta có $x \ge 2$ thì: $\begin{cases} x^2+3x+2 \ge 12 \\ \sqrt{x-2}+1 \ge 1 \Rightarrow \dfrac{4}{\sqrt{x-2+1}} \le 4 \end{cases} \Rightarrow x^2+3x+2-\dfrac{4}{\sqrt{x-2+1}}>0$.

Do đó từ (2) ta có : $x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=-1$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là: $(x,y)=\{(3;-1);(6;0)\}$.

Ví dụ 15: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{7x-5y}-\sqrt{3y-x}=2 \\ 8\sqrt{3y-x}=x^2-y^2+56x-44y-8 \end{cases} \quad (x,y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với phương trình này ta dễ nhận thấy cả hai phương trình trong hệ đều chứa $\sqrt{3y-x}$ nên ta nghĩ đến việc thế $\sqrt{3x-y}$ theo một đại lượng nào đó vào một trong hai phương trình trong hệ. Tuy nhiên phương trình thứ hai trong hệ có cấu trúc phức tạp, còn phương trình thứ nhất ở dạng phương trình căn thức cơ bản nên ta sẽ biến đổi phương trình thứ nhất trong hệ bằng kĩ năng nâng lũy thừa để giải quyết.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi trở thành phương trình :

$2\sqrt{7x-5y}=2+\sqrt{3y-x} \Leftrightarrow 4\sqrt{3y-x}=29x-23y-4$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$2(29x-23y-4)=x^2-y^2+56x-44y-8$

$\Leftrightarrow x^2-y^2-2x+2y=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-2)=0$.

Và tới đây xem như hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện: $\begin{cases} 7x-5y \ge 0 \\ 3y-x \ge 0 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$2\sqrt{7y-5x}=2+\sqrt{3y-x} \Leftrightarrow 4(7y-5x)=4+3y-x+4\sqrt{3y-x}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{3y-x}=29x-23y-4$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$2(29x-23y-4)=x^2-y^2+56x-44y-8$

$\Leftrightarrow x^2-y^2-2x+2y=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ y=2-x \end{array}\right.$.

⊕ Với $x = y$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$2\sqrt{2y} = 3y - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 \ge 0 \\ 9y^2 - 20y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{2}{9} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2.$$

⊕ Với $y = 2 - x$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$2\sqrt{6 - 4x} = 26x - 25 \Leftrightarrow \begin{cases} 26x - 25 \ge 0 \\ 676x^2 - 1284x + 601 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{25}{26} \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{321 - 8\sqrt{23}}{338} \\ x = \dfrac{321 + 8\sqrt{23}}{338} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{321 + 8\sqrt{23}}{338} \Rightarrow y = \frac{355 - 8\sqrt{23}}{338}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là :

$$(x, y) = \left\{(2; 2); \left(\frac{321 + 8\sqrt{23}}{338}; \frac{355 - 8\sqrt{23}}{338}\right)\right\}.$$

Bình luận : Trên quy tắc chung, thường những hệ căn thức có một đại lượng chung và cho ta các phép biến đổi cơ bản thì có thể sử dụng nâng lũy thừa đưa về phương pháp thế để giải vẫn cho lời giải tốt và tự nhiên hơn phép đặt ẩn phụ.

II. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH NHÂN TỬ.

Trong đề mục này, chúng ta sẽ tìm hiểu phương pháp giải hệ phương trình có dạng :

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \text{ với } f(x, y) = h_1(x, y) \cdot h_2(x, y).$$

Từ đây ta đưa về giải hệ sau : $\begin{cases} h_1(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} h_2(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$.

Giải hệ bằng phương pháp phân tích nhân tử là một kỹ thuật có tính phát triển nâng cao dựa trên nền tảng của kỹ thuật giải hê bằng phương pháp thế.

Đối với hệ giải bằng phương pháp này chúng ta có rất nhiều ứng dụng và các bài toán khai thác về nó cũng rất đa dạng. Nó là sự kết hợp của hai kỹ năng chính sau đây :

- *Kỹ năng phân tích nhân tử.*

- *Kỹ năng giải phương trình hữu tỉ, phân thức, căn thức.*

Chính từ hai yếu tố này nên để giải tốt bài toán hệ phương trình chúng ta cần xử lý các kỹ năng nhóm nhân tử một cách thuần thục và kỹ năng giải các phương trình từ cơ bản đến nâng cao một cách nhuần nhuyễn.

1) *Các yếu tố và dấu hiệu nhận biết một phương trình trong hệ tách được nhân tử.*

a. *Phương trình trong hệ có dáng dấp là một phương bậc hai có Delta là một số chính phương (có thể gặp một phương trình trùng phương hoặc có một phép biến đổi thường dùng là sử dụng phép nâng lũy thừa, phương trình bậc ba có thể đoán được nghiệm).*

b. *Phương trình trong hệ có dáng dấp đẳng cấp.*

c. *Phương trình trong hệ có dáng dấp có thể sắp xếp các hạng tử đồng bậc để nhóm nhân tử.*

d. *Phương trình có dáng dấp của hằng đẳng thức trực tiếp hoặc gián tiếp thông qua phép nâng lũy thừa.*

e. *Phương trình có yếu tố nhân tử chung qua việc khử liên hợp.*

f. *Phương trình có tính đối xứng giữa hai biến (một điểm mạnh của dạng này là giải hệ bằng phương pháp đánh giá sử dụng hàm đại diện cho những phương trình có cấu trúc phức tạp sau này chúng ta sẽ đề cập kỹ hơn).*

2) *Các kỹ năng giải phương trình còn lại sau khi nhóm nhân tử.*

a. *Một số kỹ năng giải phương trình hữu tỉ, phân thức cơ bản.*

b. *Một số kỹ năng giải phương trình chứa căn thức như*

⊕ *Sử dụng phép nâng lũy thừa.*

⊕ *Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.*

⊕ *Sử dụng phương pháp hằng đẳng thức.*

⊕ *Sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp.*

⊕ *Sử dụng phương pháp hàm số và một số đánh giá cơ bản.*

Bởi vì đặc tính đa dạng của loại hệ này, chúng tôi không thể phân chia rõ ràng các định dạng hệ. Do đó chúng tôi sẽ sắp xếp có tính tương đối cho mỗi kỹ thuật trong sự tính toán có chủ quan của chúng tôi.

* Hệ phương trình có chứa một phương trình mang dáng dấp của một phương trình bậc hai có Delta chính phương hoặc phương trình bậc ba đoán được nghiệm.

- **Cách xử lí : *Có hai trường hợp chính để gặp.***

⊕ *Trường hợp 1 : Phương trình là dạng phương trình bậc hai theo một biến mà ta xác định được nghiệm một cách cụ thể là các hệ số.*

⊕ *Trường hợp 2: Phương trình là dạng phương trình bậc 2 hai ẩn mà trong đó ta cố định theo một biến còn biến còn lại được xem là tham số.*

⊕ *Chú ý ở trường hợp 2 chúng ta không dự đoán một cách mò mẫm được mà chúng ta cần lưu ý là để một phương trình bậc hai hai ẩn có thể tách nhân tử ta cần ghi nhớ tính chất sau :*

" $F(x,y)=0 \Leftrightarrow h_1(x,y)\cdot h_2(x,y)=0$ *sẽ đúng với* $\forall x,y\in\mathbb{R}$ ".

Tính chất này được hiểu nôm na là ta chỉ cần cho x *một giá trị nào đó thỏa các điều kiện của hệ mà giá trị đó cho được giá trị của* y *thì chúng ta mới có thể tiến hành tách nhân tử. Tính chất này đặc biệt hiệu quả khi mà hệ cấu tạo bởi hai phương trình bậc hai hai ẩn mà hình thức tương tự nhau trong đó chỉ có một phương trình tách được nhân tử.*

Tuy nhiên trên thực tế, là không phải đa thức nào đủ điều kiện tách nhân tử thì sẽ có được delta chính phương nên để việc sử dụng được delta chính phương thì ngoài việc đa thức đó đủ điều kiện tách nhân tử thì chúng ta cần có thêm chữ "hy vọng" trong lúc tư duy.

Ví dụ 1 : Giải hệ phương trình $\begin{cases}(xy+2)^2=7xy+2\\(xy^2-3)^4+(xy^2-5)^4=82\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Phân tích : Không quá khó để thấy hệ phương trình có phương trình thứ nhất là bậc hai theo biến xy nên ta có thể biến đổi trực tiếp phương trình này ta có :

$$(xy+2)^2=7xy+2 \Leftrightarrow (xy)^2-3xy+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}xy=1\\xy=2\end{array}\right..$$

Tới đây ta thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta sẽ được phương trình theo biến y.

Lời giải : Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$$(xy+2)^2=7xy+2 \Leftrightarrow (xy)^2-3xy+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}xy=1\\xy=2\end{array}\right..$$

⊕ Với $xy=1$ ta thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$(y-3)^4+(y-5)^4=82 \quad (1)$$

Đặt $y=t+4$ thay vào phương trình (1) ta thu được phương trình :

$$(t+1)^4+(t-1)^4=82$$

$$\Leftrightarrow t^4+4t^3+6t^2+4t+1+t^4-4t^3+6t^2-4t+1=82 \Leftrightarrow t^4+6t^2-40=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t^2=4\\t^2=-10(l)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2\Rightarrow y=6\Rightarrow x=\dfrac{1}{6}\\t=-2\Rightarrow y=2\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

⊕ Với $xy = 2$ ta thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$(2y-3)^4+(2y-5)^4=82 \Leftrightarrow \left(y-\frac{3}{2}\right)^4+\left(y-\frac{5}{2}\right)^4=\frac{41}{8}\ \ (2)$$

Đặt $y = t + 2$ thay vào phương trình (2) ta thu được phương trình :

$$\left(t+\frac{1}{2}\right)^4+\left(t-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{41}{8}$$

$$\Leftrightarrow t^4+2t^3+t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{16}+t^4-2t^3+t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{16}=\frac{41}{8} \Leftrightarrow 2t^4+2t^2-5=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2=\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2} \\ t^2=-\dfrac{1+\sqrt{11}}{2}(l) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}} \Rightarrow y=\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}}+2 \Rightarrow x=\dfrac{4}{4+\sqrt{2\sqrt{11}-2}} \\ t=-\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}} \Rightarrow y=-\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}}+2 \Rightarrow x=\dfrac{4}{4-\sqrt{2\sqrt{11}-2}} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm :

$$(x;y)=\left\{\left(\frac{1}{6};6\right);\left(\frac{1}{2};2\right)\left(\frac{4}{4+\sqrt{2\sqrt{11}+2}};\frac{4+\sqrt{2\sqrt{11}-2}}{2}\right);\left(\frac{4}{4-\sqrt{2\sqrt{11}-2}};\frac{4-\sqrt{2\sqrt{11}-2}}{2}\right)\right\}$$

Bình luận : Ở hệ trên khi sử dụng phép thế ta gặp phương trình :

$$(x-a)^4+(x-b)^4=c.$$

Để giải phương trình này ta sử dụng phép đặt : $x=t+\dfrac{a+b}{2}$.

Ví dụ 2:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3-8=(x+y)(-x+y(-1-3x)+2) \\ x^2+\dfrac{16(2-y)^2}{(2y+3x)^2}=20 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Quan sát hệ phương trình đang xét, ta cảm nhận được ngay chúng ta không thể khai thác gì từ phương trình thứ hai trong hệ.

Mặt khác đối với phương trình thứ nhất hãy để ý tới các đại lượng sau đây :

$x^3+y^3,\ (x+y)(-3xy)$

ta cảm nhận được ngay mối quan hệ của chúng thông qua một hằng đẳng thức :

$$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$$

Từ đây ta biến đổi phương trình thứ nhất trong hệ về dạng :

$$x^3+y^3+3xy(x+y)=-(x+y)^2+2(x+y)+8$$

$\Leftrightarrow (x+y)^3+(x+y)^2-2(x+y)-8=0$

Phương trình cuối thu được là một phương bậc ba với biến $x+y$ và có một nghiệm duy nhất $x+y=2$, nên ta đã có thể rút y theo x và thế vào phương trình thứ hai đã hoàn toàn giải quyết được.

Lời giải : Điều kiện : $2y+3x\neq 0$.

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta biến đổi về phương trình :

$x^3+y^3+3xy(x+y)=-(x+y)^2+2(x+y)+8$

$\Leftrightarrow (x+y)^3+(x+y)^2-2(x+y)-8=0$

$\Leftrightarrow (x+y-2)\left((x+y)^2+3(x+y)+4\right)=0 \Leftrightarrow y=2-x$

Vì $(x+y)^2+3(x+y)+4=0$ (vô nghiệm).

Thay $y=2-x$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$x^2+\frac{16x^2}{(x+4)^2}=20 \Leftrightarrow \left(x-\frac{4x}{x+4}\right)^2+2x\left(\frac{4x}{x+4}\right)=20$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+4}\right)^2+\frac{8x^2}{x+4}-20=0\ (1)$$

Đặt $t=\dfrac{x^2}{x+4}$. Lúc đó phương trình (1) trở thành : $t^2-8t-20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-10 \\ t=2 \end{array}\right.$.

⊕ Với $t=-10 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x+4}=-10 \Leftrightarrow x^2+10x+40=0$ (vô nghiệm)

⊕ Với $t=2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x+4}=2 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \Rightarrow y=-2 \\ x=-2 \Rightarrow y=4 \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là

$(x,y)=\{(4;-2);(-2;4)\}$.

Bình luận : Ở hệ phương trình này, khi thực hiện phép thế ta thu được một dạng phương trình rất quan trọng là: $x^2+\dfrac{a^2x^2}{(x+a)^2}=b$. Để giải phương trình này ta chú ý dấu của giá trị a ở dưới mẫu.

⊕ Với dấu "+" trước a ta có phương trình tương đương với phương trình sau:

$$\left(x-\frac{ax}{x+a}\right)^2+2a\frac{x^2}{x+a}=b \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+a}\right)^2+2a\left(\frac{x^2}{x+a}\right)=b.$$

⊕ Với dấu "−" trước a ta có phương trình tương đương với phương trình sau :

$$\left(x+\frac{ax}{x-a}\right)^2+2a\frac{x^2}{x-a}=b \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-a}\right)^2+2a\left(\frac{x^2}{x-a}\right)=b.$$

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+1)(x+4y)+4y(y+1)=5-3x\\ \sqrt{y+4}\left(1+y\sqrt{y+4}\right)=2\sqrt{x+y}-y\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, rõ ràng phương trình thứ hai trong hệ sẽ không cho chúng ta khai thác được gì ? Nên mọi trọng tâm của đường hướng giải quyết hệ này sẽ chuyển giao cho phương trình thứ nhất trong hệ.

Phương trình thứ nhất trong hệ có chứa những tích nhưng không giúp cho chúng ta thấy được điều gì nên ta sẽ nhân phân phối để tìm được mối quan hệ giữa hai biến x và y.

Cụ thể ta có: $(x+1)(x+4y)+4y(y+1)=5-3x \Leftrightarrow x^2+4xy+4x+8y+4y^2-5=0$

Với phương trình vừa biến đổi ta có nhận xét đây là phương trình bậc hai hai ẩn và không khó để nhận thấy nó chứa hằng đẳng thức. Thật vậy ta có :

$x^2+4xy+4x+8y+4y^2-5=0 \Leftrightarrow (x+2y)^2+4(x+2y)-5=0$

Phương trình cuối thu được là một phương trình bậc hai theo biến $x+2y$ nên ta đã có mối quan hệ giữa x, y.

Vậy xem như hệ đã được giải quyết tốt.

Lời giải : Điều kiện: $\begin{cases}y\ge -4\\ x+y\ge 0\end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất trong hệ biến đổi ta có :

$(x+1)(x+4y)+4y(y+1)=5-3x \Leftrightarrow x^2+4xy+4x+8y+4y^2-5=0$

$\Leftrightarrow (x+2y)^2+4(x+2y)-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+2y=1\\ x+2y=-5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1-2y\\ x=-5-2y\end{array}\right.$

⊕ Với $x=-5-2y$ thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta có :

$\sqrt{y+4}\left(1+y\sqrt{y+4}\right)=2\sqrt{-y-5}-y$ (1).

Ta có điều kiện để giải phương trình này là : $\begin{cases}y+4\ge 0\\ -y-5\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y\ge -4\\ y\le -5\end{cases}$ (vô lí).

Như vậy phương trình (1) vô nghiệm.

⊕ Với $x=1-2y$ thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta có :

$\sqrt{y+4}\left(1+y\sqrt{y+4}\right)=2\sqrt{1-y}-y \Leftrightarrow \sqrt{y+4}-2\sqrt{1-y}+y(y+5)=0$ (2)

Điều kiện : $-4\le y\le 1$.

Lúc đó ta biến đổi phương trình (2) được biến đổi tương đương với phương trình: $\frac{y+4-4(1-y)}{\sqrt{y+4}+2\sqrt{1-y}}+y(y+5)=0 \Leftrightarrow y\left(\frac{5}{\sqrt{y+4}+2\sqrt{1-y}}+y+5\right)=0$ (3)

Với $-4 \le y \le 1$ ta có $\frac{5}{\sqrt{y+4}+2\sqrt{1-y}}+y+5>0$.

Do đó từ (3) ta có $y=0 \Rightarrow x=1$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x;y)=(1;0)$.

Bình luận: Ở phương trình (1) chúng ta sử dụng phương pháp điều kiện xác định để giải phương trình, còn ở phương trình (2) ta sử dụng phương pháp nhân liên hiệp để giải phương trình.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2+x\sqrt{\frac{2(y^2+3)}{x}}=3(4x-1) \\ \sqrt[3]{y^2-7x+27}+\sqrt{12-x}=2(8x-y^2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này chắc chắn mọi biến đổi có thể giải quyết được hệ là chúng ta cần quan tâm tới phương trình thứ nhất trong hệ.

Với phương trình thứ nhất trong hệ ta quan tâm để ý ngoài căn và trong căn đều chứa đại lượng y^2+3.

Do đó ta biến đổi bước đầu phương trình thứ nhất trong hệ trở thành phương trình : $y^2+3+x\sqrt{\frac{2(y^2+3)}{x}}=12x$

Tiếp theo ta để ý trong căn có dạng phân thức $\frac{2(y^2+3)}{x}$ và bên phải có đại lượng $12x$ nên ta nghĩ đến việc chia hai vế phương trình cho x (xem như phân số có nghĩa).

Khi đó ta có phương trình mới biến đổi trở thành phương trình :

$$\frac{y^2+3}{x}+\sqrt{\frac{2(y^2+3)}{x}}-12=0.$$

Tới đây ta lại tiếp tục để ý rằng đại lượng y^2+3 trong căn có chứa số 2 nhưng ngoài căn thì không do đó ta sẽ làm mất số 2 trên tử trong căn bằng phép biến đổi sau :

$$\frac{y^2+3}{x}+2\sqrt{\frac{y^2+3}{2x}}-12=0 \Leftrightarrow \frac{y^2+3}{2x}+\sqrt{\frac{y^2+3}{2x}}-6=0$$

Như vậy phương trình thứ nhất chính là phương trình bậc hai với biến $\sqrt{\dfrac{y^2+3}{2x}}$ và mọi thứ đã trở nên rõ ràng. Vậy hệ xem như đã có hướng giải quyết tốt.

Lời giải : Điều kiện : $0 < x \le 12$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$\frac{y^2+3}{x} + 2\sqrt{\frac{y^2+3}{2x}} - 12 = 0 \Leftrightarrow \frac{y^2+3}{2x} + \sqrt{\frac{y^2+3}{2x}} - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{y^2+3}{2x}} - 2\right)\left(\sqrt{\frac{y^2+3}{2x}} + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y^2+3}{2x}} - 2 = 0 \text{ do } \sqrt{\frac{y^2+3}{2x}} + 3 > 0,\ x \in (0;12]$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2+3}{2x} = 4 \Leftrightarrow y^2 = 8x - 3$$

Thay $y^2 = 8x - 3$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$\sqrt[3]{x+24} + \sqrt{12-x} = 6 \quad (1)$.

Phương trình (1) là phương trình cơ bản có rất nhiều cách giải, ở đây chúng tôi trình bày ba cách giải quyết cho phương trình này để bạn đọc tham khảo cũng như tích lũy thêm cho mình kiến thức để giải quyết kiểu phương trình $\sqrt[3]{a+f(x)} + \sqrt{b+g(x)} = c$ với a, b, c là các hằng số.

⊕ Cách 1 : Sử dụng đặt ẩn phụ kiểu 1 .

Đặt $t = \sqrt[3]{x+24}$.

Ta có : $x = t^3 - 24$.

Lúc đó (1) trở thành :

$$\sqrt{36-t^3} = 6 - t \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - t \ge 0 \\ 36 - t^3 = (6-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \le 6 \\ t\left(t^2 + t - 12\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \le 6 \\ \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -4 \\ t = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -4 \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x+24} = 0 \\ \sqrt[3]{x+24} = -4 \\ \sqrt[3]{x+24} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -24 \\ x = -88 \\ x = 3 \end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện ta có : $x = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{21}$.

⊕ Cách 2 : Sử dụng ẩn phụ kiểu 2.

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{12-x} \\ b = \sqrt[3]{x+24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ x = 12 - a^2 \\ x = b^3 - 24 \end{cases} \Rightarrow b^3 + a^2 = 36.$$

Kết hợp với (1) ta có hệ phương trình : $\begin{cases} a+b=6 \\ b^3+a^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6-b \\ b^3+(6-b)^2=36 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=6-b \\ b\left(b^2+b-12\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6-b \\ \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-4 \\ b=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=6 \\ a=10 \\ a=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{12-x}=6 \\ \sqrt{12-x}=10 \\ \sqrt{12-x}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-24 \\ x=-88 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có : $x=3 \Rightarrow y=\pm\sqrt{21}$.

⊕ Cách 3 : Sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp.

Ta có $(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+24}-3\right)+\left(\sqrt{12-x}-3\right)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt[3]{(x+24)^2}+3\sqrt[3]{x+24}+9}+\frac{3-x}{\sqrt{12-x}+3}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\sqrt{12-x}-\sqrt[3]{(x+24)^2}-3\sqrt[3]{x+24}-6\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \sqrt{12-x}-\sqrt[3]{(x+24)^2}-3\sqrt[3]{x+24}-6=0(2) \end{array}\right.$$

Kết hợp (1) và (2) ta có phương trình : $\sqrt[3]{x+24}\left(\sqrt[3]{x+24}+4\right)=0$ vô nghiệm với $x \in (0;12]$

Vậy ta có $x=3 \Rightarrow y=\pm\sqrt{21}$.

Qua ba cách giải và đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left\{\left(3;\sqrt{21}\right);\left(3;-\sqrt{21}\right)\right\}$.

Bình luận : Bài toán này hướng đi xử lí không khó, tuy nhiên mục đích của chúng tôi đưa ra là để các bạn có sự tiếp cận phong phú hơn.

Ví dụ 5 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{2x^2-y^2}=y^2-2x^2+3 \\ x^3-2y^3=y-2x \end{cases}$ $(x,y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này không khó để nhận biết được ngay, phương trình thứ nhất trong hệ là phương trình bậc hai với biến $\sqrt{2x^2-y^2}$.

Thật vậy, ta biến đổi phương trình thứ nhất trong hệ về phương trình sau :

$$2x^2-y^2+2\sqrt{2x-y^2}-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x^2-y^2}=1 \\ \sqrt{2x^2-y^2}=-3 \end{array}\right.$$

Kết hợp nhân tử vừa thu được và phương trình thứ hai trong hệ ta thu được hệ phương trình sau : $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ x^3 - 2y^3 = y - 2x \end{cases}$.

Chắc hẳn các bạn đã nhận ra cách giải hệ này rất quen thuộc rồi. Để giải nó chính là dùng kỹ thuật "thế hằng số tạo sự đồng bậc". Như vậy xem như hệ giải quyết thành công.

Lời giải : Điều kiện : $2x^2 - y^2 \geq 0$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$2x^2 - y^2 + 2\sqrt{2x - y^2} - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x^2 - y^2} = 1 \\ \sqrt{2x^2 - y^2} = -3(1) \end{array}\right.$$

Với $\sqrt{2x^2 - y^2} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - y^2 = 1$. Kết hợp với phương trình thứ hai trong hệ ta thu được hệ phương trình : $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ x^3 - 2y^3 = y - 2x \end{cases}$.

Thế $1 = 2x^2 - y^2$ vào phương trình thứ hai trong hệ mới ta được phương trình :

$$x^3 - 2y^3 = \left(2x^2 - y^2\right)\left(y - 2x\right) \Leftrightarrow 5x^3 - 2x^2y - 2xy^2 - y^3 = 0 \ (1)$$

Không khó để nhận thấy $(x, y) = (x, 0)$ không thỏa hệ.

Với $y \neq 0$ ta biến đổi phương trình (1) về phương trình :

$$5\left(\frac{x}{y}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} - 1\right)\left(5\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{y}\right) + 1\right) = 0$$

$\Leftrightarrow x = y$ do $5\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{y}\right) + 1 = 0$ vô nghiệm.

Với $x = y$ ta có $2x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 1$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \{(1;1);(-1;-1)\}$.

Bình luận: Thông qua các ví dụ 1,2,3,4,5 chúng tôi đưa các bài để các bạn tiếp cận với những hệ cấu tạo có một phương trình tách nhân tử bằng kỹ thuật delta chính phương dưới dạng là phương trình bậc hai một biến mà có nghiệm là các hệ số cụ thể. Ở phần này ngoài cách làm trực tiếp các bạn có thể đặt ẩn phụ để làm giảm đi mức độ rắc rối.

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 17(x - y) = 3xy - 2x^2 - y^2 \\ \sqrt{x + 3} + \sqrt{10 - y} = x^2 - 7y + 11 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Quan sát hệ này ta nhận thấy chỉ có thể xuất phát từ phương trình thứ nhất trong hệ. Tuy nhiên, phương trình thứ nhất trong hệ lúc này ta dễ dàng thấy bậc cao nhất của biến x là 2 và bậc của biến y cũng là bậc 2. Vậy ta có thể đoán được phương trình thứ nhất là phương trình bậc hai hai ẩn x, y.

Ta biến đổi phương trình thứ nhất thành: $2x^2 - 3xy + 17x - 17y + y^2 = 0$.

Không như các ví dụ đã xét ở phương trình chúng ta bắt nhân tử bằng một định dạng phương trình bậc hai có nghiệm là hệ số như các ví dụ khác có chút khó khăn.

Như vậy, lúc này ta tính đến phương án xem phương trình này là phương trình bậc hai theo biến x và y là tham số hoặc ngược lại với hy vọng phương trình này có delta chính phương.

Ta tiếp tục biến đổi phương trình thứ nhất ta có: $2x^2 - (3y - 17)x + y^2 - 17y = 0$

Ta có $\Delta = (3y - 17)^2 - 8(y^2 - 17y) = y^2 + 34y + 289 = (y + 17)^2$.

Điều này đã giúp chúng ta tìm được mối liên hệ giữa hai biến x, y hay nói khác hơn ta đã phân tích được nhân tử.

Việc còn lại là thế vào phương trình thứ hai để giải quyết nghiệm của hệ.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x \ge -3 \\ y \le 10 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ nhất ta biến đổi thành phương trình :

$2x^2 - (3y - 17)x + y^2 - 17y = 0 \qquad (1)$

Xem phương trình (1) là phương trình bậc hai với biến x và y là tham số.

Ta có : $\Delta = (3y - 17)^2 - 8(y^2 - 17y) = y^2 + 34y + 289 = (y + 17)^2$

Do đó phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt :

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3y - 17 + y + 17}{4} \\ x = \dfrac{3y - 17 - y - 17}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ y = 2x + 17 \end{array}\right.$$

Do $x \ge -3 \Leftrightarrow 2x \ge -6 \Leftrightarrow 2x + 17 \ge 11 \Leftrightarrow y \ge 11$ (vô lí). Vậy $y = 2x + 17$ loại.

⊕ Với $x = y$ ta thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$\sqrt{x + 3} + \sqrt{10 - x} = x^2 - 7x + 11 \qquad (1)$.

Lúc này ta có điều kiện cho (1) là $-3 \le x \le 10$.

Khi đó phương trình (1) trở thành :

$x^2 - 7x + 11 - \sqrt{x + 3} - \sqrt{10 - x} = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 35x + 55 - 5\sqrt{x + 3} - 5\sqrt{10 - x} = 0$

$\Leftrightarrow 5(x^2 - 7x + 6) + (x + 9 - 5\sqrt{x + 3}) + (16 - x - 5\sqrt{10 - x}) = 0 \ (2)$

Nhận xét với $-3 \le x \le 10$ ta có : $x+9+5\sqrt{x+3} > 0$; $16-x+5\sqrt{10-x} > 0$ nên ta có (2) được biến đổi tương đương với phương trình sau :

$$5\left(x^2-7x+6\right)+\frac{x^2-7x+6}{x+9+5\sqrt{x+3}}+\frac{x^2-7x+6}{16-x+5\sqrt{10-x}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-7x+6\right)\left(5+\frac{1}{x+9+5\sqrt{x+3}}+\frac{1}{16-x+5\sqrt{10-x}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-7x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=6 \Rightarrow y=6 \end{array}\right.$$

Vì với nhận xét trên ta có : $5+\frac{1}{x+9+5\sqrt{x+3}}+\frac{1}{16-x+5\sqrt{10-x}} > 0$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\{(1;1);(6;6)\}$.

ình luận : Bài toán này có ba điểm chú ý . Chú ý thứ nhất đó là cách sử dụng delta chính phương để giải quyết việc nhân tử chung là một kỹ thuật rất quan trọng, chúng ta sẽ còn gặp nhiều ở những ví dụ sau. Chú ý thứ hai là sử dụng điều kiện để loại bớt đi một nhân tử chung là một việc ít khi được các bạn học sinh để ý. Chú ý thứ ba là chú ý quan trọng trong việc giải phương trình thứ hai khi thay nhân tử.

Chắc các bạn thắc mắc tại sao chúng tôi lại nhân 5 vào phương trình để giải.

Thật chất vấn đề này chính là một kỹ thuật liên hiệp các bạn có thể tìm đọc và hiểu kỹ lưỡng trong cuốn " Phương trình vô tỷ phương pháp suy luận và tư duy" của cùng tác giả.

Ở đây chúng tôi đưa ra lí giải sơ lược như sau :

Bước 1 : Ta đoán được phương trình có hai nghiệm $x=1; x=6$.

Bước 2 : Tìm biểu thức để liên hiệp cho hai căn thức bằng cách thay hai nghiệm để tìm a,b như sau

$$ax+b-\sqrt{x+3}=0 \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ 6a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{5} \\ b=\frac{9}{5} \end{cases}$$

$$ax+b-\sqrt{10-x}=0 \Rightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ 6a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{5} \\ b=\frac{16}{5} \end{cases}$$

Bước 3: Để tránh thực hiện việc xử lí các phân số thì chúng ta nhân 5 vào phương trình để giải quyết bài toán.

Ví dụ 7:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\left(\dfrac{y+1}{x^3}+xy\right)+\dfrac{y^2+2y+7}{x}=x\left(3x^2-2\right) \\ 2\sqrt{x-1}+3x\sqrt{-4-y}=x^2y+72 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Quan sát hệ này, ta thấy cấu trúc hệ khá phức tạp. Ở phương trình thứ hai rõ ràng chúng ta không phân tích được gì? Một lưu ý đáng quan tâm đó trong một hệ thì ít nhất có một phương trình phải biến đổi được để tìm nhân tử để giải quyết vấn đề, tất nhiên không loại trừ trường hợp chúng ta cần kết hợp cả hai phương trình trình trong hệ mới giải quyết được nhân tử.

Tuy nhiên với hệ này sự kết hợp cả hai chỉ làm cho bài toán thêm rối rắm. Do đó buộc chúng ta phải đẩy sự quan tâm của hệ lên phương trình thứ nhất trong hệ.

Ta cần biến đổi phương trình này trước tiên, ta có :

$$2\left(\frac{y+1}{x^3}+xy\right)+\frac{y^2+2y+7}{x}=x\left(3x^2-2\right)$$

$$\Rightarrow 2\left(y+1+x^4y\right)+x^2\left(y^2+2y+7\right)=x^4\left(3x^2-2\right)$$

Quan sát phương trình vừa biến đổi ta nhận thấy bậc cao nhất của x là bậc 6 và có các bậc tiếp theo là bậc 4, bậc 2 nên chúng ta có thể đặt $t=x^2$ để đưa về phương trình bậc ba theo biến t và xem y là tham số, sau đó tiến hành đoán nghiệm và tách nhân tử.

Điều này, xem chừng cũng khả thi nhưng rõ ràng việc đoán nghiệm của phương trình bậc ba có tham số là điều không phải đơn giản. Nếu tinh ý một chút ta thấy trong phương trình vừa biến đổi có hai đại lượng rất đáng quan tâm đó là $y+1$ và đại lượng tiếp theo là $y^2+2y+7=(y+1)^2+6$. Như vậy nếu ta xem $y+1$ là biến và x là tham số thì ta sẽ được phương trình bậc hai theo biến $y+1$. Việc này có thể đơn giản hơn, do đó ta tiếp tục biến đổi phương trình mới theo hướng sau :

$$2\left(y+1+x^4y\right)+x^2\left(y^2+2y+7\right)=x^4\left(3x^2-2\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2(y+1)^2+2\left(x^4+1\right)(y+1)-3x^6+6x^2=0$$

Ta hy vọng phương trình này sẽ có delta là số chính phương.

Cụ thể : $\Delta'=\left(x^4+1\right)^2+x^2\left(3x^6-6x^2\right)=\left(2x^4-1\right)^2$.

Kết quả này, rõ ràng là xem như nút thắt của bài toán được gỡ và hệ đã có thể giải quyết được.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \le -4 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$2\left(y+1+x^4y\right)+x^2\left(y^2+2y+7\right)=x^4\left(3x^2-2\right)$

$\Leftrightarrow x^2(y+1)^2+2\left(x^4+1\right)(y+1)-3x^6+6x^2=0$ (1)

Xem phương trình (1) là phương trình bậc hai theo biến $y+1$ ta có :

$\Delta'=\left(x^4+1\right)^2+x^2\left(3x^6-6x^2\right)=\left(2x^4-1\right)^2$.

Do đó phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt :

$$\left[\begin{array}{l} y+1=\dfrac{-\left(x^4+1\right)+2x^4-1}{x^2} \\ y+1=\dfrac{-\left(x^4+1\right)-2x^4+1}{x^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{x^4-2}{x^2}-1 \\ y=-3x^2-1 \end{array}\right.$$

⊕ Với $y=-3x^2-1$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$2\sqrt{x-1}+3x\sqrt{3x^2-3}=x^2\left(-3x^2-1\right)+72$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}+3x\sqrt{3x^2-3}+3x^4+x^2-72=0$ (2)

- Cách 1: Sử dụng hàm số.

Xét hàm số $f(x)=2\sqrt{x-1}+3x\sqrt{3x^2-3}+3x^4+x^2-72$, $\forall x \ge 1$.

Ta có : $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{9x^2}{\sqrt{3x^2-3}}+12x^3+2x>0$, $\forall x>1$.

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên nữa khoảng $[1;+\infty)$. Do đó phương trình $f(x)=0$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Mặt khác ta có : $f(2)=0 \Leftrightarrow x=2$ là nghiệm của phương trình $f(x)=0$. Suy ra $y=-13$.

- Cách 2 : Sử dụng phép nhân liên hiệp.

Ta có (2) $\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x-1}-1\right)+3x\left(\sqrt{3x^2-3}-3\right)+3x^4+x^2+9x-70=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}\right)+9x\left(\dfrac{x^2-4}{\sqrt{3x^2-3}+3}\right)+(x-2)\left(3x^3+6x^2+13x+35\right)=0$

$$\Leftrightarrow (x-2)\underbrace{\left(\frac{2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{9x(x+2)}{\sqrt{3x^2-3}+3}+3x^3+6x^2+13x+35\right)}_{T}=0\ (3)$$

Nhận xét $x \geq 1 \Rightarrow T > 0$. Do đó $(3) \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -13$.

⊕ Với $y = \frac{x^4-2}{x^2} - 1$. Do $x \geq 1$ ta luôn có : $y \geq -2$.

Thật vậy: $\frac{x^4-2}{x^2} - 1 \geq -2 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+2) \geq 0$ luôn đúng $\forall x \geq 1$.

Do đó từ điều kiện ta lại có: $\begin{cases} y \leq -4 \\ y \geq -2 \end{cases}$ (vô lí). Nên $y = \frac{x^4-2}{x^2} - 1$ loại.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y) = (2;-13)$.

Bình luận : Qua việc phân tích nhân tử của phương trình thứ nhất trong hệ ta rõ ràng nhận thấy hướng phân tích ban đầu hoàn toàn chính xác, vì nếu đoán nghiệm x theo y thì nghiệm sẽ biểu diễn dưới dạng căn thức rất phức tạp. Ở nhân tử thứ hai chúng ta lại một lần nữa sử dụng điều kiện ban đầu của hệ để loại thông qua hình thức đánh giá chặt lại miền giá trị của y khi $x \geq 1$. Đánh giá này có được có thể sử dụng bằng hai cách đơn giản, cách thứ nhất ta thế một vài giá trị của x trên nữa khoảng $[1;+\infty)$ hoặc cách thứ hai là xét hàm số đó trên nữa khoảng $[1;+\infty)$ thì ta sẽ được điều đã giải trong bài toán.

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x+21)+y(x-33)=2(y^2+50) \\ \sqrt{x+2}+2\sqrt{y+11}=\sqrt{(4y-x+14)^3} \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Cũng giống như các ví dụ trước đó, ở phương trình này chúng ta cũng sẽ bắt đầu từ phương trình thứ nhất trong hệ.

Phương trình thứ nhất trong hệ ta biến đổi thành :

$x^2+(y+21)x-2y^2-33y-100=0$

Phương trình này có $\Delta = (y+21)^2 + 4(2y^2+33y+100) = (3y+29)^2$.

Như vậy xem như ta đã thành công trong việc tách nhân tử.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq -11 \\ 4y-x+14 \geq 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành :

$x^2+(y+21)x-2y^2-33y-100=0\ (1)$

Phương trình (1) có $\Delta=(y+21)^2+4(2y^2+33y+100)=(3y+29)^2$.

Suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt :

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-y-21+3y+29}{2}=y+4 \\ x=\dfrac{-y-21-3y-29}{2}=-2y-25 \end{array}\right.$$

⊕ Với $x+2y+25=0$.

Do $\begin{cases} x\ge -2 \\ y\ge -11 \end{cases}\Rightarrow x+2y+25\ge 1$ nên $x+2y+9=0$ loại.

Đ Với $y=x-4$ ta có phương trình thứ hai được biến đổi trở thành:

$\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+7}=\sqrt{(3x-2)^3}$ (2)

Điều kiện cho (2) là $x\ge\dfrac{2}{3}$.

Bình phương hai vế phương trình (2) ta được phương trình tương đương sau :

$5x+30+4\sqrt{x^2+9x+14}=27x^3-54x^2+36x-8$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+9x+14}=27x^3-54x+31x-38$

$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x^2+9x+14}-6\right)=27x^3-54x^2+31x-62$

$\Leftrightarrow 4\left(\dfrac{(x-2)(x+11)}{\sqrt{x^2+9x+14+6}}\right)=(x-2)(27x^2+31)$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{4x+44}{\sqrt{x^2+9x+14+6}}-27x^2-31\right)=0$ (3)

Nhận xét với $x\ge\dfrac{2}{3}$ ta luôn có : $\dfrac{4x+44}{\sqrt{x^2+9x+14+6}}<5$ $(*)$.

Thật vậy ta có:

$(*)\Leftrightarrow 4x+14<5\sqrt{x^2+9x+14}\Leftrightarrow 9x^2+113x+154>0$

$\Leftrightarrow (9x+14)(x+11)>0$ (luôn đúng).

Vậy ta có : $\dfrac{4x+44}{\sqrt{x^2+9x+11+6}}-27x^2-31<5-12-31=-24<0$ với $x\ge\dfrac{2}{3}$.

Do đó từ (3) ta có: $x-2=0\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=-2$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x;y)=(2;-2)$.

Ví dụ 9:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2\left(y^2+2x^2\right)-x\left(y^2+1\right)-1=2x\left(x^2+x\right) \\ 8\left(x^2-6y^2+14\right)=3\left(\dfrac{1}{\sqrt{3x-11}}-\dfrac{1}{\sqrt{y^2-4}}\right) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích: Quan sát hệ phương trình ta nhận thấy phương trình thứ hai khá cồng kềnh và các mối liên quan để tìm ra nhân tử là rất khó. Ở phương trình thứ nhất ta để ý tới biến y có hai bậc quan trọng là 4 và 2 nên ta định hướng phương trình thứ nhất là phương trình trùng phương với biến y.

Ta có phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình :

$y^4+\left(2x^2-x\right)y^2-2x^3-2x^2-x-1=0$

Phương trình này có: $\Delta=\left(2x^2-x\right)^2+4\left(2x^3+2x^2+x+1\right)=\left(2x^2+x+2\right)^2$.

Như vậy xem tới đây ta bắt được nhân tử: $y^2=x+1 \vee y^2=-2x^2-1$.

Với $y^2=x+1$ ta có phương trình thứ hai được viết lại :

$$8x^2-48x+64-3\left(\frac{1}{\sqrt{3x-11}}-\frac{1}{\sqrt{x-3}}\right)=0 \qquad (1)$$

Ta để ý trong (1) ta có: $3x-11=(3x-8)-3$.

Vậy ta hy vọng tách được $8x^2-48x+64=m(3x-8)^2+nx^2$.

Khai triển và đồng nhất hệ số ta sẽ có được : $m=1; n=-1$.

Vậy lúc này (1) trở thành : $(3x-8)^2-\dfrac{3}{\sqrt{(3x-8)-3}}=x^2-\dfrac{3}{\sqrt{x-3}}$.

Với dáng điệu của phương trình mới ta biết ngay để giải chúng ta sử dụng phương pháp hàm số chọn hàm đại diện.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x>\dfrac{11}{3} \\ y<-2 \vee y>2 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$y^4+\left(2x^2-x\right)y^2-2x^3-2x^2-x-1=0 \qquad (*)$$

Ta có (*) có : $\Delta=\left(2x^2-x\right)^2+4\left(2x^3+2x^2+x+1\right)=\left(2x^2+x+2\right)^2$

Suy ra (*) có hai nghiệm phân biệt : $\left[\begin{array}{l} y^2=\dfrac{-2x^2+x+2x^2+x+2}{2}=x+1 \\ y^2=\dfrac{-2x^2+x-2x^2-x-2}{2}=-2x^2-1 \end{array}\right.$

Ta có $y^2 = -2x^2 - 1 < 0$ vô lí.

Với $y^2 = x + 1$ ta có phương trình thứ hai được viết lại :

$$8x^2 - 48x + 64 - 3\left(\frac{1}{\sqrt{3x-11}} - \frac{1}{\sqrt{x-3}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-8)^2 - \frac{3}{\sqrt{(3x-8)-3}} = x^2 - \frac{3}{\sqrt{x-3}} \ (2)$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - \frac{3}{\sqrt{t-3}}, \forall t > 3$.

Ta có : $f'(t) = 2t + \frac{3}{2\sqrt{(t-3)^3}} > 0, \forall t > 3$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Vậy từ (2) ta có : $f(3x-8) = f(x) \Leftrightarrow 3x - 8 = x \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{5}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là

$(x;y) = \left\{\left(4;\sqrt{5}\right);\left(4;-\sqrt{5}\right)\right\}$.

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 10xy + 3x - 5y + 9 = 0 \\ x^2 - 2y^2 - xy + x + 7y - 6 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

Phân tích: Không khó để nhận thấy cả hai phương trình trong hệ đều là phương trình bậc hai hai ẩn và có định dạng cấu trúc hệ có hình thức tương tự lẫn nhau. Lúc này chúng ta sẽ áp dụng chú ý trong trường hợp 2 ở phần đầu chúng tôi đã nhắc đến.

Cho $x = 0$ phương trình thứ nhất trở thành : $2y^2 - 5y + 9 = 0$ vô nghiệm.

Cho $x = 0$ phương trình thứ hai trở thành : $2y^2 - 7y + 6 = 0$ (có nghiệm).

Do đó trong hai phương trình đề bài cho nếu phương trình nào tách được nhân tử thì đó chính là phương trình thứ hai trong hệ.

Thật vậy ta có phương trình thứ hai được biến đổi thành phương trình :

$$x^2 - (y-1)x - 2y^2 + 7y - 6 = 0$$

Phương trình này có $\Delta = (y-1)^2 + 4\left(2y^2 - 7y + 6\right) = (3y-5)^2$.

Tới đây mọi thứ đã được rõ ràng. Vậy xem như hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Phương trình thứ hai trong hệ biến đổi trở thành phương trình :

$$x^2 - (y-1)x - 2y^2 + 7y - 6 = 0 \ (1)$$

Phương trình (1) có $\Delta = (y-1)^2 + 4\left(2y^2 - 7y + 6\right) = (3y-5)^2$.

Suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt : $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{y-1+3y-5}{2} = 2y-3 \\ x = \dfrac{y-1-3y+5}{2} = -y+2 \end{array}\right.$.

⊕ Với $x = -y+2$ thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có phương trình :

$$(2-y)^2 + 2y^2 - 10(2-y)y + 3(2-y) - 5y + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 13y^2 - 32y + 19 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = \dfrac{19}{13} \Rightarrow x = \dfrac{7}{13} \end{array}\right.$$

⊕ Với $x = 2y-3$ thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có phương trình :

$$(2y-3)^2 + 2y^2 - 10(2y-3)y - 3(2y-3) - 5y + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 14y^2 - 7y - 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{7-\sqrt{1561}}{28} \Rightarrow x = \dfrac{-35-\sqrt{1561}}{14} \\ y = \dfrac{7+\sqrt{1561}}{28} \Rightarrow x = \dfrac{-35+\sqrt{1561}}{14} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là :

$$(x,y) = \left\{(1;1);\left(\frac{7}{13};\frac{19}{13}\right);\left(\frac{-35-\sqrt{1561}}{14};\frac{7-\sqrt{1065}}{28}\right);\left(\frac{-35+\sqrt{1561}}{14};\frac{7+\sqrt{1065}}{28}\right)\right\}$$

Bình luận : Đây là bài toán dạng đặc biệt của hệ phương trình bậc hai tổng quát. Hệ này chúng ta sẽ có một phần riêng về tổng quan phương pháp giải hệ này. Một phương pháp rất thú vị quanh loại hệ này với nhiều kỳ thuật hay.

Ví dụ 11:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + 6 = 2\sqrt{(2y-x)(x+4)} \\ 2\left(x\sqrt{5x-y+3} - 5\right) = \dfrac{12(y-x)}{x^3+4} - \sqrt{y-4} \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, ta nhận thấy cả hai phương trình trong hệ đều chứa căn thức. Dấu hiệu phân tích được ở phương trình thứ hai trong hệ thật sự là không khả quan. Do đó chúng ta chuyển trọng tâm lên phương trình thứ nhất trong hệ.

Phương trình thứ nhất trong hệ có dạng cơ bản : $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

Nên ta có thể sử dụng phép nâng lũy thừa để làm mất căn thức và một nhận xét nữa là khi lũy thừa lên ta chỉ có bậc cao nhất của biến x, y là bậc 2 nên ta sẽ hy vọng phân tích được nhân tử nhờ vào delta chính phương.

Ta có phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình :

$$(x+y+6)^2 = 4(2y-x)(x+4) \Leftrightarrow y^2 - 2(3x+10)y + 5x^2 + 28x + 36 = 0.$$

Không khó để kiểm tra được phương trình này tách được nhân tử nên ta tiến hành tính : $\Delta' = (3x+10)^2 - (5x^2+28x+36) = (2x+8)^2$.

Từ nhận xét này phương trình thứ nhất sẽ có hai nhân tử: $y = x+2 \vee y = 5x+18$

Tới đây hãy để ý trong phương trình thứ hai trong hệ ta có :

$5x - y + 3 \ge 0 \Leftrightarrow y - 5x \le 3$.

Nên ta sẽ loại đi nhân tử $y - 5x = 18$. Vậy chỉ là thế nhân tử còn lại vào phương trình thứ hai để giải quyết bài toán.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}(2x-y)(x+4) \ge 0\\ 5x - y + 3 \ge 0\\ y \ge 4\\ x \ne \sqrt[3]{4}\end{cases}$.

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$$x + y + 6 = 2\sqrt{(2x-y)(x+4)} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \ge -6\\ (x+y+6)^2 = 4(2x-y)(x+4) \quad (1)\end{cases}$$

Ta có (1) được biến đổi thành : $y^2 - 2(3x+10)y + 5x^2 + 28x + 36 = 0$ $(*)$.

Từ $(*)$ ta có : $\Delta' = (3x+10)^2 - (5x^2+28x+36) = (2x+8)^2$.

Do đó $(*)$ có hai nghiệm phân biệt : $\left[\begin{array}{l} y = x+2\\ y = 5x+18\end{array}\right.$.

Vì $5x - y + 3 \ge 0 \Leftrightarrow y - 5x \le 3$ nên ta có : $y - 5x = 18$ loại.

Với $y = x + 2$ phương trình thứ hai trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$2x\sqrt{4x+1} + \sqrt{x-2} - \frac{24}{x^3+4} = 10 \quad (2).$$

Điều kiện cho (2) là $x \ge 2$.

Xét hàm số $f(x) = 2x\sqrt{4x+1} + \sqrt{x-2} - \dfrac{24}{x^3+4}$, $\forall x \ge 2$.

Ta có : $f'(x) = 2\sqrt{4x+1} + \dfrac{4x}{\sqrt{4x+1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} + \dfrac{72x^2}{x^3+4} > 0$, $\forall x > 2$.

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên nữa khoảng $[2;+\infty)$.

Nên phương trình $f(x) = 10$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Mà $f(2) = 10$ nên $x = 2$ là nghiệm của phương trình (2). Với $x = 2 \Rightarrow y = 4$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (2;4)$.

Ví dụ 12:

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2y^2-7y+10-x(y+3)}+\sqrt{y+1}=x+1\\ \sqrt{y+1}+\dfrac{3}{x+1}=x+2y\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, hầu như mỗi phương trình nếu tách riêng biệt để khai thác tìm nhân tử là việc làm không khả thi. Tuy nhiên quan sát hệ ta thấy có hai phương trình đều chứa hai đại lượng $x+1,\sqrt{y+1}$.

Mặt khác ta để ý phương trình thứ nhất chứa dạng :

$\sqrt{f(x)}=g(x)$ với $g(x)=x+1-\sqrt{y+1}$.

Như vậy khi sử dụng phép nâng lũy thì ta sẽ có đại lượng $(x+1)\sqrt{y+1}$.

Đối với phương trình thứ hai trong hệ nếu ta sử dụng phép quy đồng mẫu thì ta thấy cũng đại lượng $(x+1)\sqrt{y+1}$.

Tất cả các nhận xét này dẫn ta đến tư tưởng thực hiện phép thế.

Cụ thể ta thế $(x+1)\sqrt{y+1}=(x+2y)(x+1)-3$ vào phương trình thứ nhất sau khi thực hiện phép lũy thừa ta sẽ có phương trình :

$2y^2-7y+10-x(y+3)=x^2+2x+y+2-2\left[(x+2y)(x+1)-3\right]$

Thu gọn phương trình này ta được : $2y^2-(4-3x)y+x^2-3x+2=0$.

Ta sẽ hy vọng phương trình này có delta chính phương bằng cách kiểm tra xem nó có tách được nhân tử. Và quả thật là nó có thể tách nhân tử.

Cụ thể ta có : $\Delta=(4-3x)^2-8(x^2-3x+2)=x^2$.

Như vậy việc tách nhân tử đã thành công và cũng từ đây xem như ý tưởng giải hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}2y^2-7y+10-x(y+3)\ge 0\\ x+1>0\\ y+1\ge 0\\ x+1-\sqrt{y+1}\ge 0\end{cases}$.

Từ phương trình thứ hai trong hệ ta có : $(x+1)\sqrt{y+1}=(x+2y)(x+1)-3$ (1).

Phương trình thứ hai biến đổi trở thành phương trình :

$\sqrt{2y^2-7y+10-x(y+3)}=x+1-\sqrt{y+1}$

$\Leftrightarrow 2y^2-7y+10-x(y+3)=x^2+2x+2+y-2(x+1)\sqrt{y+1}$ (2)

Thế (1) vào (2) ta có :

$^{2} - 7y + 10 - x(y+3) = x^2 + 2x + y + 2 - 2\left[(x+2y)(x+1) - 3\right]$

$2y^2 - (4-3x)y + x^2 - 3x + 2 = 0$ (3).

rong trình (3) có $\Delta = (4-3x)^2 - 8\left(x^2 - 3x + 2\right) = x^2$.

ra phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt : $\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{4-3x+x}{4} = 1 - \dfrac{1}{2}x \\ y = \dfrac{4-3x-x}{4} = 1 - x \end{array}\right.$.

i $y = 1 - x$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$+1)\sqrt{2-x} = -\left(x^2 - x + 1\right)$ (4).

ận thấy : $(x+1)\sqrt{2-x} \ge 0$; $-\left(x^2 - x + 1\right) < 0$. Do đó (4) vô nghiệm.

i $x = 2 - 2y$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình:

$-2y)\sqrt{y+1} = 3 - 4y \Rightarrow (3-2y)^2(y+1) = (3-4y)^2$

$y\left(4y^2 - 24y + 21\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ 4y^2 - 24y + 21 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \dfrac{6-\sqrt{15}}{2} \\ y = \dfrac{6+\sqrt{15}}{2} \end{array}\right.$

ử lại ta có nghiệm của phương trình là : $\left[\begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow x = 2 \\ y = \dfrac{6+\sqrt{15}}{2} \Rightarrow x = -3 - \sqrt{15} \end{array}\right.$.

ối chiếu điều kiện của hệ ta có nghiệm của hệ phương trình là $(x,y) = (2;0)$.

ệ phương trình có chứa một phương trình mang dáng dấp của phương ình đẳng cấp.

ách xử lí : *Sử dụng cách giải của các phương trình đẳng cấp hoặc nhóm các ạng tử.*

dụ 1:

ải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3y^3 = x^2y + 5xy^2 \\ 2\left(\sqrt{3x} + \sqrt{2y-1}\right) - 7 = 11y + 6\sqrt{y(x-y-1)} \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

ân tích : Từ hệ ta thấy được phương trình thứ nhất trong hệ là một phương trình đẳng cấp bậc ba với biến x, y.

Cũng từ hệ ta thấy hệ không thể có nghiệm dạng $(x,0)$ vì $y \ge \frac{1}{2}$.

Do đó với $y \neq 0$ ta biến đổi phương trình (1) về dạng :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{y}\right) - 3 = 0.$$

Không khó để thấy phương trình này có nghiệm bằng 3. Như vậy hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq \frac{1}{2} \\ x - y \geq 1 \end{cases}$

Do $y \geq \frac{1}{2}$ nên phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{y}\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} - 3\right)\left(\frac{x}{y} + 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3y$$

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình:

$$2\left(3\sqrt{y} + \sqrt{2y-1}\right) = 11y - 7 + 6\sqrt{y(2x-1)}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(3\sqrt{y} + \sqrt{2y-1} - 4\right) = 9y + 6\sqrt{y(2y-1)} + 2y - 1$$

$$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{y} + \sqrt{2y-1}\right)^2 - 2\left(3\sqrt{y} + \sqrt{2y-1}\right) - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\sqrt{y} + \sqrt{2y-1} = 4 \\ 3\sqrt{y} + \sqrt{2y-1} = -2 \end{array}\right.$$

Ta nhận thấy $3\sqrt{y} + \sqrt{2y-1} = -2$ vô lí.

Với $3\sqrt{y} + \sqrt{2y-1} = 4 \Leftrightarrow 11y - 1 + 6\sqrt{y(2y-1)} = 16 \Leftrightarrow 6\sqrt{y(2y-1)} = 17 - 11y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17 - 11y \geq 0 \\ 49y^2 - 338y + 289 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{17}{11} \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = \frac{289}{49} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 3$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là $(x, y) = (3; 1)$.

Ví dụ 2 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)(9x+y) = 5(3x+y)\sqrt{xy} \\ x^2 - 3y^2 + 6x + 5y - 9 = 0 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Quan sát hệ ta nhận thấy hệ có một phương trình dạng bậc hai hai biến x, y nhưng chúng ta nháp một chút thấy ngay được phương trình này không cho được delta chính phương. Như vậy ắt hẳn trong phương trình thứ nhất phải có mối tương quan gì đó để giải quyết phương trình. Còn nếu không tìm được m

liên quan nào từ phương trình thứ nhất buộc ta phải phối hợp hai phương trình lại.

Để ý phương trình thứ nhất trong hệ có chứa $3x, y$, $9x^2, y^2$ và xy nên ta nghĩ tới việc gấp hằng đẳng thức.

Cụ thể ta có :

$9x^2+10xy+y^2=5(3x+y)\sqrt{xy}\Leftrightarrow 9x^2+6xy+y^2-5(3x+y)\sqrt{xy}+4xy=0$.

$\Leftrightarrow (3x+y)^2-5(3x+y)\sqrt{xy}+4xy=0 \quad (1)$.

Tới đây ta có nhận xét (1) là phương trình đẳng cấp đối với hai biến $3x+y, \sqrt{xy}$ dạng $a^2-5ab+4b^2=0$ do đó ta tách được nhân tử.

Thật vậy ta có (1) $\Leftrightarrow \left(3x+y-\sqrt{xy}\right)\left(3x+y-4\sqrt{xy}\right)=0$.

Như vậy xem như hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $xy \geq 0$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi trở thành phương trình :

$$9x^2+10xy+y^2=5(3x+y)\sqrt{xy}\Leftrightarrow 9x^2+6xy+y^2-5(3x+y)\sqrt{xy}+4xy=0$$

$$\Leftrightarrow (3x+y)^2-5(3x+y)\sqrt{xy}+4xy=0$$

$$\Leftrightarrow (3x+y)^2-(3x+y)\sqrt{xy}-4(3x-y)\sqrt{xy}+4xy=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3x+y-\sqrt{xy}\right)\left(3x+y-4\sqrt{xy}\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x+y=\sqrt{xy}\\ 3x+y=4\sqrt{xy}\end{array}\right.$$

⊕ Với $3x+y=\sqrt{xy}\Rightarrow 9y^2+5xy+y^2=0\Leftrightarrow \left(3x+\dfrac{5y}{6}\right)^2+\dfrac{11y^2}{36}=0$ (vô lí).

⊕ Với $3x+y=4\sqrt{xy}\Leftrightarrow \begin{cases}3x+y\geq 0\\ 9x^2-10xy+y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}3x+y\geq 0\\ (x-y)(9x-y)=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}3x+y\geq 0\\ \left[\begin{array}{l}x=y\\ y=9x\end{array}\right.\end{cases}$

⊕ Với $x=y$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có :

$$2x^2-11x+9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=1\\ x=\dfrac{9}{2}\Rightarrow y=\dfrac{9}{2}\end{array}\right.$$

⊕ Với $y=9x$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có:

$242x^2-51x+9=0$ (vô lí).

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left\{(1;1);\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{9}{2}\right)\right\}$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y - x = \sqrt{xy + 2x + 4y + 8} \\ 2\sqrt{3(y-x) + 5\sqrt{8 - \sqrt{3x}}} = 3(10 - y) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Quan sát hệ phương ta thấy hai phương trình trong hệ tuy đều có dạng cơ bản $\sqrt{f(x)} = g(x)$ nhưng để nâng lũy thừa tìm mối liên quan giữa hai biến x, y ở phương trình thứ hai trong hệ là thật khó. Do đó chúng ta chuyển trọng tâm sang phương trình thứ nhất.

Biến đổi phương trình thứ nhất thành :

$2y - x = \sqrt{(x+4)(y+2)} \Leftrightarrow (x+4) + \sqrt{(x+4)(y+2)} - 2(y+2) = 0$ (1)

Không khó để nhận ra phương trình (1) là phương trình đẳng cấp với hai biến $\sqrt{x+4}, \sqrt{y+2}$.

Do đó ta tiến hành biến đổi (1) về phương trình :

$x + 4 + 2\sqrt{(x+4)(y+2)} - \sqrt{(x+4)(y+2)} - 2(y+2) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+4} - \sqrt{y+2}\right)\left(\sqrt{x+4} + 2\sqrt{y+2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} = \sqrt{y+2} \Leftrightarrow y = x + 2$.

Tới đây ta thực hiện phương pháp thế vào phương trình thứ hai xem như hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} 2y - x \ge 0 \\ (x+4)(y+2) \ge 0 \\ 8 - \sqrt{3x} \ge 0 \\ 3(y-x) + 5\sqrt{8 - \sqrt{3x}} \ge 0 \\ x \ge 0 \\ y \le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2y \\ 3(y-x) + 5\sqrt{8 - \sqrt{3x}} \ge 0 \\ 0 \le x \le \dfrac{64}{3} \\ -2 \le y \le 10 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$2y - x = \sqrt{(x+4)(y+2)} \Leftrightarrow (x+4) + \sqrt{(x+4)(y+2)} - 2(y+2) = 0$

$\Leftrightarrow x + 4 + 2\sqrt{(x+4)(y+2)} - \sqrt{(x+4)(y+2)} - 2(y+2) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+4} - \sqrt{y+2}\right)\left(\sqrt{x+4} + 2\sqrt{y+2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} = \sqrt{y+2} \Leftrightarrow y = x + 2$.

Thay $y = x + 2$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$2\sqrt{6 + 5\sqrt{8 - \sqrt{3x}}} = 3(8 - x) \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 8 \\ 24 + 20\sqrt{8 - \sqrt{3x}} = 9(8 - x)^2 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện đã xét ta có : $0 \le x \le 8$.

Ta có : $24+20\sqrt{8-\sqrt{3x}}=9(8-x)^2 \Leftrightarrow 20\left(\sqrt{8-\sqrt{3x}}-2\right)=\left[(24-3x)^2-8^2\right]$

$$\Leftrightarrow \frac{20(16-3x)}{\left(4+\sqrt{3x}\right)\left(\sqrt{8-\sqrt{3x}}+2\right)}=(16-3x)(32-3x)$$

$$\Leftrightarrow (16-3x)\left(\frac{20}{\left(4+\sqrt{3x}\right)\left(\sqrt{8-\sqrt{3x}}+2\right)}-(32-3x)\right)=0\ (*)$$

Nhận xét rằng $0\le x\le 8$ ta có : $\begin{cases}\dfrac{20}{\left(4+\sqrt{3x}\right)\left(\sqrt{8-\sqrt{3x}}+2\right)}\le\dfrac{5}{2+2\sqrt{2}}<1\\ 8\le 32-3x\le 32\end{cases}$

Suy ra : $\dfrac{20}{\left(4+\sqrt{3x}\right)\left(\sqrt{8-\sqrt{3x}}+2\right)}-(32-3x)<0$ nên

$(*)\Leftrightarrow 16-3x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{16}{3}\Rightarrow y=\dfrac{22}{3}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left(\dfrac{16}{3};\dfrac{22}{3}\right)$.

Ví dụ 4:

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=\sqrt{4-x+5y}\\ x^2+y+2=\sqrt{5(2x-y+1)}+\sqrt{3x+2}\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

hân tích : Quan sát hệ phương trình ta nhận thấy cả hai phương trình trong hệ đều chứa căn thức. Tuy nhiên ở phương trình thứ nhất bậc của các biến dưới căn thức đều là bậc nhất nên ta có thể sử dụng phép nâng lũy thừa của phương trình này để tìm mối quan hệ giữa hai biến.

Cụ thể ta có : $x+y+2+2\sqrt{(x+1)(y+1)}=4-x+5y$.

Chuyển vế thu gọn ta được :

$x-2y-1+\sqrt{(x+1)(y+1)}=0\Leftrightarrow x+1+\sqrt{(x+1)(y+1)}-2(y+1)=0\ (1)$.

Không khó để nhận thấy (1) là phương trình đẳng cấp với hai biến $\sqrt{x+1},\sqrt{y+1}$

Như vậy việc tách nhân tử thành công.

Vậy xem như hệ được giải quyết.

ời giải :

Điều kiện : $\begin{cases} x \geq -\dfrac{2}{3} \\ y \geq -1 \\ 4 - x + 5y \geq 0 \\ 2x - y + 1 \geq 0 \\ x^2 + y + 2 \geq 0 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = \sqrt{4 - x + 5y} \Leftrightarrow x + y + 2 + 2\sqrt{(x+1)(y+1)} = 4 - x + 5y$

$\Leftrightarrow x - 2y - 1 + \sqrt{(x+1)(y+1)} = 0 \Leftrightarrow x + 1 + \sqrt{(x+1)(y+1)} - 2(y+1) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{y+1}\right)\left(\sqrt{x+1} + 2\sqrt{y+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{y+1} \Leftrightarrow x = y$.

Thay $x = y$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$x^2 + x + 2 = \sqrt{5x+5} + \sqrt{3x+2}$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 + \left(x + 2 - \sqrt{5x+5}\right) + \left(x + 1 - \sqrt{3x+2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 + \dfrac{x^2 - x - 1}{\sqrt{5x+5} + x + 2} + \dfrac{x^2 - x - 1}{\sqrt{3x+2} + x + 1} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - x - 1\right)\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{5x+5} + x + 1} + \dfrac{1}{\sqrt{3x+2} + x + 2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vì $1 + \dfrac{1}{\sqrt{5x+5} + x + 1} + \dfrac{1}{\sqrt{3x+2} + x + 2} > 0,\ \forall x \geq -\dfrac{2}{3}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ

$(x, y) = \left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right); \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

Ví dụ 5:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5\left(3 - \sqrt{5x+y}\right) = 2x - \dfrac{3y}{x} \\ \sqrt{2x^3 - 29} + \sqrt[3]{x^2 + 2x - 9 + y} = \dfrac{91 - y - 10x}{x+2} \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Quan sát hệ phương trình ta nhận thấy phương trình thứ hai vừa chứa hai căn bậc lệch và phân thức nên nếu bắt đầu tìm mối quan hệ giữa hai biến để

ực hiện phép thế là điều khó khăn. Ở phương trình thứ nhất tuy chứa cả căn ức và phân số nhưng hình thức có gọn nhẹ hơn nên ta sẽ phân tích phương nh thứ nhất.

ı thể ta có phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình:

$$5x - 5x\sqrt{5x+y} = 2x^2 - 3y$$

ể ý phương trình vừa biến đổi chứa hai hệ số 3,5 đứng trước hai biến x, y nên › liên quan đến biểu thức trong căn do đó ta tiến hành biến đổi tiếp theo như ıu : $15x - 5x\sqrt{5x+y} = 2x^2 - 3y \Leftrightarrow 3(5x+y) - 5x\sqrt{5x+y} - 2x^2 = 0$

ương trình biến đổi cuối cho ta dáng dấp phương trình đẳng cấp bậc hai với iến $x, \sqrt{5x+y}$.

o đó ta tiến hành tách nhân tử như sau :

$$(5x+y) - 3x\sqrt{5x+y} - 2x\sqrt{5x+y} - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{5x+y} - 2x\right)\left(3\sqrt{5x+y} + x\right) = 0.$$

hú ý từ điều kiện của phương trình thứ hai ta có : $x \ge \sqrt[3]{\frac{29}{2}}$.

o đó ta sẽ loại trường hợp : $3\sqrt{5x+y} + x = 0$. Như vậy xem như hệ đã được giải quyết.

giải : Điều kiện : $\begin{cases} 5x + y \ge 0 \\ x \ge \sqrt[3]{\frac{29}{2}} \end{cases}$.

hương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$15x - 5x\sqrt{5x+y} = 2x^2 - 3y \Leftrightarrow 3(5x+y) - 5x\sqrt{5x+y} - 2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(5x+y) - 3x\sqrt{5x+y} - 2x\sqrt{5x+y} - 2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{5x+y} - 2x\right)\left(3\sqrt{5x+y} + x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5x+y} - 2x = 0 \Leftrightarrow y = 4x^2 - 5x \text{ vì } 3\sqrt{5x+y} + x > 0, \forall x \ge \sqrt[3]{\frac{29}{2}}.$$

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$\sqrt{2x^3 - 29} + \sqrt[3]{5x^2 - 3x - 9} = \frac{-4x^2 - 5x + 91}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^3 - 29} + \sqrt[3]{5x^2 - 3x - 9} - \left(\frac{-4x^2 - 5x + 91}{x+2}\right) = 0 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2x^3 - 19} + \sqrt[3]{5x^2 - 3x - 9} - \left(\frac{-4x^2 - 5x + 91}{x+2}\right)$ với $x \ge \sqrt[3]{\frac{29}{2}}$

Ta có : $f'(x)=\frac{3x^2}{\sqrt{2x^3-29}}+\frac{10x-3}{3\sqrt[3]{(5x^2-3x-9)^2}}+\frac{4x^2+16x+101}{(x+1)^2}>0,\forall x>\sqrt[3]{\frac{29}{2}}$.

Do đó hàm số $f(x)$ là hàm số đồng biến với $x\ge\sqrt[3]{\frac{29}{2}}$.

Nên phương trình (1) nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Mà $f(3)=0\Leftrightarrow x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1). Suy ra : $y=21$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(3;21)$.

* Hệ phương trình có một phương trình gồm nhiều hạng tử có thể sắp xếp các hạng tử đồng bậc hoặc thêm bớt để nhóm nhân tử.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3+2x^2y-3xy^2+x(y+1)-2y=2y^2(5y+1)\\(x^2+17y+12)^2=4(x+y+7)(x^2+3x+8y+5)\end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích : Bài toán này do chúng tôi sáng tác và đưa lên diễn đàn toán. Bài toán này hướng đi chúng tôi muốn nhắm đến chính là quan sát sự đồng bậc của các đại lượng và sắp xếp chúng lại thực hiện tách nhân tử.

Với hệ đang xét. dễ dàng thấy rằng phương trình thứ hai trong hệ có độ phức tạp cao hơn phương trình thứ nhất trong hệ. Do đó chúng ta hướng đến phương trình thứ nhất trong hệ.

Cụ thể hệ đã cho được biến đổi thành phương trình :

$$x^3+2x^2y-3xy^2-10y^3+xy-2y^2+x-2y=0$$

Quan sát phương trình vừa biến đổi ta thấy hai hạng tử có bậc 2 và hai hạng tử có bậc nhất có chung một nhân tử $x-2y$.

Tới đây ta để ý các hạng tử bậc 3 ta nhận thấy hai hạng tử x^3-10y^3 có liên quan đến nhân tử $x-2y$. Thật vậy, ta có :

$$x^3-10y^3=x^3-8y^3-2y^3=\left(x^3-(2y)^3\right)-2y^3.$$

Vậy ta còn dư đại lượng $-2y^3$.

Kết hợp với đại lượng còn lại ta có : $2x^2y-3xy^2-2y^3$.

Nhận xét đây là một dạng bậc hai với biến $\frac{x}{y}$ nên ta tiến hành tách :

$$2x^2y-3xy^2-2y^3=y(2x^2-3xy-2y^2)$$

$$=y(2x^2+xy-4xy-2y^2)=y(x-2y)(2x+y)$$

Như vậy ta đã tìm được nhân tử chung của phương trình thứ nhất là $x-2y$.

Do đó phương trình thứ nhất được phân tích thành :

$(x-2y)(x^2+4xy+5y^2+y+1)=0 \Leftrightarrow (x-2y)((x+2y)^2+y^2+y+1)=0$

Không khó để nhận thấy ta chỉ có nhân tử $x=2y$, thế vào phương trình thứ hai trong hệ, ta thu được phương trình sau :

$(4y^2+17y+12)^2=4(3y+7)(4y^2+14y+5)$.

Phương trình này các bạn có thể khai triển ra rồi giải quyết. Tuy nhiên các bạn hãy để ý điều này một chút sẽ thấy được sự thú vị của bài toán.

Ta có : $4y^2+17y+12=(4y^2+14y+5)+(3y+7)$.

Như vậy phương trình thứ hai có dạng :

$(a+b)^2=4ab \Leftrightarrow (a-b)^2=0$ với $\begin{cases} a=3y+7 \\ b=4y^2+14y+5 \end{cases}$

Và đó là hướng giải quyết của bài toán.

Lời giải : Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình:

$$x^3+2x^2y-3xy^2-10y^3+xy-2y^2+x-2y=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-8y^3+y(2x^2-3xy-2y^3)+y(x-2y)+(x-2y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)(x^2+2xy+4y^2)+y(x-2y)(2x+y)+(x-2y)(y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)(x^2+4xy+5y^2+y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)((x+2y)^2+y^2+y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x=2y \text{ vì } (x+2y)^2+y^2+y+1=(x+2y)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0, \forall x,y.$$

Với $x=2y$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$(4y^2+17y+12)^2=4(3y+7)(4y^2+14y+5)$$

$$\Leftrightarrow \left[(3y+7)+(4y^2+14y+5)\right]^2=4(3y+7)(4y^2+14y+5)$$

$$\Leftrightarrow \left[(4y^2+14y+5)-(3y+7)\right]^2=0 \Leftrightarrow 4y^2+11y-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{-11+3\sqrt{17}}{8} \Rightarrow x=\dfrac{-11+3\sqrt{17}}{4} \\ y=\dfrac{-11-3\sqrt{17}}{8} \Rightarrow x=\dfrac{-11-3\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hê phương trình là:

$$(x,y)=\left\{\left(\frac{-11+3\sqrt{17}}{4};\frac{-11+3\sqrt{17}}{8}\right);\left(\frac{-11-3\sqrt{17}}{4};\frac{-11-3\sqrt{17}}{8}\right)\right\}.$$

Bình luận: Chắc các bạn thắc mắc là tại sao ngay từ đầu biết phương trình thứ nhất có nhân tử mà chúng tôi lại tiến hành tách nó. Câu trả lời nằm ở tính chất lí thuyết mà chúng tôi đã nêu. Các bạn kiểm tra giúp chúng tôi nhé, cũng như giúp mình ôn lại kiến thức và kỹ năng.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y+x-6=\sqrt{x+1}+2\sqrt{7-x} \\ 2x^3-y^3+\left(y^2+3\right)x^2=y(2x+3) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này chúng ta sẽ bắt đầu từ phương trình thứ hai trong hệ. Kiểm tra ta thấy phương trình này phân tích được nhân tử.

Ta biến đổi phương trình thứ hai về phương trình:

$$2x^3-y^3+x^2y^2+3x^2-2xy-3y=0 \qquad (1)$$

Để ý trong (1) ta có các đại lượng sau : $2x^3-2xy=2x\left(x^2-y\right)$,

$3x^2-3y=3\left(x^2-y\right)$ và cuối cùng là $-y^3+x^2y^2=y^2\left(x^2-y\right)$.

Vậy là xem như chúng ta đã sắp xếp và bắt nhân tử thành công và như thế là hệ xem như được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x+1\ge 0 \\ 7-x\ge 0 \\ y-x+6\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 7 \\ y-x+6 \end{cases}$.

Phương trình thứ hai trong hệ được biến đổi thành phương trình:

$$2x^3-y^3+x^2y^2+3x^2-2xy-3y=0 \Leftrightarrow 2x^3-2xy+3x^2-3y+x^2y^2-y^3=0$$

$$\Leftrightarrow 2x\left(x^2-y\right)+3\left(x^2-y\right)+y^2\left(x^2-y\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-y\right)\left(2x+3+y^2\right)=0 \ (2)$$

Do $-1\le x\le 7 \Rightarrow 2x+3>0 \Rightarrow 2x+3+y^2>0$ nên từ (2) ta có : $y=x^2$.

Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta được phương trình :

$$x^2+x-6=\sqrt{x+1}+2\sqrt{7-x} \Leftrightarrow x^2+x-6-\sqrt{x+1}-2\sqrt{7-x}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-12+\left(2-\sqrt{x+1}\right)+\left(4-2\sqrt{7-x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+4)+\frac{3-x}{2+\sqrt{x+1}}-\frac{4(x-3)}{4+2\sqrt{7-x}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\underbrace{\left(x+4-\frac{1}{2+\sqrt{x+1}}-\frac{4}{4+2\sqrt{7-x}}\right)}=0 \ (3)$$

Mà $T = x+1+1-\frac{1}{2+\sqrt{x+1}}+2-\frac{4}{4+2\sqrt{7-x}}$

$= x+1+\frac{1+\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}}+\frac{2+2\sqrt{7-x}}{2+\sqrt{7-x}} > 0, \forall x \in [-1;7]$

Do đó từ (3) ta có: $x = 3 \Rightarrow y = 9$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là $(x,y) = (3;9)$.

Bình luận: Bài toán này bắt nhân tử không khó, chủ yếu quan sát các hệ số cùng với các đại lượng đi kèm để sắp xếp được nhân tử chung.

Ví dụ 3:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 27x^3-2y^3+(y^2+3)(3x-2y)=9xy(3x-y) \\ \sqrt[3]{\frac{1}{3}-x^3}+\sqrt{\frac{2y}{3}-\frac{2}{9}}=1 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, chúng ta lại nhận thấy sẽ bắt đầu từ phương trình thứ nhất trong hệ vì phương trình thứ hai chứa hai căn bậc lệch mà đại lượng chứa trong căn cũng chẳng liên quan gì với nhau.

Với phương trình thứ nhất có thể nhận thấy bên vế trái chứa hai bậc ba là $27x^3, 2y^3$ và vế phải chứa đại lượng $9xy(3x-y) = 27x^2y-9xy^2$ ta nhận thấy ngay được mối quan hệ này có liên quan đến hằng đẳng thức.

Cụ thể ta có : $27x^3-27x^2y+9xy^2-2y^3+(y^2+3)(3x-2y)=0$.

Dễ dàng nhận thấy ta chỉ cần tách đại lượng $-2y^3 = -y^3-y^3$ là mọi chuyện đã được sáng tỏ hơn.

Thật vậy ta có: $27x^3-27x^2y+9xy^2-y^3-y^3+(y^2+3)(3x-2y)=0$

$\Leftrightarrow (3x-y)^3-y^3+(y^2+3)(3x-2y)=0$

$\Leftrightarrow (3x-y-y)\left[(3x-y)^2+y(3x-y)+y^2\right]+(y^2+3)(3x-2y)=0$

$\Leftrightarrow (3x-2y)(9x^2-3xy+2y^2+3)=0 \Leftrightarrow 3x-2y=0$.

Tới đây ta đã có mối quan hệ giữa hai biến x, y nên xem như hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\frac{2y}{3}-\frac{2}{9} \ge 0 \Leftrightarrow y \ge \frac{1}{3}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi để trở thành:

$27x^3-27x^2y+9xy^2-y^3-y^3+(y^2+3)(3x-2y)=0$

$$\Leftrightarrow (3x-y)^3 - y^3 + (y^2+3)(3x-2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-y-y)\left[(3x-y)^2 + y(3x-y) + y^2\right] + (y^2+3)(3x-2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-2y)(9x^2-3xy+2y^2+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x-2y=0 \text{ vì } 9x^2-3xy+y^2+3 = \left(3x-\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7y^2}{4} + 3 > 0.$$

Với $3x-2y=0 \Leftrightarrow 2y=3x$ ta thay vào phương trình thứ hai hai trong hệ ta có :

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}-x^3} + \sqrt{x-\frac{2}{9}} = 1 \Leftrightarrow 1-x-\sqrt[3]{\frac{1}{3}-x^3} + x - \sqrt{x-\frac{2}{9}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-x)^3-\frac{1}{3}+x^3}{(1-x)^2+(1-x)\sqrt[3]{\frac{1}{3}-x^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}-x^3\right)^2}} + \frac{x^2-x+\frac{2}{9}}{x+\sqrt{x-\frac{2}{9}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2-9x+2}{3\left[(1-x)^2+(1-x)\sqrt[3]{\frac{1}{3}-x^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}-x^3\right)^2}\right]} + \frac{9x^2-9x+2}{9\left(x+\sqrt{x-\frac{2}{9}}\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (9x^2-9x+2)\left[\frac{1}{3\left[(1-x)^2+(1-x)\sqrt[3]{\frac{1}{3}-x^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}-x^3\right)^2}\right]} + \frac{1}{9\left(x+\sqrt{x-\frac{2}{9}}\right)}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^2-9x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{1}{2} \\ x=\frac{2}{3} \Rightarrow y=1 \end{array}\right.$$

Vì : $\dfrac{1}{3\left[(1-x)^2+(1-x)\sqrt[3]{\frac{1}{3}-x^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}-x^3\right)^2}\right]} + \dfrac{1}{9\left(x+\sqrt{x-\frac{2}{9}}\right)} > 0,\ \forall x \ge \dfrac{2}{9}.$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là :

$$(x,y) = \left\{\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{2}{3};1\right)\right\}.$$

Bình luận: Bài toán trên cũng là bài toán mà sự bắt nhân tử chung cũng không khó chỉ cần chúng ta tinh tế để ý các hạng tử đồng bậc sắp xếp lại và để ý tới các hằng đẳng thức cơ bản để nhóm nhân tử. Tuy nhiên, thể loại hệ này có những bài toán mà khả năng nhóm hạng tử được che giấu rất kĩ, rất khó để biết hay

đoán được nhân tử là đại lượng nào. Câu hỏi đặt ra lúc đó ta sẽ xử lí lớp bài toán này như thế nào? Mời các bạn xem tiếp phân tích phương pháp và cách tư duy để tìm được nhân tử loại bài toán đó qua ví dụ tiếp theo sau đây.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-6y+8)\sqrt{x}-2(x+5)y=-5-4x\\ 4y(1-y)+3(2y-1)\sqrt[3]{x+4}=x^2+15\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Không khó để nhận ra để giải quyết đường lối giải hệ này ta cần đến sự biến đổi trợ giúp của phương trình thứ nhất trong hệ.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi trở thành phương trình :

$x\sqrt{x}-6y\sqrt{x}+8\sqrt{x}-2xy-10y+4x+5=0$ (1)

Phương trình này không phải dễ để thực hiện bắt nhân tử chung nếu ta không thuần thục kỉ năng bắt nhân tử và như thế cũng có nghĩa rằng chúng ta sẽ tiến hành mò mẫm, như vậy thì không logic lắm. Do đó ta cần dựa trên một cơ sở logic bằng một nhận định nào đó thì mới có thể ứng dụng tốt cho các bài toán khác.

Nếu ta để ý kĩ thì (1) chính là phương trình bậc ba theo biến $\sqrt{x}$.

Ta sắp xếp phương trình (1) như sau :

$\left(\sqrt{x}\right)^3-2(y-2)x-2(3y-4)\sqrt{x}-10y+5=0$

Ta đã biết phương trình đa thức bậc ba nếu tách được tích thì trong tích đó phải có một bậc nhất.

Do đó ta giả sử (1) được viết như sau : $\left(\sqrt{x}-ay-b\right)f\left(\sqrt{x},y\right)=0$.

Giờ ta sẽ đi xác định a, b khi ta đã kiểm tra được (1) là đa thức tách được nhân tử.

- Với $y=0\Rightarrow\sqrt{x}=b$ thế vào (1) ta có : $b^3+4b^2+8b+5=0\Leftrightarrow b=-1$.
- Với $b=-1$ ta có : $\sqrt{x}=ay-1$.

Khi đó ta chọn $y=1$ thì ta thay vào (1) ta sẽ có :

$(a-1)^3+2(a-1)^2+2(a-1)-5=0\Leftrightarrow a-1=1\Leftrightarrow a=2$.

Thay $\sqrt{x}=2y-1$ vào (1) ta có phương trình :

$(2y-1)^3-2(y-2)(2y-1)^2-2(3y-4)(2y-1)-10y+5=0$

Trường hợp này nhận vì luôn đúng với mọi y

Và như vậy ta đã biết (1) ta sẽ trở thành : $\left(\sqrt{x}-2y+1\right)f\left(\sqrt{x},y\right)=0$.

Trên cơ sở này chúng ta sẽ tách được (1) theo cách thêm bớt như sau :

$x\sqrt{x}-2xy+x+3x-6y\sqrt{x}+3\sqrt{x}+5\sqrt{x}-10y+5=0$

$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{x}-2y+1\right)+3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2y+1\right)+5\left(\sqrt{x}-2y+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - 2y - 1\right)\left(x + 3\sqrt{x} + 5\right) = 0$

Tới đây chắc các bạn sẽ thấy quá trình tách thêm bớt đâu có gì khó? Tuy nhiên để đạt được điều tưởng chừng đơn giản ấy thì không phải là một việc đơn giản, nếu không đủ thuần thục và tinh ý nhận ra được điều gì đã được che giấu trong phương trình và điều được giấu trước lại là một vấn đề quan trọng, một nút thắt mà chỉ cần gỡ được thì xem như giải quyết được bài toán.

Có thể trong lúc thực hành dùng sơ đồ Horne để tách tích cũng được. Và như vậy là bài toán có thể giải quyết tốt.

Lời giải : Điều kiện $x \ge 0$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành :

$x\sqrt{x} - 6y\sqrt{x} + 8\sqrt{x} - 2xy - 10y + 4x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x} - 2xy + x + 3x - 6y\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 10y + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{x} - 2y + 1\right) + 3\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 2y + 1\right) + 5\left(\sqrt{x} - 2y + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - 2y + 1\right)\left(x + 3\sqrt{x} + 5\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2y - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge \frac{1}{2} \\ x = 4y^2 - 4y + 1 \end{cases}$ vì $x + 3\sqrt{x} + 5 > 0, \forall x \ge 0$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$3(2y-1)\sqrt[3]{x-3} = x^2 + \left(4y^2 - 4y + 1\right) - 16 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x+4} = x^2 + x - 8$ (2)

Nhận xét với $x \ge 0 \Rightarrow 3\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x+4} \ge 0$.

Do đó để phương trình (2) có nghiệm ta có điều kiện là :

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 + x - 8 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \le \frac{-1-\sqrt{33}}{2} \vee x \ge \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \frac{-1+\sqrt{33}}{2}.$$

Ta có $(2) \Leftrightarrow x - 4 + 3\left(x - 2 - \sqrt{x}\right)\sqrt[3]{x+4} + (x-2)\left(x + 6 - 3\sqrt[3]{x+4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow x - 4 + \frac{3(x-1)(x-4)}{x - 2 + \sqrt{x}} + \frac{(x-2)(x-4)(x+5)^2}{(x+6)^2 + (x+6)\sqrt[3]{x+4} + \sqrt[3]{(x+4)^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\underbrace{\left(1 + \frac{3(x-1)}{x-2+\sqrt{x}} + \frac{(x-2)(x+5)^2}{(x+6)^2 + (x+6)\sqrt[3]{x+4} + \sqrt[3]{(x+4)^2}}\right)}_{T} = 0 \ (3)$$

Với $x \ge \frac{-1+\sqrt{33}}{2}$ ta có $T > 0$ nên (3) cho $x = 4 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y) = \left(4;\frac{3}{2}\right)$.

ình luận : Trong bài toán qua bước phân tích các bạn chắc sẽ có thắc mắc là khi $b=-1$ thì $\sqrt{x}=-1$ là vô lí. Điều này là chính xác, nhưng trên thực tế của bài toán ta đang đi tìm mối quan hệ giữa đại lượng $\sqrt{x}=ay+b$ nên việc $(y,b)=(0;-1)$ đúng là không thỏa nhưng đó chưa là khẳng định chắc chắn rằng với $b=-1$ thì sẽ không có một hệ thức $\sqrt{x}=ay+b$ nào làm cho $\sqrt{x}$ có nghĩa và thỏa phương trình (1). Để hiểu và thực hành tốt hơn, chúng tôi sẽ phân tích thêm vào các ví dụ tiếp theo sau đây.

Ví dụ 5:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3+(y-2)x^2+(2y-3)xy = 5y^2(y+1) \\ 2(x-3)\sqrt{y+5}-(x-5)\sqrt{x+y+4} = 3y \end{cases}$ $(x,y \in \mathbb{R})$

'hân tích : Với hệ này, rõ ràng nếu có đường hướng đi bắt nhân tử chung thì chúng ta bắt buộc phải đi từ phương trình thứ nhất trong hệ vì phương trình thứ hai chứa căn thức và nếu có khai triển từ phương trình này cũng không giúp chúng ta được gì.

Với phương trình thứ nhất chúng ta nhân hết ra ta có :

$2x^3+x^2y-2x^2+2xy^2-3xy-5y^3-5y^2=0$

Kiểm tra ta nhận thấy phương trình này có thể phân tích thành nhân tử. Với phương trình này nếu ta có kết hợp các hạng tử đồng bậc lại với nhau cũng khó nhận ra nhân tử chung, như vậy ta cần phải thêm bớt các đại lượng. Nhưng ta không thể thêm bớt một cách mơ hồ được.

Tuy nhiên trên cơ sở của đề bài ta nhận thấy phương trình cần tách nhân tử là một dạng phương trình bậc ba hai ẩn nên nếu có nhân tử chung thì nhân tử chung đó khi rút ra phải có dạng $x-ay-b=0$. Bây giờ việc còn lại là chúng ta cần xử lí hai số a,b.

Theo tính chất ở lí thuyết, giờ ta cho $y=0$ thì $x=b$.

Thay vào phương trình ta có : $2b^3-2b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=1 \end{array}\right.$

Với $b=0$ ta có : $x=ay$.

Cho $y=1$ ta có $x=a$ ta thay vào phương trình ta có :

$2a^3-a^2-a-10=0 \Leftrightarrow a=2$

Vậy trường hợp này ta có mối quan hệ giữa x, y là $x = 2y$ và nếu đó là nhân tử chung thì ta có phải có kết quả sau luôn là luôn đúng với mọi y.

$$2(2y)^3 + (2y)^2 y - 2(2y)^2 + 2(2y)y^2 - 3(2y)y - 5y^3 - 5y^2 = 0$$

Tuy nhiên điều này lại không đúng vì có kết quả là : $19y^3 - 19y^2 = 0$

Với $b = 1$ ta có : $x = ay + 1$. Cho $y = 1$ ta có $x = a + 1$ ta thay vào phương trình ta có: $2(a+1)^3 + (a+1)^2 - 2(a+1)^2 + 2(a+1) - 3(a+1) - 10 = 0 \Leftrightarrow a = 1$

Vậy trường hợp này ta có mối quan hệ giữa x, y là $x = y + 1$ và nếu đó là nhân tử chung thì ta có phải có kết quả sau luôn là luôn đúng với mọi y.

$$2(y+1)^3 + (y+1)^2 y - 2(y+1)^2 + 2(y+1)y^2 - 3(y+1)y - 5y^3 - 5y^2 = 0.$$

Và đây là kết quả đúng với mọi y. Như vậy ta sẽ có :

$$2x^3 + x^2y - 2x^2 + 2xy^2 - 3xy - 5y^3 - 5y^2 = (x - y - 1)f(x, y)$$

Là phép tách tích nhân tử duy nhất có được cho phương trình này.

Như vậy tới đây ta có hai cách để tách nhân tử vào bài làm.

⊕ Cách 1 : Sử dụng thêm bớt như sau :

$$2x^3 + x^2y - 2x^2 + 2xy^2 - 3xy - 5y^3 - 5y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 2x^2y - 2x^2 + 3x^2y - 3xy^2 - 3xy + 5xy^2 - 5y^3 - 5y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2(x - y - 1) + 3xy(x - y - 1) + 5y^2(x - y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y - 1)(2x^2 + 3xy + 5y^2) = 0$$

⊕ Cách 2 : Chia sơ đồ Horne vì qua phân tích ta biết được nhân tử.

$$2x^3 + x^2y - 2x^2 + 2xy^2 - 3xy - 5y^3 - 5y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + (y - 2)x^2 + y(2y - 3)x - 5y^3 - 5y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y - 1)(2x^2 + 3xy + 5y^2) = 0$$

Như vậy xem như hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} y + 3 \ge 0 \\ x + y + 2 \ge 0 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất được biến đổi trở thành phương trình :

$$2x^3 + x^2y - 2x^2 + 2xy^2 - 3xy - 5y^3 - 5y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 2x^2y - 2x^2 + 3x^2y - 3xy^2 - 3xy + 5xy^2 - 5y^3 - 5y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2(x - y - 1) + 3xy(x - y - 1) + 5y^2(x - y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)\left(2x^2+3xy+5y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y=x-1 \text{ vì } 2x^2+3xy+5y^2=2\left(x+\frac{3}{4}y\right)^2+\frac{31}{8}y^2>0, \forall x,y$$

Thay vào phương trình thứ hai ta được phương trình :

$$2(x-3)\sqrt{x+4}-(x-5)\sqrt{2x+3}=3(x-1) \quad (1)$$

Đặt $t=\sqrt{x+4} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 0 \\ x=t^2-4 \end{cases}$. Thế vào phương trình (1) ta được phương trình :

$$2\left(t^2-7\right)t-\left(t^2-9\right)\sqrt{2t^2-5}=3\left(t^2-5\right) \Leftrightarrow \left(t^2-9\right)\sqrt{2t^2-3}=2t^3-3t^2-14t+15$$

$$\Leftrightarrow (t-3)\left((t+3)\sqrt{2t^2-5}-\left(2t^2+3t-5\right)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ (t+3)\sqrt{2t^2-5}=2t^2+3t-5 \end{array}\right.$$

⊕ Với $t=3 \Leftrightarrow \sqrt{x+4}=3 \Leftrightarrow x=5 \Rightarrow y=4$.

⊕ Với $(t+3)\sqrt{2t^2-5}=2t^2+3t-5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2+3t-5\ge 0 \\ t\ge 0 \\ (t+3)^2\left(2t^2-5\right)=\left(2t^2+3t-5\right)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 1 \\ t^4-12t^2+35=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} t^2=5 \\ t^2=7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{5} \\ t=\sqrt{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+4}=\sqrt{5} \\ \sqrt{x+4}=\sqrt{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=0 \\ x=3 \Rightarrow y=2 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là :

$(x,y)=\{(1;0);(3;2);(5;4)\}$.

Bình luận : Bài toán trên chúng tôi muốn đưa ra một phân tích tư duy tự nhiên dựa trên quy tắc tách tích của một đa thức bậc ba mà việc tách và thêm bớt nó đòi hỏi một kĩ năng khéo léo và có chiều sâu trong luyện tập mà đa số học sinh là yếu phần này. Nội dung chính là chúng ta đưa về điều kiện để $x=a$ là nghiệm của $f(x)=0$ khi và chỉ khi $f(a)=0$ và dựa trên điều kiện để biểu thức $f(x,y)=0$ tách được nhân tử. Các phép thử lại trong bài phân tích các em có thể dùng máy tính để kiểm tra và bắt buộc là hệ số a không là số vô tỉ. Tuy nó chưa là tối ưu nhất nhưng có lẽ cũng là con đường tư duy tự nhiên.

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^3+(5+y)x^2+y^2(2x+5)+2y(5x+2)=-y^3-2x \\ x^2+y^2+2x+5y+2=0 \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích : Đây là bài hệ số 1 trong đề kiểm tra nâng cao phần hệ lớp 10 ban cơ bản tháng 10 của trung tâm luyện thi Khai Sáng. Một bài hệ chúng tôi đánh giá là khó. Với hệ này, ta quan sát trong hệ chứa hai phương trình đa thức bậc ba và bậc hai. Theo suy nghĩ tự nhiên ta sẽ bắt đầu từ phương trình bậc hai.

Kiểm tra ta thấy bậc hai tách được nhân tử. Tuy nhiên ta có : $\Delta' = -y^2 - 5y - 1$ không phải là một số chính phương nên nhân tử phương trình một tách được sẽ liên quan đến căn thức. Đây chính là điều thực tế mà chúng tôi đã nhắc đến trong lý thuyết.

Như vậy, rõ ràng điều kiện tách được nhân tử của phương trình bậc hai chỉ dẫn đến rắc rối cho bài toán.

Bây giờ mọi sự tập trung sẽ dồn cho phương trình thứ nhất của hệ với hy vọng sẽ tách được nhân tử. Nhưng với hình thức như thế nếu bắt được nhân tử chung ta cần thêm bớt các đại lượng một cách rất khéo léo. Kiểm tra ta thấy đa thức này tách được nhân tử và nó là bậc ba nên luôn tách được một tích trong đó có một bậc nhất với hai biến x, y.

Cụ thể ta có phương trình thứ hai được biến đổi thành phương trình :

$$2x^3 + (y+5)x^2 + 2(y^2 + 5y + 1)x + y^3 + 5y^2 + 4y = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x - ay - b)f(x, y) = 0$$

Bây giờ ta sẽ tiến hành đi tìm hệ số a, b sao cho $x = ay + b$ là nghiệm của (1)

⊕ Với $y = 0$ ta có $x = b$ nên (1) trở thành: $2b^3 + 5b^2 + 2b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = -\frac{1}{2} \\ b = -2 \end{array}\right.$

Khi $b = 0$ ta có : $x = ay$.

- Cho $y = 1$ ta có $x = a$. Khi đó

  $(1) \Leftrightarrow 2a^3 + 6a^2 + 14a + 10 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \Rightarrow x = -y$.

  Thay $x = -y$ vào (1) ta không nhận được kết quả nghiệm đúng với mọi y.

- Cho $y = -1$ ta có $x = -a$. Khi đó $(1) \Leftrightarrow 2a^3 + 6a^2 + 10a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow x = 0$.

  Không khó để nhận ra $x = 0$ ta có (1) không nghiệm đúng với mọi y.

Khi $b = -\frac{1}{2}$ ta có : $x = ay - \frac{1}{2}$

- Cho $y = 1$ ta có $x = a - \frac{1}{2}$.

  Khi đó

$\Leftrightarrow 2\left(a-\frac{1}{2}\right)^3+6\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+14\left(a-\frac{1}{2}\right)+10=0 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$.

ay $x=-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$ vào (1) ta nhận được kết quả nghiệm đúng với mọi y.

ư vậy nhân tử bậc nhất chúng ta có đó là $(2x+y+1)f(x,y)=0$ và đây là : quả duy nhất chúng ta có được.

i đây chúng ta có hai cách trình bày như ví dụ trên. Như vậy bài toán đã được ıi quyết.

iải : Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$^3+(y+5)x^2+2(y^2+5y+1)x+y^3+5y^2+4y=0$ (1)

ch 1: Sử dụng tách và thêm bớt

có :

$\Leftrightarrow 2x^3+x^2y+x^2+4x^2+2xy+2x+2xy^2+y^3+y^2+8xy+4y^2+4y=0$

$x^2(2x+y+1)+2x(2x+y+1)+y^2(2x+y+1)+4y(2x+y+1)=0$

$(2x+y+1)(x^2+y^2+2x+4y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+y+1=0\\x^2+y^2+2x+4y=0\end{array}\right.$

ıch 2 : Sử dụng sơ đồ Horne.

ı có :

$) \Leftrightarrow 2x^3+x^2y+x^2+4x^2+2xy+2x+2xy^2+y^3+y^2+8xy+4y^2+4y=0$

$\Leftrightarrow (2x+y+1)(x^2+y^2+2x+4y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+y+1=0\\x^2+y^2+2x+4y=0\end{array}\right.$.

rường hợp 1 : $2x+y+1=0$, kết hợp với phương trình thứ hai trong hệ ta có hệ:

$$\begin{cases}2x+y+1=0\\x^2+y^2+2x+5y+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-2x-1\\5x^2-4x-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{2-\sqrt{14}}{5}\\y=\frac{-9+2\sqrt{14}}{5}\end{cases}\\\begin{cases}x=\frac{2+\sqrt{14}}{5}\\y=\frac{-9-2\sqrt{14}}{5}\end{cases}\end{array}\right.$$

Trường hợp 2 : $x^2+y^2+2x+4y=0$, kết hợp với phương trình thứ nhất trong hệ ta có hệ :

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y=0 \\ x^2+y^2+2x+5y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x^2+2x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1+\sqrt{5} \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1-\sqrt{5} \\ y=-2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm :

$$(x,y)=\left\{\left(-1+\sqrt{5};-2\right);\left(-1-\sqrt{5};-2\right);\left(\frac{2-\sqrt{14}}{5};\frac{-9+2\sqrt{14}}{5}\right);\left(\frac{2+\sqrt{14}}{5};\frac{-9-2\sqrt{14}}{5}\right)\right\}.$$

Bình luận : Các bạn chú ý, khi chọn $y=0$ và tìm b xong. Qua các ví dụ trước đó các bạn chú ý quy trình tìm a có một mẹo nhỏ là các số chọn tiếp theo cho y thường là các số là ước số của hệ số đứng trước x^3. Ở trong bài toán ta có hệ số đứng trước x^3 là số 2 và các ước số của nó là $\pm1, \pm2$, trong bài toán có ba giá trị của b ứng với mỗi giá trị ta sẽ thử với một cặp ước số đã nói, ta sẽ tìm được mối quan hệ giữa x, y. Mặt khác nếu ta tính không ra giá trị b không nguyên thì khả năng phân tích là không khả thi vì sẽ rắc rối về nhân tử và lúc đó có thể bài toán yêu cầu kết hợp cả hai phương trình để có nhân tử chung. Theo một quy tắc nào đó cho người giải nên người chế đề thông thường họ ít làm khó học sinh ở hệ số x^3 lớn hơn 4. Còn nếu lớn hơn thì hoặc là trong bài toán phải có hướng đi bắt nhân tử rõ ràng như ví dụ 2 hoặc là một cách khác để bắt nhân tử. Còn nếu vẫn sử dụng định hướng này chắc là người chế đề quá khó chăng?

* **Hệ phương trình có chứa một phương trình hoặc cả hai phương trình có thể sử dụng hằng đẳng thức trực tiếp hoặc gián tiếp bằng phép nâng lũy thừa để có nhân tử chung.**

Đặc điểm nhận dạng thường gặp của hệ này là khi chúng ta biến đổi một hoặc cả hai phương trình chúng ta sẽ gặp một hằng đẳng thức quen thuộc.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-y)^2+2(x-y)+1=0\\ \sqrt{5x^2+11}=3y-5+\sqrt{5y^2-10x-1}\end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, ta nhận thấy phương trình thứ nhất có hình thức nhẹ nhàng nên ta sẽ bắt đầu từ phương trình này vì cấu trúc phương trình hai không cho nghỉ đến phép biến đổi nào bắt đầu từ đó để tìm mối liên quan giữa hai biến.

Cụ thể ta có phương trình thứ nhất được biến đổi thành :

$x^2+y^2-2xy+2x-2y+1=0 \qquad (1)$

Không khó để nhận ra (1) là hằng đẳng thức của $(x-y+1)^2$.

Do đó từ (1) ta có : $(x-y+1)^2=0 \Leftrightarrow x-y+1=0 \Leftrightarrow y=x+1$.

Như vậy xem như bài toán được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $5y^2-10x-1\ge 0$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$x^2+y^2-2xy+2x-2y+1=0 \Leftrightarrow (x-y+1)^2=0 \Leftrightarrow x-y+1=0 \Leftrightarrow y=x+1$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$\sqrt{5x^2+11}=3(x+1)-5+\sqrt{5(x+1)^2-10x-9}$

$\Leftrightarrow \sqrt{5x^2+11}-\sqrt{5x^2+4}=3x-2 \ (2)$

Từ (2) ta có : $\sqrt{5x^2+11}>\sqrt{5x^2+4} \Rightarrow 3x-2>0 \Leftrightarrow x>\frac{2}{3}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{5x^2+11}-\sqrt{5x^2+4}-3x+2$, $\forall x>\frac{2}{3}$.

Ta có :

$$f'(x)=\frac{5x}{\sqrt{5x^2+11}}-\frac{5x}{\sqrt{5x^2+4}}-3=5x\left(\frac{1}{\sqrt{5x^2+11}}-\frac{1}{\sqrt{5x^2+4}}\right)-3<0, \forall x>\frac{2}{3}.$$

Do đó ta có hàm số $f(x)$ luôn đồng biến với $x>\frac{2}{3}$ nên $f(x)=0$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Mà f(1) = 0 nên (2) có nghiệm duy nhất $x=1 \Rightarrow y=2$.

Đối chiếu điều kiện ta có hệ có nghiệm $(x, y)=(1;2)$.

Bình luận: Bài toán trên là một bài toán cơ bản nếu thuần thục hằng đẳng thức về cách nhìn và nhận biết thì sẽ không có khó khăn trong lúc giải.

Ví dụ 2 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (xy-2)^2+6y=3\left(\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right) \\ \left(3+\dfrac{1}{x}\right)\left(y(y-12x)+\dfrac{4}{x^2}\left(\dfrac{3}{x}+5\right)+87\right)=15\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)^3 \end{cases} (x,y\in \mathbb{R})$$

Phân tích :

Với hệ đang xét, không cần phải suy tính điều gì mà bắt đầu ngay với phương trình thứ nhất trong hệ.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi trở thành phương trình :

$$(xy-2)^2+6y-\frac{12}{x}+\frac{9}{x^2}=0 \Leftrightarrow (xy-2)^2+2(xy-2)\cdot\frac{3}{x}+\left(\frac{3}{x}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(xy-2+\frac{3}{x}\right)^2=0 \Leftrightarrow xy-2+\frac{3}{x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy=2-\dfrac{3}{x} \\ y=\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2} \end{cases}$$

Ở đây chúng ta suy nghỉ rút như vậy là vì trong phương trình thứ hai trong hệ chứa cả y, xy.

Và như vậy ta xem như nút thắt của bài toán đã được giải quyết. Giờ ta vào giải bài toán trực tiếp.

Lời giải :

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$(xy-2)^2+6y-\frac{12}{x}+\frac{9}{x^2}=0 \Leftrightarrow (xy-2)^2+2(xy-2)\cdot\frac{3}{x}+\left(\frac{3}{x}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(xy-2+\frac{3}{x}\right)^2=0 \Leftrightarrow xy-2+\frac{3}{x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy=2-\dfrac{3}{x} \\ y=\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2} \end{cases}$$

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$\left(3+\frac{1}{x}\right)\left(\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)^2-12\left(2-\frac{3}{x}\right)+\frac{12}{x^3}+\frac{20}{x^2}+63\right)=15\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \left(3+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{9}{x^4}+\frac{24}{x^2}+\frac{36}{x}+63\right)=15\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^3$$

$$\Leftrightarrow\left(3+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{3}{x^4}+\frac{8}{x^2}+\frac{12}{x}+21\right)=5\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^3\ (*)$$

Đặt $t=\frac{1}{x}$, ta có $(*)$ trở thành phương trình :

$(3+t)\left(3t^4+8t^2+12t+21\right)=5\left(t^2+1\right)^3$ (1).

Ta biến đổi (1) thành phương trình : $(3+t)\left[3\left(t^2+1\right)^2+2(3+t)^2\right]=5\left(t^2+1\right)^3$.

$$\Leftrightarrow\left(\frac{3+t}{t^2+1}\right)\left[3+2\left(\frac{3+t}{t^2+1}\right)^2\right]=5\Leftrightarrow 2\left(\frac{3+t}{t^2+1}\right)^3+3\left(\frac{3+t}{t^2+1}\right)-5=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{3+t}{t^2+1}-1\right)\left[2\left(\frac{3+t}{t^2+1}\right)^2+2\left(\frac{3+t}{t^2+1}\right)+5\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{3+t}{t^2+1}=1 \text{ vì } 2\left(\frac{3+t}{t^2+1}\right)^2+2\left(\frac{3+t}{t^2+1}\right)+5>0,\forall t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow t^2-t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{1}{x}=-1\\ \frac{1}{x}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=-5\\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=-8\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là

$(x,y)=\left\{(-1;-5);\left(\frac{1}{2};-8\right)\right\}$.

Bình luận : Ở cách giải ở phương trình thứ hai nếu ta cứ mặc nhiên khai triển thì sẽ gặp phương trình bậc 6 với nghiệm đẹp ta hoàn toàn có thể giải được. Tuy nhiên, nếu gặp nghiệm "không đẹp" thì chắc cũng khó khăn. Cách giải trên dựa trên tính tinh tế của các đại lượng mà ta chú ý trong bài đó là $3+t,t^2+1$ và bằng hệ số bất định ta cần tách :

$3x^4+8x^2+12x+21=m(3+t)^2+n\left(t^2+1\right)^2$

Cân bằng hệ số hai vế phương trình này ta sẽ tìm được $m=2,n=3$ và có lời giải như trên.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases}4x^2-y^2+9=2(y-2x)(3-y)\\ \dfrac{x(y-x)}{x^2+2}+\dfrac{2x\left(x^2+y-2\right)+2}{y^2-2x^2-9x-7}=1+x\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, do cấu trúc quá phức tạp của phương trình thứ hai nên chúng ta chuyển qua phương trình thứ nhất trong hệ có cấu trúc đơn giản hơn.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biên đổi thành phương trình :

$$4x^2-y^2+9=2\left(3y-y^2-6x+2xy\right)\Leftrightarrow 4x^2+y^2+9-4xy+12x-6y=0$$

Và chúng ta nhận thấy đẳng thức cuối cùng mang dáng dấp của hằng đẳng thức.

Thật vậy, ta có :

$$4x^2+y^2+9-4xy+12x-6y$$

$$=(2x)^2+y^2+3^2-2\cdot 2x\cdot y+2\cdot 2x\cdot 3-2\cdot y\cdot 3=(2x-y+3)^2$$

Và như vậy ta sẽ có : $(2x-y+3)^2=0\Leftrightarrow 2x-y+3=0\Leftrightarrow y=2x+3$.

Bài toán đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $y^2-2x^2-9x-7\neq 0$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$4x^2-y^2+9=2\left(3y-y^2-6x+2xy\right)\Leftrightarrow 4x^2+y^2+9-4xy+12x-6y=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-y+3)^2=0\Leftrightarrow 2x-y+3=0\Leftrightarrow y=2x+3$$

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$$\frac{x(x+3)}{x^2+2}+\frac{2x\left(x^2+2x+1\right)+2}{(2x+3)^2-2x^2-9x-7}=1+x\Leftrightarrow \frac{x(x+3)}{x^2+2}+\frac{2x^3+4x^2+2x+2}{2x^2+3x+2}=1+x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+3)}{x^2+2}+1+\frac{2x^3+4x^2+2x+2}{2x^2+3x+2}-x=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+3x+2}{x^2+2}+\frac{x^2+2}{2x^2+3x+2}=2\ (2)$$

Đặt $t=\dfrac{2x^2+3x+2}{x^2+2}\Rightarrow \dfrac{1}{t}=\dfrac{x^2+2}{2x^2+3x+2}, t>0$ vì

$$\frac{2x^2+3x+2}{x^2+2}=\frac{2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}}{x^2+2}>0.$$

Lúc đó ta có: $(2)\Leftrightarrow t+\dfrac{1}{t}=2\Leftrightarrow t^2-2t+1=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow \dfrac{2x^2+3x+2}{x^2+2}=1$

$$\Leftrightarrow x^2+3x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=3\\ x=-3\Rightarrow y=-3\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là

$(x,y)=\{(0;3);(-3;-3)\}$.

Bình luận : Ở cách giải phương trình (2) các bạn có thể thực hiện phép quy đồng và nhân phân phối ra hết thì cũng có kết quả như vậy.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{24(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - 16\left(\dfrac{x+y}{xy}\right) = \dfrac{32}{\sqrt{xy}} + 9xy \\ \sqrt{x} + \sqrt{y-3} = \sqrt{(x+1)(y-2)} \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Phân tích : Với hệ này ta thấy phương trình thứ nhất có cấu trúc khá phức tạp, phương trình thứ hai chứa căn thức khá nhiều nhưng lại là phương trình căn thức cơ bản nên trước tiên ta sẽ nâng lũy thừa ở phương trình thứ hai để làm giảm căn thức của phương trình thứ hai cộng với việc khử bớt đại lượng y có ở vế sau và tạo được thêm đại lượng $3x$ có trong căn thức sau khi nâng lũy thừa ở vế trái.

Cụ thể ta có phương trình thứ hai được biến đổi thành phương trình :

$$x + y - 3 + 2\sqrt{x(y-3)} = xy - 2x + y - 2 \Leftrightarrow x(y-3) - 2\sqrt{x(y-3)} + 1 = 0$$

Phép biến đổi cuối cho ta được một hằng đẳng thức $\left(\sqrt{xy-3x} - 1\right)^2 = 0$.

Tới đây ta sẽ có mối quan hệ giữa hai biến x, y là $xy = 3x + 1$. Nếu để vậy thế vào phương trình thứ nhất trong hệ ta vẫn giải được nhưng khá phức tạp và khó khăn trong việc khai triển tính toán.

Do đó ta chọn lựa phương án biến đổi tiếp phương trình thứ nhất trong hệ để được hình thức gọn gàng hơn.

Ta có phương trình thứ nhất được viết lại là :

$$24\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) - 16\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{32}{\sqrt{xy}} + 9xy$$

Với phương trình này ta không khó nhận ra cái đại lượng sau đây sắp xếp lại sẽ được một hằng đẳng thức, đó là :

$$16\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) - \frac{32}{\sqrt{xy}} = -16\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{y}\right) = -16\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2.$$

Do đó ta biến đổi tiếp phương trình thứ nhất về phương trình :

$$24\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) - 16\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 - 9xy = 0$$

$$\Leftrightarrow 16\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}\right)^2 - 24\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) + 9xy = 0$$

Và tới đây, không khó để nhận ra phương trình cuối cùng được biến đổi của phương trình thứ nhất trong hệ tương đương với :

$$\left(4\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}\right)-3\sqrt{xy}\right)^2=0\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=3xy\Leftrightarrow 16\left(x+y+\sqrt{xy}\right)=9x^2y^2$$

Lúc này kết hợp với kết quả thu được ở phương trình thứ hai ta thực hiện phép thế sẽ đơn giản hơn.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}x>0\\ y\ge 3\end{cases}$.

Phương trình thứ hai trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$x+y-3+2\sqrt{x(y-3)}=xy-2x+y-2\Leftrightarrow x(y-3)-2\sqrt{x(y-3)}+1=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{xy-3x}-1\right)^2=0\Leftrightarrow\sqrt{xy-3x}-1=0\Leftrightarrow xy-3x-1=0\Leftrightarrow\begin{cases}xy=3x+1\\ y=\dfrac{1}{x}+3\end{cases}\quad(1)$$

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$24\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)-16\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{32}{\sqrt{xy}}+9xy$$

$$\Leftrightarrow 24\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)-16\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2-9xy=0$$

$$\Leftrightarrow 16\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}\right)^2-24\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)+9xy=0\Leftrightarrow\left(4\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}\right)-3\sqrt{xy}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=3xy\Leftrightarrow 16\left(x+y+\sqrt{xy}\right)=9x^2y^2\ (2)$$

Thế (1) vào (2) ta có phương trình :

$$16\left(x+\frac{1}{x}+3+\sqrt{3x+1}\right)=9(3x+1)^2\Leftrightarrow 81x^3+38x^2-39x-16-32x\sqrt{3x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow 81x^3+6x^2-71x-16+32x\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left(81x^2+87x+16\right)+32x\cdot\frac{x(x-1)}{x+1+\sqrt{3x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\underbrace{\left(81x^2+87x+16+\frac{32x^2}{x+1+\sqrt{3x+1}}\right)}_{T}=0\ (*)$$

Nhận xét với $x>0$ ta có : $81x^2+87x+16+\dfrac{32x^2}{x+1+\sqrt{3x+1}}>0$.

Do đó từ $(*)$ ta có $x-1=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow 4$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(1;4)$.

Bình luận : Bài toán là sự phối hợp cả hai phương trình đều được về hằng đẳng thức. Nói cách khác thì kỉ thuật nhân tử chung bằng hằng đẳng thức là một bài toán mà ở đó chúng ta hay bắt gặp nhân tử chung có được ở dạng $f^2(x,y)=0$ hoặc $f^2(x,y)+g^2(x,y)=0$ hoặc là $f^2(x,y)-g^2(x,y)=0$.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\sqrt{y+3(2x+1)}-\sqrt{y}=3\sqrt{2x+1} \\ (y-x-2)(15-2x^2)+6=\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{y-x-3}\right)^4 \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích: Không quá khó để nhận ra hệ này chúng ta không khai thác được gì từ phương trình thứ hai. Phương trình thứ nhất buộc lòng cần quan tâm. Trước tiên ta sẽ chuyển vế và dùng phép nâng lũy thừa để giảm bớt căn thức rồi sau đó sẽ tiến hành tiếp các phép biến đổi cần thiết và nhận định về phép biến đổi cuối cùng ta có được.

Cụ thể ta có phương trình thứ nhất được biến đổi thành :

$$2\sqrt{y+3(2x+1)}=3\sqrt{2x+1}+\sqrt{y}\Leftrightarrow 4(y+6x+3)=9(2x+1)+6\sqrt{y(2x+1)}+y$$

$$\Leftrightarrow 24x+4y+12=18x+y+9+6\sqrt{y(2x+1)}\Leftrightarrow 2x+1-2\sqrt{y(2x+1)}+y=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{y}\right)^2=0\Leftrightarrow\sqrt{2x+1}=\sqrt{y}\Leftrightarrow y=2x+1$$

Như vậy xem như đã có gỡ được nút thắt quan trọng của bài toán. Vậy xem như bài toán được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} y+3(2x+1)\ge 0 \\ y\ge 0 \\ x\ge -\dfrac{1}{2} \\ y-x-3\ge 0 \end{cases}\quad (*)$

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có phương trình sau :

$$2\sqrt{y+3(2x+1)}=3\sqrt{2x+1}+\sqrt{y}\Leftrightarrow 4(y+6x+3)=9(2x+1)+6\sqrt{y(2x+1)}+y$$

$$\Leftrightarrow 24x+4y+12=18x+y+9+6\sqrt{y(2x+1)}\Leftrightarrow 2x+1-2\sqrt{y(2x+1)}+y=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{y}\right)^2=0\Leftrightarrow\sqrt{2x+1}=\sqrt{y}\Leftrightarrow y=2x+1$$

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$(x-1)(15-2x^2)+6=\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)^4$ (điều kiện $x\ge 2$)

$$\Leftrightarrow -2x^3+2x^2+15x-9=-16+8x\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x^3-2x^2-11x-7+4x\left(2x-1-2\sqrt{x^2-4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(2x^2-4x-7\right)+4x\left(\frac{2x^2-4x-7}{2x-1+2\sqrt{x^2-4}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x^2-4x-7\right)\left(x+1+\frac{4x}{2x-1+2\sqrt{x^2-4}}\right)=0 \quad (1)$$

Với điều kiện $x\ge 2$ ta luôn có : $x+1+\dfrac{4x}{2x-1-2\sqrt{x^2-4}}>0$.

Do đó từ (1) ta có : $2x^2-4x-7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2+3\sqrt{2}}{2}\\ x=\dfrac{2-3\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$

Vì $x\ge 2$ nên $x=\dfrac{2+3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow y=3\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Đối chiếu điều kiện (*) ta có nghiệm của hệ phương trình là

$(x,y)=\left(\dfrac{2+3\sqrt{2}}{2};3+3\sqrt{2}\right)$.

Bình luận: Thông qua bài toán này, chúng tôi muốn lưu ý các bạn nếu trong hệ chứa một phương trình gây quá nhiều khó khăn để tìm mối quan hệ mà trong hệ lại có một phương trình có hình thức nhẹ nhàng hơn và chứa dạng phương trình cơ bản thì cứ thử tư duy logic việc nâng lũy thừa để làm giảm căn thức và tìm hiểu sâu vào các phép biến đổi tiếp theo có giúp gì cho chúng ta. Đó là việc tư duy cho bài toán, tuy nhiên tùy vào bài toán mà ta sẽ có cách chọn lựa phương pháp thích hợp.

Ví dụ 6 : Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 6x(x+1)-4xy+1=2(x+1)\sqrt{x^2+y}-(y-1)^2\\ \dfrac{x^2y+4\left(x^2-4\right)}{\sqrt{2x^3+x^2-16}}=\dfrac{7x^2y+3x^2-112}{y-1}\end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích : Về cấu trúc bài hệ thì từ phương trình thứ hai trong hệ có biến đổi thì cũng không thu được kết quả nào khả quan.

Do đó chúng ta sẽ chuyển trọng tâm sang phương trình thứ nhất. Ta biến đổi phương trình thứ nhất trở thành phương trình :

$6x^2+6x-4xy+1-2(x+1)\sqrt{x^2+y}+y^2-2y+1=0$.

Ở phương trình này chúng ta nhận thấy có đại lượng $2(x+1)\sqrt{x^2+y}$ làm ta liên tưởng tới hằng đẳng thức $(a-b)^2$

Mặt khác nhận thấy rằng nếu cho $y=2x+1\Rightarrow\sqrt{x^2+y}=\sqrt{x^2+2x+1}=x+1$.

Và với $y=2x+1$ thì ta thấy phương trình này nghiệm đúng

Như vậy có khả năng đại lượng $-2(x+1)\sqrt{x^2+y}$ có được xuất phát từ hằng đẳng thức này chăng ? Đó là : $\left(\sqrt{x^2+y}-(x+1)\right)^2=0$. Và như thế ta thử tách phương trình thứ nhất theo chiều hướng này xem sao ?

Cụ thể ta có :

$$x^2+y-2(x+1)\sqrt{x^2+y}+(x+1)^2+4x^2+4x-4xy+y^2-2y+1=0$$

Tới đây ta để ý thấy được : $4x^2+y^2+1-4xy+2y+4x=(2x-y+1)^2$

Và như vậy phương trình thứ nhất được biến đổi gọn lại thành phương trình :

$$\left(\sqrt{x^2+y}-(x+1)\right)^2+(2x-y+1)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+y}=x+1\\y=2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\ge 0\\y=2x+1\end{cases}$$

Như vậy xem như nút thắt của bài toán đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}x^2+y\ge 0\\2x^3+x^2-16>0\quad(*)\\y\ne 1\end{cases}$

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình

$$x^2+y-2(x+1)\sqrt{x^2+y}+(x+1)^2+4x^2+4x-4xy+y^2-2y+1=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+y}-(x+1)\right)^2+(2x-y+1)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+y}=x+1\\y=2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\y=2x+1\end{cases}.$$

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$\frac{x^2(2x+1)+4x^2-16}{\sqrt{2x^3+x^2-16}}=\frac{7x^2(2x+1)+3x^2-112}{2x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x^3+5x^2-16}{\sqrt{2x^3+x^2-16}}=\frac{14x^3+10x^2-112}{2x}\ (1)$$

Đặt $a=\sqrt{2x^3+x^2-16}, a>0$.

Ta có nhận xét : $\begin{cases} 2x^3+5x^2-16=a+4x^2 \\ 14x^3+10x^2-112=7\left(2x^3+x^2-16\right)+3x^2=7a^2+3x^2 \end{cases}$

Do đó ta có (1) trở thành phương trình :

$$\frac{a+4x^2}{a}=\frac{7a^2+3x^2}{2x}\Leftrightarrow 2x\left(a+4x^2\right)=a\left(7a^2+3x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 8x^3-3ax^2+2ax-7a^3=0\Leftrightarrow (x-a)\left(8x^2+5ax+7a^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=a \text{ vì } 8x^2+5ax+7a^2>0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^3+x^2-16}=x\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 2x^3+x^2-16=x^2 \end{cases}\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=5$$

Đối chiếu điều kiện (*) ta có nghiệm của hệ phương trình là $(x,y)=(2;5)$.

Bình luận : Trong lời giải phân tích các bạn sẽ có thắc mắc là căn cứ vào điều gì mà chúng tôi lại cho $y=2x+1$. Câu trả lời đó chính là sự dự đoán của chúng ta về hằng đẳng thức. Nếu hằng đẳng thức này đúng thì nghiệm xảy ra tại dấu bằng phải thỏa phương trình. Và điều đó đã đúng nên hướng tiếp cận tiếp theo là biến đổi để thu được một đại lượng hằng đẳng thức tiếp theo dựa vào biểu thức còn lại có các đại lượng cho phép có thể biến đổi theo ý tưởng đó. Một ý tưởng có thể khơi được sự thành công, nhưng không ý tưởng nào sẽ chắc chắn sẽ dẫn tới một thất bại.

Ví dụ 7:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} y-5\left(3x^2-1\right)-12x=2(x-2)\sqrt{y+2} \\ 5x^2\left(\sqrt[4]{y+2}+2\right)=2\left(1-4x+\sqrt{10x-3}\right) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích: Với hệ này, ta rõ ràng nhận thấy mối liên quan giữa hai phương trình với đại lượng $\sqrt{y+2}$ nhưng sẽ rất khó biến đổi từ phương trình thứ hai.

Ở phương trình thứ nhất ta có thể ẩn phụ hóa căn thức để đưa về phương trình bậc hai theo y nhưng nếu ta tinh ý ta sẽ có biến đổi sau :

$$y+2-2(x-2)\sqrt{y+2}+x^2-4x+4-16x^2-8x-1=0$$

$$\Leftrightarrow y+2-2(x-2)\sqrt{y+2}+(x-2)^2=(4x+1)^2\Leftrightarrow\left(\sqrt{y+2}-x+2\right)^2=(4x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{y+2}-x+2=4x+1 \\ \sqrt{y+2}-x+2=-4x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{y+2}=5x-1 \\ \sqrt{y+2}=-3x-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\sqrt[4]{y+2}=\sqrt{5x-1}.$$

Ta biến đổi được như vậy là do điều kiện của hệ.

Như vậy xem như ta đã tìm được mối quan hệ để thực hiện phép thế. Vậy xem như hệ được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} y \ge -2 \\ x \ge \dfrac{3}{10} \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi trở thành phương trình :

$$y+2-2(x-2)\sqrt{y+2}+x^2-4x+4-16x^2-8x-1=0$$

$$\Leftrightarrow y+2-2(x-2)\sqrt{y+2}+(x-2)^2=(4x+1)^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{y+2}-x+2\right)^2=(4x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{y+2}-x+2=4x+1 \\ \sqrt{y+2}-x+2=-4x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{y+2}=5x-1 \\ \sqrt{y+2}=-3x-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt[4]{y+2}=\sqrt{5x-1}\ (1)$$

Ta có (1) vì $x \ge \dfrac{3}{10} \Rightarrow 5x-1 \ge \dfrac{1}{2}$, $-3x-3<0$.

Thay $\sqrt[4]{y+2}=\sqrt{5x-1}$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$$5x^2\left(\sqrt{5x-1}+2\right)=2\left(1-4x+\sqrt{10x-3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 5x^2\sqrt{5x-1}+10x^2+8x-2-2\sqrt{10x-3}=0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2\sqrt{5x-1}+2x(5x-1)+10x-2-2\sqrt{10x-3}=0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{5x-1}\left(5x+2\sqrt{5x-1}\right)+10x-3-2\sqrt{10x-3}+1=0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{5x-1}\left(5x-1+2\sqrt{5x-1}+1\right)+\left(\sqrt{10x-3}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{5x-1}\left(\sqrt{5x-1}+1\right)^2+\left(\sqrt{10x-3}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5x-1}-1=0 \\ \sqrt{10x-3}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-1=1 \\ 10x-3=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{2}{5} \Rightarrow \sqrt[4]{y+2}=1 \Rightarrow y=-1.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình $(x,y)=\left(\dfrac{2}{5};-1\right)$.

Bình luận : Bài toán này chỉ cần tinh ý biến đổi phương trình thứ nhất về dạng $A^2-B^2=0$ đây cũng là một điều đáng quan tâm và chú ý. Phương trình thứ hai được giải quyết theo phương pháp đưa về tổng hai số không âm $A^2+B^2=0$. Cả hai phương trình trong hệ đều có thể sử dụng hằng đẳng thức và các tính chất đặc biệt để giải quyết. Tuy nhiên ở phương trình thứ hai các bạn có thể chọn lựa giải quyết cách khác như liên hiệp…

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2+4y^2}{xy}+1=4\sqrt{(x+y)\left(\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{x}\right)} \\ \sqrt{x^2+5x+2y+xy+6-2x\sqrt{x(y+3)}}=\sqrt{x}+\sqrt{y+3} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Phân tích :

Hệ phương trình có cấu trúc khá đồ sộ ở cả hai phương trình trong hệ. Tuy nhiên ta quan sát thấy phương trình thứ hai trong hệ bên vế trái trong căn có chứa một biểu thức chứa biến khá đồ sộ và đặc biệt có sự xuất hiện của đại lượng $2x\sqrt{x(y+3)}$ nên ta có thể liên tưởng tới hằng đẳng thức.

Nếu ta xem $a=x, b=\sqrt{x(y+3)}$ thì ta có : $a^2+b^2=x^2+xy+3x$.

Mặt khác ta nhận thấy biểu thức trong căn chứa hai đại lượng x^2, xy do đó ta tiến hành tách biểu thức trong căn vế trái như sau :

$$x^2+5x+2y+xy+6-2x\sqrt{x(y+3)}=x^2-2x\sqrt{x(y+3)}+xy+3x+2(x+y+3)$$

$$=\left(x-\sqrt{x(y+3)}\right)^2+2(x+y+3)$$

Như vậy sau khi biến đổi ta vẫn chưa có thể phá căn thức dù đã tách được hằng đẳng thức.

Tuy nhiên, quan sát vế phải ta có tổng $\sqrt{x}+\sqrt{y+3}$, đại lượng này sau khi nâng lũy thừa sẽ xuất hiện $x+y+3$ và $\sqrt{x(y+3)}$. Do đó ta tiến hành nâng lũy thừa phương trình thứ hai trong hệ để giản ước bớt đại lượng $x+y+3$ và làm giảm độ phức tạp về hình thức cho phương trình thứ hai.

Cụ thể, nâng lũy thừa hai vế phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình : $\left(x-\sqrt{x(y+3)}\right)^2+2(x+y+3)=x+y+3+2\sqrt{x(y+3)}$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x(y+3)}\right)^2+x+y+3-2\sqrt{x(y+3)}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x(y+3)}\right)^2+\left(\sqrt{x}-\sqrt{y+3}\right)^2=0 \quad (1)$$

Và như thế với phương trình thứ hai sau phép nâng lũy thừa không những làm gọn phương trình mà còn dẫn đến một kết quả đẹp cho một tính chất vừa được sử dụng ở ví dụ trước đó .

Thật vậy ta có : $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{x(y+3)} \\ \sqrt{x}=\sqrt{y+3} \end{cases} \Leftrightarrow x=y+3$.

Tới đây ta có thể sử dụng phép thế vào phương trình thứ nhất trong hệ thì xem như hệ đã được giải quyết.

Tuy nhiên nếu ta tinh ý sẽ thấy phương trình thứ nhất là phương trình đẳng cấp với hai biến x, y.

Mặt khác từ phương trình thứ hai được viết lại :

$$\frac{2x^2+xy+4y^2}{xy}=4\sqrt{(x+y)\left(\frac{2}{y}-\frac{3}{x}\right)}$$

Ta suy ra được $xy>0 \Rightarrow y>0$.

Do đó ta biến đổi phương trình thứ hai trong hệ về phương trình sau :

$$\left(\frac{2x^2+xy+4y^2}{xy}\right)\cdot\frac{x}{y}=4\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x+y}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{2x-3y}{x}\right)}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+4=4\sqrt{\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(2\frac{x}{y}-3\right)}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+4=4\sqrt{\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(2\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y}\right)}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y}-2\sqrt{4\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(2\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y}\right)}+4\left(\frac{x}{y}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\left(\frac{x}{y}\right)+4\left(\frac{x}{y}+1\right)=2\sqrt{4\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(2\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y}}-\sqrt{4\left(\frac{x}{y}+1\right)}\right)^2 \Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2-7\frac{x}{y}-4=0 \Leftrightarrow \frac{x}{y}=4.$$

Và tới đây, thông qua các phép biến đổi về hằng đẳng thức ta đưa hệ ban đầu về một hệ không thể nào cơ bản hơn được nữa đó là hệ : $\begin{cases}x=y+3\\ \dfrac{x}{y}=4\end{cases}$.

Và như vậy xem như hệ được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}x>0\\ -2\le y\ne 0\end{cases}$.

Phương trình thứ hai trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$\sqrt{\left(x-\sqrt{x(y+3)}\right)^2+2(x+y+3)}=\sqrt{x}+\sqrt{y+3}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x(y+3)}\right)^2+2(x+y+3)=x+y+3+2\sqrt{x(y+3)}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x(y+3)}\right)^2+x+y+3-2\sqrt{x(y+3)}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x(y+3)}\right)^2+\left(\sqrt{x}-\sqrt{y+3}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{x(y+3)} \\ \sqrt{x}=\sqrt{y+3} \end{cases} \Leftrightarrow x=y+3\ (2)$$

⊕ Cách 1 : Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$\frac{2(y+3)^2+4y^2}{y(y+3)}+1=4\sqrt{\frac{(2y+3)(6-y)}{y(y+3)}} \Leftrightarrow \frac{7y^2+15y+18}{y(y+3)}=4\sqrt{\frac{-2y^2+9y+18}{y(y+3)}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(y+3)>0 \\ 7y^2+15y+18=4\sqrt{y(y+3)\left(-2y^2+9y+18\right)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(y+3)>0 \\ 16y(y+3)\left(-2y^2+9y+18\right)=\left(7y^2+15y+18\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(y+3)>0 \\ 81(y-1)^2(y+2)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y+3)>0 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=4$$

⊕ Cách 2 : Phương trình thứ hai trong hệ được viết lại thành phương trình :

$$\frac{2x^2+xy+4y^2}{xy}=4\sqrt{(x+y)\left(\frac{2}{y}-\frac{3}{x}\right)}\ (*)$$

Từ $(*) \Rightarrow xy>0 \Rightarrow y>0$ do $\begin{cases} 2x^2+xy+4y^2=2\left(x+\frac{y}{4}\right)^2+\frac{31}{8}y^2>0 \\ x>0 \end{cases}$

Do đó ta nhân hai vế của $(*)$ cho $\frac{x}{y}>0$ ta có phương trình :

$$\left(\frac{2x^2+xy+4y^2}{xy}\right)\cdot\frac{x}{y}=4\sqrt{\frac{x}{y}\left(\frac{x+y}{y}\right)\frac{x}{y}\left(\frac{2x-3y}{y}\right)}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+4=4\sqrt{\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(2\frac{x}{y}-3\right)}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y}+4\left(\frac{x}{y}+1\right)=2\sqrt{4\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(2\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y}\right)}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y}-2\sqrt{4\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(2\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y}\right)}+4\left(\frac{x}{y}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y}}-\sqrt{4\left(\frac{x}{y}+1\right)}\right)^2=0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2-7\frac{x}{y}-4=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y}=4 \Leftrightarrow x=4y\ (3).$$

Từ (2) và (3) ta có hệ phương trình $\begin{cases}x=y+3\\x=4y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện của bài toán ta có nghiệm của hệ phương trình là $(x,y)=(4;1)$.

Bình luận : Về cấu trúc thì bài hệ có hình thức khá cồng kềnh nhưng cho lời giải hết sức thú vị. Bằng những nhận định phù hợp thì với một hệ được giải bằng hằng đẳng thức cho một lời đẹp và rất thú vị. Bài toán trên nếu chúng ta mạnh về đánh giá bất đẳng thức ta có thể đánh giá trực tiếp phương trình thứ hai trong hệ cũng thu được kết quả. Tuy nhiên, ở đây chúng tôi muốn nhấn mạnh về việc hằng đẳng thức cũng là một phương pháp giải hệ bắt nhân tử chung loại " duy nhất" khá chuẩn. Sau đây, chúng ta sẽ tiếp đến một ví dụ điển hình thể loại này mà ngoài phương pháp sử dụng hằng đẳng thức ta còn có thể sử dụng các phương pháp khác như sủ dụng bất đẳng thức cơ bản để đánh giá hay liên hiệp kết hợp với bình phương hệ quả (ngụ ý là bình phương chưa rõ về dấu) đó chính là đề thi khối A, A1 năm 2014.

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình $\begin{cases}x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}=12\\x^3-8x-1=2\sqrt{y-2}\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Đây là một bài hệ hình thức ngắn gọn nhưng có thể công phá nó ở nhiều kỉ thuật khác nhau. Ở đây chúng tôi muốn nhắm đến kỉ thuật sử dụng hằng đẳng thức.

Quan sát phương trình thứ hai chúng ta biết chắc với những gì đề bài cho chẳng thể cộng phá gì được phương trình này.

Với phương trình thứ nhất ta nhận thấy nó ở dạng phương trình chứa căn cơ bản và nếu chuyển vế thì khi nâng lũy thừa sẽ giảm bớt căn thức và khử được đại lượng x^2y kết hợp cùng các hệ số cho đặc biệt như đề bài.

Do đó ta bắt đầu từ phương trình thứ nhất như sau :

$$12-x\sqrt{12-y}=\sqrt{y(12-x^2)} \Rightarrow 12x^2-x^2y-24x\sqrt{12-y}+144=12y-x^2y$$

$$\Leftrightarrow 12x^2-24x\sqrt{12-y}-12y+144=0 \Leftrightarrow x^2-2x\sqrt{12-y}+12-y=0$$

Tới phương trình này ta đã đạt được hai mục đích khử bớt căn thức và đại lượng giống nhau, giờ tiếp theo ta sẽ chăm chú vào nó để biến đổi tiếp vì ta chỉ còn mỗi con đường là phải công phá cho được phương trình này tìm nút thắt "nhân tử duy nhất" của bài toán.

Quan sát một chút ta nhận ra ngay phương trình cuối chính là $\left(x-\sqrt{12-y}\right)^2=0$.

Và tới đây nút thắt đã được mở và bài toán được giải quyết .

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} 2\le y\le 12 \\ -2\sqrt{3}\le x\le 2\sqrt{3} \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành:

$$12-x\sqrt{12-y}=\sqrt{y\left(12-x^2\right)} \Rightarrow 12x^2-x^2y-24x\sqrt{12-y}+144=12y-x^2y$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x\sqrt{12-y}+12-y=0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{12-y}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{12-y} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ y=12-x^2 \end{cases}$$

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2} \Leftrightarrow x^3-8x-3+2\left(1-\sqrt{10-x^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(x^2+3x+1\right)+2\left(\frac{x-3}{1+\sqrt{10-x^2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\underbrace{\left(x^2+3x+1+\frac{2}{1+\sqrt{10-x^2}}\right)}_{T}=0 \ (*)$$

Từ điều kiện $\begin{cases} -2\sqrt{3}\le x\le 2\sqrt{3} \\ x\ge 0 \\ 10-x^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le \sqrt{10} \Rightarrow T>0$.

Do đó (*) có $x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=3$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là (x; y) = (3; 3).

Bình luận : Bài toán này, đáp án chính thức của bộ là sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ và đánh giá cơ bản $ab\le\frac{a^2+b^2}{2},\forall a,b\in\mathbb{R}$ để có được $y=12-x^2$.

Cụ thể ta có : $x\sqrt{12-y}\le\frac{x^2+12-y}{2};\sqrt{y\left(12-x^2\right)}\le\frac{y+12-x^2}{2}$

Từ đó ta có : $x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}\le 12$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{12-y}\\ \sqrt{y}=\sqrt{12-x^2}\end{cases}$.

Ngoài ra ta có thể công phá phương trình thứ nhất để thu được $y=12-x^2$ bằng ba cách sau :

⊕ Cách 1 : Sử dụng bất đẳng thức BCS ta có :

$$144=\left(x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}\right)^2\le\left(x^2+12-x^2\right)\left(12-y+y\right)=144.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{\sqrt{12-y}}=\frac{\sqrt{12-x^2}}{\sqrt{y}}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ y=12-x^2\end{cases}$.

⊕ Cách 2 : Sử dụng bất đẳng thức véc tơ.

Xét hai véc tơ $\vec{u}=\left(x,\sqrt{12-x^2}\right),\vec{v}=\left(\sqrt{12-y},\sqrt{y}\right)$.

Ta luôn có : $\vec{u}\cdot\vec{v}\le\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|$ nên ta có:

$$x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}\le\sqrt{\left(x^2+12-x^2\right)\left(12-y+y\right)}=12.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}=k\cdot\vec{v},\left(k\ge 0\right)\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{12-y}}=\frac{\sqrt{12-x^2}}{\sqrt{y}}$

⊕ Cách 3 : Sử dụng liên hợp và bình phương hệ quả.

Ta có : $x\sqrt{12-y}-\sqrt{y\left(12-x^2\right)}=\frac{12x^2-12y}{x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}}=x^2-y$

Kết hợp với phương trình thứ nhất trong hệ ta có phương trình :

$$2x\sqrt{12-y}=12+x^2-y\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{12-y}\right)^2=0.$$

Ở trong lời giải này, chúng ta mạnh dạn liên hiệp là do một nhận xét nếu không xét về dấu thì hai đại lượng trong hai căn thức có chung đại lượng x^2y nhưng chúng lại cùng dấu. Về mức độ tương đối nào đó thì cách giải dựa trên nhận xét

này, vẫn có thể áp dụng được cho các bài toán nếu sử dụng phép nâng lũy thừa thu được nhân tử có thể biểu diễn x theo y (hoặc ngược lại) và cũng có thể biểu diễn f(x ; y) = g(x ; y) rồi sử dụng cách thế. Các bài toán thuộc thể loại này, chúng ta sẽ tiến hành nghiên cứu trong phần hệ phương trình bắt nhân tử chung bằng phương pháp liên hiệp ở phần tiếp theo sau đây.

Có một điều rất chú ý thường những bài toán hệ mà trong đó có một phương trình phải sử dụng đánh giá riêng biệt không phải kết hợp cả hai phương trình trong hệ mà được đánh giá bằng bất đẳng thức cơ bản mà cấu trúc phương trình cho "nhẹ nhàng" thì việc sử dụng phương pháp hằng đẳng thức lại khá hiệu quả và cho lời giải dễ hiểu hơn.

* **Hệ phương trình có nhân tử chung bằng kỉ thuật nhân liên hiệp trong một phương trình trong hệ hoặc có đôi lúc là phối hợp cả hai.**

Đây là thể loại nâng cao của kỉ thuật dùng hằng đẳng thức. Để giải được thể loại này chúng ta cần có các bước định tính trước như sau :

+ *Trong hệ có các đại lượng có thể khử cho nhau bằng phép liên hợp.*
+ *Đoán được giá trị làm cho hai vế phương trình bằng nhau.*
+ *Kết hợp các đánh giá có được từ bài toán để chỉ ra vế còn lại vô nghiệm.*
+ *Sử dụng thuần thục các kỉ thuật biến đổi liên hiệp.*

Đây là một sự phát triển rất tự nhiên của phép trục căn thức và nhân tử chung từ phương trình

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}+3x(x+y)=\sqrt{2y}+6y^2\\ x^2+2xy+y^2-5x-3y+2=0\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Cấu tạo của hệ gồm một phương trình bậc hai hai ẩn và một phương trình chứa căn thức cũng với hai ẩn. Theo suy nghỉ tự nhiên, rõ ràng chúng ta luôn muốn bắt đầu từ phương trình thứ hai.

Kiểm tra ta nhận thấy phương trình này tách được nhân tử. Bây giờ ta sẽ tiến hành tính delta để hy vọng có delta là số chính phương.

Cụ thể ta có $\Delta=(2y-5)^2-4(y^2-3y+2)=-8y+17$.

Rõ ràng nhận ra được ngay phương trình thứ hai không thể đem phân tích được vì khi đó nhân tử sẽ liên quan tới căn thức. Điều phức tạp này, chúng ta không chờ đợi. Do đó mọi chuyện phải đổ dồn về phương trình thứ nhất.

Nhận xét cách sắp sếp của phương trình thứ nhất không cho phép ta nghỉ đến việc nâng lũy thừa vì căn thức tuy có giảm bớt nhưng đa thức sẽ có số mũ cao lên. Và ta cũng chẳng thể làm gì từ nó để có được nhân tử qua các phương pháp ta đã xét trên.

Lúc này, ta sẽ nghỉ đến việc khử liên hiệp bắt nhân tử chung. Nhưng để có được điều này chúng ta cần làm các bước như lí thuyết về phần này mà chúng tôi đề cập tới .

⊕ Bước 1: Ta nhận thấy nếu $x = y \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} = \sqrt{2y} \\ 3x(x+y) = 6y^2 \end{cases}$, do đó ta nhận định có nhân tử $x = y$

⊕ Bước 2: Tiến hành nhóm liên hiệp. Từ nhận định ở bước 1 ta có cách nhóm liên hiệp như sau :

$$\sqrt{x+y} - \sqrt{2y} + 3(x+y)x + 6y^2 \Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}} + 3\left(x^2 + xy + 2y^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}} + 3(x-y)(x+2y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}} + x + y + y\right) = 0$$

⊕ Bước 3 : Tiến hành đánh giá phần trong ngoặc, không khó để nhận thấy từ điều kiện của bài là $x + y \geq 0; y \geq 0$ và nghiệm (x; y) = (0; 0) không thỏa hệ nên ta luôn có phần trong ngoặc dương.

Vậy xem như hệ đã được giải quyết bằng phương pháp liên hợp.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$.

Nhận xét rằng với (x; y) = (0; 0) không thỏa hệ nên một trong hai đại lượng $x + y, y$ có ít nhất là một số dương.

Phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình :

$$\sqrt{x+y} - \sqrt{2y} + 3(x+y)x + 6x^2 \Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}} + 3\left(x^2 + xy + 2y^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}} + 3(x-y)(x+2y) \Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}} + x + y + y\right) = 0 \ (1)$$

Từ điều kiện và nhận xét ở trên ta có : $\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}} + x + 2y > 0$

Do đó (1) cho ta $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$. Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình : $2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

Đối chiều kiện ta có nghiệm của hệ là

$$(x, y) = \left\{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}; \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}; \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

Bình luận : Với bài toán này, nếu ta không đưa ra nhận xét thì nếu với điều kiện của bài ta kết luận phần trong ngoặc của (1) luôn dương là không chuẩn xác.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x^2+5x-y+2}-2=\sqrt{y^2+8x}+x \\ 2y-\sqrt{x+3}=x+11 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này ta nhận thấy, phương trình thứ hai trong hệ rất đơn giản, nhưng chính vì sự đơn giản bình dị quá của nó mà từ nó chúng ta chẳng thể nào tìm được mối quan hệ giữa hai biến x, y dù ta sử dụng phép lũy thừa để làm mất căn thức.

Thật vậy, sử dụng phép lũy thừa ta sẽ biến đổi phương trình thứ hai trong hệ thành :

$x+3=x^2+4y^2+121+4xy+22x \Leftrightarrow x^2+(4y+21)x+4y^2+4y+118=0$.

Đây là một phương trình bậc hai hai ẩn, kiểm tra thấy không phân tích được nhân tử.

Do đó mọi sự đổ dồn lúc này giải quyết hệ là ta cần công phá được phương trình thứ nhất trong hệ để tìm mối liên hệ giữa hai biến x, y.

Ta sắp xếp lại phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$2\sqrt{x^2+5x-y+2}=\sqrt{y^2+8x}+x+2 \ (1)$

Ở (1) không cho phép ta nghỉ đến việc nâng lũy thừa vì khi nâng lũy thừa để khử bớt căn thức ta sẽ làm cho các biến tăng lên số mũ và phương trình sẽ càng phức tạp nên ta sẽ lựa chọn phương pháp "ép nhân tử" bằng liên hợp.

Nhận xét (1) có hai căn bậc hai nên ta nghỉ đến việc thoát căn bằng một số chính phương.

⊕ Bước 1: Nếu ta thay $y=x-2$ ta có :

$$\begin{cases} 2\sqrt{x^2+5x-y+2}=2\sqrt{x^2+4x+4}=2(x+2) \\ \sqrt{y^2+8x}+x+2=\sqrt{x^2+4x+4}+x+2=2(x+2) \end{cases}.$$

Từ đây ta có nhận định nhân tử cần tìm sẽ là $x-y-2$.

⊕ Bước 2 : Sử dụng nhóm liên hiệp.

$$\sqrt{x^2+5x-y+2}-(x+2)+\sqrt{x^2+5x-y+2}-\sqrt{y^2+8x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y-2}{\sqrt{x^2+5x-y+2}+x+2}+\frac{x^2-y^2-3x-y+2}{\sqrt{x^2+5x-y+2}+\sqrt{y^2+8x}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y-2}{\sqrt{x^2+5x-y+2}+x+2}+\frac{(x-y-2)(x+y-1)}{\sqrt{x^2+5x-y+2}+\sqrt{y^2+8x}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+5x-y+2}+x+2}+\frac{x+y-1}{\sqrt{x^2+5x-y+2}+\sqrt{y^2+8x}}\right)=0$$

⊕ Bước 3 : Đánh giá biểu thức liên hiệp.

Không khó nhận ra phần trong ngoặc cái khó đó là đánh giá đại lượng $x+y-1$ khi mà điều kiện của bài toán chỉ là $x\ge -3, x^2+5x-y+2\ge 0, y^2+8x\ge 0$ không giúp ta đánh giá được đại lượng $x+y-1$.

Tuy nhiên, từ phương trình thứ hai trong hệ với điều kiện $x\ge -3$ ta có đánh giá sau :

$2y=\sqrt{x+3}+x+11\ge 8\Rightarrow y\ge 4\Rightarrow x+y\ge 1$

Với đánh giá này thì phần trong ngoặc đã rõ ràng để kết luận. Vậy bài toán đã được giải quyết.

Lời giải :

Điều kiện : $\begin{cases} x\ge -3 \\ x^2+5x-y+2\ge 0 \\ y^2+8x\ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$\sqrt{x^2+5x-y+2}-(x+2)+\sqrt{x^2+5x-y+2}-\sqrt{y^2+8x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y-2}{\sqrt{x^2+5x-y+2}+x+2}+\frac{x^2-y^2-3x-y+2}{\sqrt{x^2+5x-y+2}+\sqrt{y^2+8x}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y-2}{\sqrt{x^2+5x-y+2}+x+2}+\frac{(x-y-2)(x+y-1)}{\sqrt{x^2+5x-y+2}+\sqrt{y^2+8x}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-2)\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+5x-y+2}+x+2}+\frac{x+y-1}{\sqrt{x^2+5x-y+2}+\sqrt{y^2+8x}}\right)}_{T}=0 \ (1)$$

Từ phương trình thứ hai trong hệ với điều kiện $x\ge -3$ ta có đánh giá sau :

$2y=\sqrt{x+3}+x+11\ge 8\Rightarrow y\ge 4\Rightarrow x+y\ge 1$.

Với đánh giá này ta có $T>0$ nên từ (1) ta có $x-y-2=0\Leftrightarrow y=x-2$

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$2(x-2)-\sqrt{x+3}=x+11\Leftrightarrow \sqrt{x+3}=x-15$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-15\ge 0 \\ x+3=(x-15)^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 15 \\ x^2-31x+222=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 15 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{31-\sqrt{73}}{2} \\ x = \dfrac{31+\sqrt{73}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{31+\sqrt{73}}{2} \Rightarrow y = \frac{27+\sqrt{73}}{2}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y) = \left(\dfrac{31+\sqrt{73}}{2}; \dfrac{27+\sqrt{73}}{2}\right)$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 1+\sqrt{2x+y+1} = 4(2x+y)^2 + \sqrt{6x+3y} \\ (9x+4y)\left(\sqrt{19x+8y} - \sqrt{14-x-2y}\right)^2 = 5+4x+2y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Phân tích : Với hệ này chúng ta quan sát thấy cả hai phương trình đều khó nắm bắt được điều gì nhanh chóng. Với phương trình thứ hai, ta thấy độ phức tạp của nó khá nhằn vì đã chứa bình phương lại có chứa tích nên việc khai triển nó là điều không nên làm.

Do đó trọng tâm của chúng ta phải xoay chuyển qua phương trình thứ nhất để công phá. Vì ở hệ này ta sẽ loại trừ việc kết hợp cả hai phương trình để có được điều gì đó.

Phương trình một có hình thức khá giống với phương trình thứ hai như là chứa căn thức và bình phương của một biểu thức hai biến. Tuy nhiên nếu quan sát kỉ, chúng ta để ý tới hai đại lượng trong căn có dấu hiệu đặc biệt và trong phương trình có chứa một hằng thức dạng $a^2 - b^2$

Cụ thể, ta có: $(6x+3y) - (2x+y+1) = 4x+2y-1 \ (*)$

Mặt khác : $4(2x+y)^2 - 1 = (4x+2y)^2 - 1 = (4x+2y+1)(4x+2y-1)$

Và như vậy, ở phương trình thứ nhất trong ta sẽ liên hiệp vì như thế chúng ta mới có được $(*)$.

Ta biến đổi phương trình thứ nhất như sau :

$$\sqrt{6x+3y} - \sqrt{2x+y+1} + (4x+2y)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x+2y-1}{\sqrt{6x+3y}+\sqrt{2x+y+1}} + (4x+2y+1)(4x+2y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x+2y-1)\left(\frac{1}{\sqrt{6x+3y}+\sqrt{2x+y+1}} + 2(2x+y) + 1\right) = 0$$

Với điều kiện $2x+y \ge 0$ ta có được biểu thức trong ngoặc dương. Do đó : $4x+2y=1$.

Tới đây ta có thể giải quyết được hệ đang xét.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} 2x+y\ge 0 \\ 14-x-2y\ge 0 \\ 19x+8y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le 2x+y\le 14 \\ 19x+8y\ge 0 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình :

$$\sqrt{6x+3y}-\sqrt{2x+y+1}+(4x+2y)^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x+2y-1}{\sqrt{6x+3y}+\sqrt{2x+y+1}}+(4x+2y+1)(4x+2y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (4x+2y-1)\left(\frac{1}{\sqrt{6x+3y}+\sqrt{2x+y+1}}+2(2x+y)+1\right)=0 \quad (1)$$

Do $2x+y\ge 0$ ta có : $\frac{1}{\sqrt{6x+3y}+\sqrt{2x+y+1}}+2(2x+y)+1>0$

Nên từ (1) ta có : $4x+2y-1=0 \Leftrightarrow 4x+2y=1\ (2)$.

Phương trình thứ hai trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$\left(x+2(4x+2y)\right)\left(\sqrt{3x+4(4x+2y)}-\sqrt{14-x+4x-1}\right)^2=5+(4x+2y)$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\left(\sqrt{3x+4}-\sqrt{3x+13}\right)^2=6 \Leftrightarrow 27(x+2)=2\left(\sqrt{3x+4}+\sqrt{3x+13}\right)^2$$

$$27x+54=2\left(6x+17+2\sqrt{9x^2+51x+52}\right) \Leftrightarrow 4\sqrt{9x^2+51x+52}=15x+20$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x+20\ge 0 \\ 16\left(9x^2+51x+52\right)=225x^2+600x+400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{4}{3} \\ 3x^2-8x-16=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{4}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-\frac{4}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \Rightarrow y=-\frac{15}{2} \\ x=-\frac{4}{3} \Rightarrow y=\frac{19}{6} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left(4;-\frac{15}{2}\right)$.

Bình luận : Bài toán này chúng ta không sử dụng đoán nghiệm để liên hiệp mà nghiệm của nó hay còn gọi là nhân tử chung của nó có được từ các đại lượng có sẵn trong phương trình mà ta muốn liên hiệp. Đây cũng là một điểm chú ý đáng quan tâm trong kỉ thuật liên hiệp.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3\sqrt{2y-x-1}\left(\sqrt{x+3}-4\right)+\sqrt{x-1}\left(\sqrt{y+1}+4\right)=-2(y+35) \\ (x-y+3)\sqrt{x+3}=\sqrt{y+1} \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích : Hệ phương trình đã cho đầu tiên ta đánh giá là phương trình có hai đại lượng lặp lại trong cả hai phương trình trong hệ đó là $\sqrt{x+3},\sqrt{y+1}$ trên phương diện nhìn nhận ta có thể ẩn phụ hóa rồi giải phương trình. Tuy nhiên về định tính ta có thể làm như vậy, nhưng cấu trúc phương trình thứ nhất trong hệ khá nhằn nên câu hỏi đặt ra liệu ẩn phụ có phải con đường giải quyết tốt chăng ? Tuy nhiên, chúng ta dễ thấy rằng phương trình thứ hai trong hệ có hình thức gọn nhẹ, nên thử nghỉ rằng ta nên bắt đầu từ phương trình này để xem có thể rút được mối quan hệ nào giữa x,y để bắt nhân tử chung rồi thực hiện phép thế lên phương trình thứ hai để con đường đi nó đơn giản hơn không?

Quan sát ta thấy rằng $(y+1)-(x+3)=y-x-2=-(x-y+2)$.

Đại lượng thu được sau quan sát khá giống với với đại lượng bên vế trái phương trình và vì ta cần có cái quan sát nên chúng ta phải tách và liên hiệp phương trình thứ hai thành :

$$(x-y+3)\sqrt{x+3}=\sqrt{y+1}\Leftrightarrow(x-y+2)\sqrt{x+3}=\sqrt{y+1}-\sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow(x-y+2)\sqrt{x+3}=\frac{y-x-2}{\sqrt{y+1}+\sqrt{x+3}}$$

$$\Leftrightarrow(x-y+2)\left(\sqrt{x+3}+\frac{1}{\sqrt{y+1}+\sqrt{x+3}}\right)=0.$$

Rõ ràng với điều kiện đang xét phương trình cuối cung chỉ thu được $x-y+2=0$, và như vậy xem như ta đã có nhân tử chung và thực hiện phép thế để giải phương trình thứ nhất nữa là xem như bài toán được giải quyết.

Lời giải: Điều kiện: $\begin{cases} x+3\ge0 \\ y+1\ge0 \\ x-1\ge0 \\ 2y-x-1\ge0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge1 \\ y\ge-1 \\ 2y-x-1\ge0 \end{cases}$.

Phương trình thứ hai trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$(x-y+3)\sqrt{x+3}=\sqrt{y+1}\Leftrightarrow(x-y+2)\sqrt{x+3}=\sqrt{y+1}-\sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow(x-y+2)\sqrt{x+3}=\frac{y-x-2}{\sqrt{y+1}+\sqrt{x+3}}$$

$$\Leftrightarrow (x-y+2)\left(\sqrt{x+3}+\frac{1}{\sqrt{y+1}+\sqrt{x+3}}\right)=0 \qquad (1)$$

Với điều kiện $x\ge 1, y\ge -1$ ta có : $\sqrt{x+3}+\frac{1}{\sqrt{y+1}+\sqrt{x+3}}>0$.

Nên từ (1) ta có : $x-y+2=0\Leftrightarrow y=x+2$.

Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta được phương trình :

$$3\sqrt{x+3}\left(\sqrt{x+3}-4\right)+\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+3}+4\right)+2x+10=0 \ (2)$$

$$\Leftrightarrow 5x+19-12\sqrt{x+3}+\sqrt{(x-1)(x+3)}+4\sqrt{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow 6(x+3)+3\sqrt{(x-1)(x+3)}-12\sqrt{x+3}-2\sqrt{(x-1)(x+3)}-(x-1)+4\sqrt{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x+3}\left(2\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}-4\right)-\sqrt{x-1}\left(2\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)\left(2\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=0\\ 2\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}9(x+3)=x-1\\ 5x+11+4\sqrt{x^2+2x-3}=16\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{13}{4}\\ 4\sqrt{x^2+2x-3}=5-5x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{13}{4}\\ \begin{cases}x\le 1\\ 16x^2+32x-48=25x^2-50x+25\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{13}{4}\\ \begin{cases}x\le 1\\ 9x^2-82x+73=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{13}{4}\\ \begin{cases}x\le 1\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\frac{73}{9}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{13}{4}\\ x=1\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(1;3)$.

Ngoài lời giải phân tích phương trình đó cho thành tích, ta có thể giải phương trình này bằng phương pháp ẩn phụ hóa như sau :

Đặt: $\begin{cases}a=\sqrt{x+3}\\ b=\sqrt{x-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a,b\ge 0\\ x=a^2-3\\ x=b^2+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=a^2+b^2-2\\ a^2-b^2=4\end{cases}$.

Khi đó phương trình (2) trở thành phương trình :

$3a(a-4)+b(a+4)+a^2+b^2+8=0 \Leftrightarrow 4a^2-12a+ab+b^2+4b+8=0$

$\Leftrightarrow 4a^2-12a+ab+b^2+4b+2(a^2-b^2)=0$

$\Leftrightarrow 6a^2+3ab-12a-2ab-b^2+4b=0$

$\Leftrightarrow 3a(2a+b-4)-b(2a+b-4)=0 \Leftrightarrow (3a-b)(2a+b-4)=0$.

Tới đây ta giải như lời giải trên.

Bình luận : Bài toán này có kỉ thuật bắt nhân tử như ví dụ 3.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt[3]{4x^3+(x+3)y^2+3y+1}=\dfrac{(y+1)^2}{\sqrt{4x+2xy+1}}\\ x^2+5+2(x-2)\sqrt{2y}=\sqrt{y}\left(\sqrt{y}-\sqrt{2(x-1)}\right)\end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R}).$$

Phân tích: Với bài hệ này, việc đầu tiên chúng ta nhận định tuy phương trình hai có nhiều yếu tố liên quan và hình thức dễ nhìn nên dễ nghỉ đến việc ẩn phụ hóa. Nhưng tỉ lệ thành công để bắt nhân tử là rất rất ít.

Phương trình thứ nhất có hai căn bậc lệch và các biểu thức trong căn chẳng liên quan gì đến nhau nên nếu muốn bắt nhân tử chung và công phá phương trình này chúng ta sẽ ưu tiên cho phương pháp khử liên hiệp là yếu tố then chốt.

Quan sát ta nhận thấy phương trình thứ nhất chứa hai căn bậc lệch là bậc ba và bậc 2. Do đó ta cần chọn mối quan hệ giữa x,y sao cho biểu thức trong căn bậc ba là lập phương của một hoặc một hiệu, còn trong căn bậc 2 là một bình phương một tổng hoặc một hiệu. Trong cả hai căn ta đều có tính đến có thể biểu thức là hệ số.

Thực tế bài toán không cho phép chúng ta nghỉ đến mối quan hệ nào giữa x,y làm cho biểu thức trong căn bậc ba là một số. Do đó ta chuyển sang yêu cầu sau:

Giả sử $y=ax+b$. Ta cần tìm a,b sao cho điều sau đồng thời được thỏa :

⊕ $\sqrt{4x+2x(ax+b)^2+1}=\sqrt{2ax^2+(4+b)x+1}$ phải là một số chính phương.

⊕ $\sqrt[3]{(4+a^2)x^3+(2ab+3a^2)x^2+(3a+6ab+b^2)x+3b^2+3b+1}$ phải là lập phương của một biểu thức

Nhận thấy với căn bậc hai nếu ta có $a=2,b=0$ ta được $\sqrt{4x^2+4x+1}=2x+1$.

Mặt khác nếu ta đem $a=2,b=0$ vào căn bậc ba ta được

$\sqrt[3]{8x^3+12x^2+6x+1}=\sqrt[3]{(2x+1)^3}=2x+1$.

Lại có : $\dfrac{(ax+b+1)^2}{\sqrt{4x+2y+1}}=2x+1$ khi $a=2,b=0$

Do đó ta thấy mối quan hệ giữa hai biến x, y là $y = 2x$. Tới đây về cơ bản thì chúng ta đã có thể liên hiệp được vì dấu của 2x + 1 đã xác định rõ ràng là dương. Tuy nhiên, nếu liên hiệp như thế này:

$$\sqrt[3]{4x^3 + (x+3)y^2 + 3y + 1} - (2x+1) = \frac{(y+1)^2}{\sqrt{4x+2xy+1}} - (2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2 + (x+3)y^2 + 3y + 1 - (8x^3 + 12x^2 + 6x + 1)}{A} = \frac{(y+1)^4 - (2x+1)^2(4x+2xy+1)}{B}$$

Tới đây nếu phân tích chúng ta vẫn có được nhân tử chung $y - 2x$, tuy nhiên rõ ràng là không lợi về mặt triển khai, trong khi đó bài toán vẫn có liên hiệp theo cách khác lợi thế hơn nhiều.

Như các nhận xét trên ta thấy đại lượng $y + 1 = 2x + 1$ với $y = 2x$ và điều kiện bài toán cũng cho phép xác định được $y + 1 > 0$, cộng với vế phải của phương trình thứ nhất của phương trình thứ nhất lại chứa $(y + 1)^2$ nên ta sẽ tiến hành liên hiệp phương trình thứ nhất như sau :

$$\sqrt[3]{4x^3 + (x+3)y^2 + 3y + 1} - (y+1) = \frac{(y+1)^2}{\sqrt{4x+2xy+1}} - (y+1)$$

$$\sqrt[3]{4x^3 + (x+3)y^2 + 3y + 1} - (y+1) = (y+1)\left(\frac{y+1-\sqrt{4x+2xy+1}}{\sqrt{4x+2xy+1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^3 + xy^2 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y - 1}{C} = (y+1)\left(\frac{y^2 + 2y + 1 - 4x - 2xy - 1}{D}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-y)(2x^2 + xy + y^2)}{C} = -(y+1)\frac{(2x-y)(y+2)}{D}.$$

Và tới đây đã rõ ràng mọi thứ vì C, D luôn dương. Vậy xem như hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} 4x + 2xy + 1 > 0 \\ y \ge 0 \\ x \ge 1 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình :

$$\sqrt[3]{4x^3 + (x+3)y^2 + 3y + 1} - (y+1) = \frac{(y+1)^2}{\sqrt{4x+2xy+1}} - (y+1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{4x^3 + (x+3)y^2 + 3y + 1} - (y+1) = (y+1)\left(\frac{y+1-\sqrt{4x+2xy+1}}{\sqrt{4x+2xy+1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^3+xy^2+3y^2+3y+1-y^3-3y^2-3y+1}{C}=(y+1)\left(\frac{y^2+2y+1-4x-2xy-1}{D}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-y)(2x^2+xy+y^2)}{C}=-(y+1)\frac{(2x-y)(y+2)}{D}$$

$$\Leftrightarrow (2x-y)\left(\frac{2x^2+xy+y^2}{C}+\frac{(y+1)(y+2)}{D}\right)=0\ (1)$$

Nhận xét với điều kiện của bài ta có: $\frac{2x^2+xy+y^2}{C}+\frac{(y+1)(y+2)}{D}>0$.

Trong đó: $D=y+1+\sqrt{4x+2xy+1}>0$

$$C=\sqrt[3]{\left(4x^3+xy^2+3y^2+3y+1\right)^2}+(y+1)\sqrt[3]{4x^3+xy^2+3y^2+3y+1}+(y+1)^2>0.$$

Do đó từ (1) ta có $2x-y=0\Leftrightarrow y=2x$. Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có :

$$x^2+5+4(x-2)\sqrt{x}=2x-2\sqrt{x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow x^2+4+4(x-2)\sqrt{x}=x-2\sqrt{x(x-1)}+x-1$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+4(x-2)\sqrt{x}+4x=\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2+2\sqrt{x}\right)^2=\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2+2\sqrt{x}=\sqrt{x}-\sqrt{x-1} \\ x-2+2\sqrt{x}=\sqrt{x-1}-\sqrt{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}+\sqrt{x-1}+x-2=0 \\ 3\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+x-2=0 \end{array}\right.$$

⊕ Với $3\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+x-2=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)+2\left(\sqrt{x}-1\right)=0\ \ (*)$

Nhận xét với $x\ge 1$ ta có : $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{x-1}>0 \\ \sqrt{x}-1\ge 0\end{cases}\Rightarrow\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)+2\left(\sqrt{x}-1\right)>0$

Do đó ta có $(*)$ vô nghiệm.

⊕ Với $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+x-2=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)+\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-1=0 \\ \sqrt{x-1}=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=2.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(1;2)$.

Bình luận : Đây là bài toán đòi hỏi sự khéo léo và tinh tế trong cách nhìn nhận và đánh giá sao cho bài toán được giải có lợi thế nhất ở cả hai phương trình.

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2xy+5y^2}+y\left(3\sqrt{4x^2+5y^2}-1\right)=x(9x+1) \\ (x+3)\sqrt{3y-5}+3\left(x^3+1\right)=4\sqrt{4x-3}-13x(y-5)+2x \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích: Quan sát hệ, ta thấy hệ này muốn công phá ta cần phải biến đổi phương trình thứ nhất trong hệ và để công phá phương trình thứ nhất trong hệ ta cần sử dụng tới phương pháp khử liên hiệp.

Như phân tích của các ví dụ trước đó, đối với phương trình thứ nhất ta cần dự đoán mối quan hệ giữa hai biến x, y sao cho các biểu thức trong căn bậc hai phải là một số chính phương để thoát căn.

Không khó khăn để nhận thấy khi $x=y$ ta có: $\begin{cases} \sqrt{x^2-2xy+5y^2}=2x \\ \sqrt{4x^2+5y^2}=3x \end{cases}$

Với điều kiện của bài toán ta có $2x>0, 3x>0$ nên ta có thể tiến hành liên hiệp như sau :

$$\sqrt{x^2-2xy+5y^2}-2x+3y\left(\sqrt{4x^2+5y^2}-3x\right)+x-y+9x(y-x)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)(5y+3x)}{\sqrt{x^2-2xy+5y^2}+2x}+\frac{15y\left(y^2-x^2\right)}{\sqrt{4x^2+5y^2}+3x}+(y-x)(9x-1)=0 \ (1)$$

Tới đây ta chú ý với điều kiện ta luôn có: $\begin{cases} 5y+3x>0 \\ y+x>0 \\ 9x-1>0 \end{cases}$ do đó phép liên hiệp thành công.

Thật vậy , ta có

$$(1)\Leftrightarrow (y-x)\left(\frac{5y+3x}{\sqrt{x^2-2xy+5y^2}+2x}+\frac{15y(y+x)}{\sqrt{4x^2+5y^2}+3x}+9x-1\right)=0$$

Ta có biểu thức trong ngoặc luôn dương. Vậy xem như hệ đã được giải quyết.

Lời giải :

Điều kiện : $\begin{cases} x\ge \dfrac{3}{4} \\ y\ge \dfrac{5}{3} \end{cases}$.

Khi đó phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi trở thành phương trình :

$$\sqrt{x^2-2xy+5y^2}-2y+3y\left(\sqrt{4x^2+5y^2}-3x\right)+x-y+9x(y-x)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)(5y+3x)}{\sqrt{x^2-2xy+5y^2}+2x}+\frac{15y(y^2-x^2)}{\sqrt{4x^2+5y^2}+3x}+(y-x)(9x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (y-x)\left(\frac{5y+3x}{\sqrt{x^2-2xy+5y^2}+2x}+\frac{15y(y+x)}{\sqrt{4x^2+5y^2}+3x}+9x-1\right)=0\ (*)$$

Do $\begin{cases} x \ge \frac{3}{4} \\ y \ge \frac{5}{3} \end{cases}$ ta có : $\begin{cases} 5y+3x>0 \\ y+x>0 \\ 9x-1>0 \end{cases}$ nên

$$\frac{5y+3x}{\sqrt{x^2-2xy+5y^2}+2x}+\frac{15y(y+x)}{\sqrt{4x^2+5y^2}+3x}+9x-1>0$$

Do đó từ $(*)$ ta có : $y-x=0 \Leftrightarrow x=y$. Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được :

$$(x+3)\sqrt{3x-5}+3(x^3+1)=4\sqrt{4x-3}-13x(x-5)+2x$$

$$\Leftrightarrow (x+3)\sqrt{3x-5}-4\sqrt{4x-3}+3x^3+13x^2-67x+3=0\ (2).$$

⊕ Cách 1: Sử dụng liên hiệp.

Ta có : $(2) \Leftrightarrow (x+3)\left(\sqrt{3x-5}-2\right)+4\left(3-\sqrt{4x-3}\right)+3x^3+13x^2-65x-3=0$

$$\Leftrightarrow (x+3)\left(\frac{3(x-3)}{\sqrt{3x-5}+2}\right)+4\left(\frac{12-4x}{\sqrt{4x-3}+3}\right)+(x-3)(3x^2+22x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{3(x-3)}{\sqrt{3x-5}+2}-\frac{16}{3+\sqrt{4x-3}}+3x^2+22x+1\right)=0\ (3)$$

Với $x \ge \frac{3}{4}$ ta có: $\begin{cases} -\frac{16}{3+\sqrt{4x-3}} \ge -\frac{1}{48} \\ 3x^2+22x+1 \ge \frac{307}{16} \end{cases} \Leftrightarrow 3x^2+22x+1-\frac{16}{3+\sqrt{4x-3}} \ge \frac{115}{6}>0$

Do đó ta có : $\frac{3(x+3)}{\sqrt{3x-5}+2}-\frac{16}{3+\sqrt{4x-3}}+3x^2+22x+1>0, x \ge \frac{3}{4}$

Nên từ (3) ta có $x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=3$.

⊕ Cách 2 : Sử dụng ẩn phụ.

Đặt : $\begin{cases} a=(x+3)\sqrt{3x-5} \\ b=4\sqrt{4x-3} \end{cases}$ $(a,b \ge 0)$. Ta có : $a^2-b^2=3x^3+13x^2-67x+3$.

Do đó (2) trở thành: $a-b+a^2-b^2=0\Leftrightarrow(a-b)(a+b+1)=0\Leftrightarrow a=b$

Từ đó ta có : $(x+3)\sqrt{3x-5}=4\sqrt{4x-3}\Leftrightarrow 3x^3+13x^2-67x+3=0$

$$\Leftrightarrow(x-3)\left(3x^2+22x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-3=0\\3x^2+22x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=\dfrac{-11+2\sqrt{31}}{2}\\x=\dfrac{-11-2\sqrt{31}}{2}\end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm là $x=3\Rightarrow y=3$.

Vậy qua hai cách ta có nghiệm của hệ là (x ; y) = (3 ; 3).

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(4x-1)\left(\sqrt{x^2+y}-x\right)-2x-y+2=2(2x-y-1)\sqrt{x}\\x^2(x-2)-5x+y=x\sqrt{4\sqrt{4x-1}+2x-y}\end{cases}\quad(x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích : Với hệ này, ta rõ ràng bỏ qua việc nghỉ đến biến đổi phương trình thứ hai trong hệ. Với cấu trúc của phương trình thứ nhất trong hệ, ta hoàn toàn chỉ nghỉ đến một điều nếu có sự ràng buộc nào giữa x,y thì chúng ta phải công phá phương trình thứ nhất trong hệ bằng phép liên hiệp.

Trước tiên ta để ý cả hai phương trình đều chứa $4x-1$ nên theo cảm giác làm toán ta thử ngay giá trị đặc biệt $x=\frac{1}{4}$ có thỏa hệ không?

Tuy nhiên với phép thử ta thấy $x=\frac{1}{4}$ thỏa phương trình thứ nhất với mọi y, còn thay vào phương trình thứ hai ta phải giải phương trình mới tìm được y.

Do đó trước tiên ta nhận định một điều chắc chắn là phương trình thứ nhất có nghiệm $x=\frac{1}{4}$ nên ta tiến hành tách nhân tử $4x-1$.

Cụ thể ta có :

$$(4x-1)\sqrt{x^2+y}-x(4x-1)-2x-y+2=(2x-y+1)\left(2\sqrt{x}-1\right)+2x-y+1$$

$$\Leftrightarrow(4x-1)\sqrt{x^2+y}-x(4x-1)-(4x-1)=(2x-y+1)\left(2\sqrt{x}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow(4x-1)\left(\sqrt{x^2+y}-(x+1)\right)+(y-2x-1)\frac{4x-1}{2\sqrt{x}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow(4x-1)\left(\sqrt{x^2+y}-(x+1)+(y-2x-1)\frac{1}{2\sqrt{x}+1}\right)=0\ (1)$$

Ở (1) ta để ý thấy được $\sqrt{x^2+y}-(x+1)=\dfrac{x^2+y-x^2-2x-1}{\sqrt{x^2+y}+x+1}$ do đó ta tiến hành tách (1) tiếp theo như sau :

$$(1)\Leftrightarrow(4x-1)\left(\frac{y-2x-1}{\sqrt{x^2+y}+x+1}+(y-2x-1)\frac{1}{2\sqrt{x}+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(4x-1)(y-2x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y}+x+1}+\frac{1}{2\sqrt{x}+1}\right)=0$$

Và tới đây xem như hệ đã cơ bản được giải quyết.

Bây giờ ta đi vào lời giải chi tiết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}x\ge 0\\4x-1\ge 0\\4\sqrt{4x-1}+2x-y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge \dfrac{1}{4}\\4\sqrt{4x-1}+2x-y\ge 0\end{cases}$ (i)

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi trở thành phương trình :

$$(4x-1)\sqrt{x^2+y}-x(4x-1)-2x-y+2=(2x-y+1)\left(2\sqrt{x}-1\right)+2x-y+1$$

$$\Leftrightarrow(4x-1)\sqrt{x^2+y}-x(4x-1)-(4x-1)=(2x-y+1)\left(2\sqrt{x}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow(4x-1)\left(\sqrt{x^2+y}-(x+1)\right)+(y-2x-1)\frac{4x-1}{2\sqrt{x}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow(4x-1)\left(\sqrt{x^2+y}-(x+1)+(y-2x-1)\frac{1}{2\sqrt{x}+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(4x-1)\left(\frac{y-2x-1}{\sqrt{x^2+y}+x+1}+(y-2x-1)\frac{1}{2\sqrt{x}+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(4x-1)(y-2x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y}+x+1}+\frac{1}{2\sqrt{x}+1}\right)=0\ (*)$$

Với điều kiện $x\ge\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y}+x+1}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}+1}>0$.

Do đó từ $(*)$ ta có : $\left[\begin{array}{l}4x-1=0\\y-2x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{4}\\y=2x+1\end{array}\right.$.

⊕ Với $x=\dfrac{1}{4}$ ta thay vào phương trình thứ hai ta được phương trình :

$$y-\frac{87}{64}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}-y}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge\frac{87}{64}\\ y^2-\frac{87}{32}y+\frac{7569}{4096}=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}-y\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge\frac{87}{64}\\ y^2-\frac{85}{32}y+\frac{7441}{4096}=0\end{cases}\text{ (hệ vô nghiệm).}$$

⊕ Với $y=2x+1$ ta thay vào phương trình thứ hai ta được phương trình :

$$x^3-2x^2-3x+1=x\sqrt{4\sqrt{4x-1}-1}\Leftrightarrow x^2-3x^2-3x+1=x\left(\sqrt{4\sqrt{4x-1}-1}-x\right)\ (2)$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\left(x^2-4x+1\right)=x\left(\frac{4\sqrt{4x-1}-1-x^2}{\sqrt{4\sqrt{4x-1}-1}+x}\right)$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\left(x^2-4x+1\right)+x\left(\frac{x^2+1-4\sqrt{4x-1}}{\sqrt{4\sqrt{4x-1}-1}+x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\left(x^2-4x+1\right)+x\left(\frac{x^4+2x^2-16x+17}{\left(\sqrt{4\sqrt{4x-1}-1}+x\right)\left(x^2+1+4\sqrt{4x-1}\right)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\left(x^2-4x+1\right)+x\left(\frac{\left(x^2-4x+1\right)\left(x^2+4x+17\right)}{\left(\sqrt{4\sqrt{4x-1}-1}+x\right)\left(x^2+1+4\sqrt{4x-1}\right)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-4x+1\right)\left(x+1+\frac{x\left(x^2+4x+17\right)}{\left(\sqrt{4\sqrt{4x-1}-1}+x\right)\left(x^2+1+4\sqrt{4x-1}\right)}\right)=0\ (*')$$

Điều kiện lúc này của phương trình (2) là : $\begin{cases}x\ge\frac{1}{4}\\ \sqrt{4x-1}\ge\frac{1}{16}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{1}{4}\\ x\ge\frac{17}{16}\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\frac{17}{16}$.

Với điều kiện $x\ge\frac{17}{16}$ ta có : $x+1+\frac{x\left(x^2+4x+17\right)}{\left(\sqrt{4\sqrt{4x-1}-1}+x\right)\left(x^2+1+4\sqrt{4x-1}\right)}>0$.

Do đó từ $(*')$ ta có : $x^2-4x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{3}\Rightarrow y=5-2\sqrt{3}\\ x=2+\sqrt{3}\Rightarrow y=5+2\sqrt{3}\end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện (i) ta có nghiệm của hệ :

$(x,y)=\left\{\left(2-\sqrt{3};5-2\sqrt{3}\right);\left(2+\sqrt{3};5+2\sqrt{3}\right)\right\}.$

.**Bình luận:** Bài toán này, độ khó chính yếu là dấu hiệu nhận ra $x=\frac{1}{4}$ nghiệm đúng với mọi y ở phương trình thứ nhất và cách giải của phương trình thứ hai sau khi thay thế, đòi hỏi sự khéo léo về biến đổi .

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{x^2+y}+y=\sqrt{x^4+x^3}+x \\ x+\sqrt{y}+\sqrt{x-1}+\sqrt{y(x-1)}=\frac{9}{2} \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích: Với hệ này chúng ta nếu chỉ đơn thuần nhìn vào phương trình thứ hai trong hệ nhận thấy có sự xuất hiện của hai đại lượng $\sqrt{y}+\sqrt{x-1},\sqrt{y(x-1)}$ mà nghỉ ngay đến việc sẽ công phá phương trình thứ hai trong hệ là một điều sai lầm, vì chúng ta còn có một đại lượng lẻ loi chẳng liên quan gì đến sự nhận xét ban đầu của chúng ta, đó là đại lượng x.

Do đó chúng ta chuyển trọng tâm sang công phá phương trình thứ nhất trong hệ. Với cấu trúc như thế này thì việc nghỉ đến liên hiệp là điều đầu tiên và nhẩm được khi $x=y$ thì ta có: $x\sqrt{x^2+y}+y=x\sqrt{x^2+x}+x=\sqrt{x^4+x^3}+x$.

Vậy ta tiến hành liên hiệp phương trình thứ nhất trong hệ như sau :

$$x\left(\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x^2+x}\right)+y-x=0\Leftrightarrow x\left(\frac{y-x}{\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}}\right)+y-x=0$$

$$\Leftrightarrow (y-x)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}}+1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ \sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}+x=0 \end{array}\right.$$

Không khó nhận ra với $x\ge 1$ ta có $\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}+x=0$ vô nghiệm.

Và như thế nút thắt của bài toán đã được gỡ và hệ cơ bản xem như đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge 1 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình :

$$x\left(\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x^2+x}\right)+y-x=0\Leftrightarrow x\left(\frac{y-x}{\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}}\right)+y-x=0$$

$$\Leftrightarrow (y-x)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}}+1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ \sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}+x=0 \end{array}\right.$$

Nhận xét với $x \ge 1$ ta có $\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}+x=0$ vô nghiệm

Thay $x=y$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$x+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x(x-1)}=\frac{9}{2} \qquad (1)$$

⊕ Cách 1 : Sử dụng ẩn phụ.

Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}, t \ge 1$.

Ta có : $t^2=x+x-1+2\sqrt{x(x-1)} \Leftrightarrow x+\sqrt{x(x-1)}=\frac{t^2+1}{2}$

Do đó (1) trở thành phương trình : $t+\frac{t^2+1}{2}=\frac{9}{2} \Leftrightarrow t^2+2t-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-4 \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta có $t=2 \Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{x-1}=2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x(x-1)}=5-2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x \ge 0 \\ 4x^2-4x=25-20x+4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{5}{2} \\ x=\frac{25}{16} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{25}{16}$$

Đối chiếu điều kiện ta có $x=\frac{25}{16} \Rightarrow y=\frac{25}{16}$.

⊕ Cách 2 : Sử dụng phép nhân lượng liên hiệp.

Ta có $(1) \Leftrightarrow x-\frac{25}{16}+\sqrt{x}-\frac{5}{4}+\sqrt{x-1}-\frac{3}{4}+\sqrt{x^2-1}-\frac{15}{16}=0$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{25}{16}\right)\underbrace{\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}+\frac{5}{4}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\frac{3}{4}}+\frac{16x+9}{9\left(\sqrt{x^2-1}+\frac{15}{16}\right)}\right)}_{T}=0$$

$\Leftrightarrow x-\frac{25}{16}=0 \Leftrightarrow x=\frac{25}{26}$ vì $T>0, \forall x \ge 1$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x=\frac{25}{16} \Rightarrow y=\frac{25}{16}$.

Vậy qua hai cách ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left(\frac{25}{16};\frac{25}{16}\right)$.

Bình luận: Bài toán này khá cơ bản, mục đích của chúng ta nhẩm nghiệm để hai vế phương trình bằng nhau chứ không phải là thoát căn. Về phương trình thứ hai khi thay quan hệ giữa hai biến vào thì yếu tố giải nó bằng ẩn phụ là hướng đi ưu tiên hàng đầu vì đó là loại phương trình vô tỉ đặt ẩn phụ cơ bản, còn cách 2 chỉ mang tính chất tham khảo và rèn luyện kỉ năng tốt hơn thôi chứ không phải áp dụng cho đa phần phương trình có dạng này.

Ví dụ 9:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x^2+y\right)\sqrt{x-y+6}=2x^2-x+3y-2 \\ \sqrt{x\left(10-y\right)-12}+1=\dfrac{y-x}{\sqrt{y-4}+\sqrt{6-x}} \end{cases}$ $\left(x,y\in \mathbb{R}\right)$

Phân tích: Với cấu trúc hệ này, chúng ta nhận thấy, rõ ràng phương trình thứ hai không giúp chúng ta được mối liên kết nào có thể tìm được. Do đó ta sẽ bắt đầu từ phương trình thứ nhất trong hệ.

Phương trình thứ nhất trong hệ chỉ chứa một căn thức, theo nguyên tắc thì thường chúng ta sẽ ẩn phụ hóa, nhưng trong trường hợp này việc ẩn phụ hóa để mất căn cũng chẳng giúp chúng ta được sự gắn kết nào giữa ẩn phụ mới với các ẩn ban đầu, nên nếu phương trình này giúp chúng ta bắt nhân tử và thực hiện được phép thế thì rõ ràng phép nhân liên hiệp là hữu ích nhất.

Việc đại lượng trong căn thức chứa hai biến x,y có số mũ là 1 thì việc suy nghỉ thoát căn sẽ giúp chúng ta biến đại lượng $x-y+6$ là hằng số chính phương là ưu tiên hàng đầu. Với định hướng này, chúng ta cần phải làm mất đi đại lượng x trong căn. Do đó ta có mối quan hệ giữa hai biến x,y lúc này được giả tạm là $y=x+b$.

Khi đó ta có : $\sqrt{x-y+6}=\sqrt{x-\left(x+b\right)+6}=\sqrt{6-b}$.

Với $b=2\Rightarrow\sqrt{6-b}=2\Rightarrow y=x+2$. Lúc này với quan hệ $y=x+2$ ta nhận thấy hai vế phương trình thứ nhất bằng nhau.

Do đó ta tiến hành tách phương trình thứ nhất trong hệ trở thành :

$$\left(x^2+y\right)\left(\sqrt{x-y+6}-2\right)+x-y+2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+y\right)\left(\frac{x-y+2}{\sqrt{x-y+6}+2}\right)+\left(x-y+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-y+2\right)\left(\frac{x^2+y}{\sqrt{x-y+6}+2}+1\right)=0.$$

Với điều kiện của bài toán là $y>4\Rightarrow x^2+y>0$. Do đó biểu thức trong ngoặc đã rõ ràng về dấu nên hệ cơ bản đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x-y+6\ge 0 \\ y\ge 4 \\ x\le 6 \\ 8x\left(3-y\right)-12\ge 0 \\ y-x\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 0\le y-x\le 6 \\ y\ge 4 \\ x\le 6 \\ 8x\left(3-y\right)-12\ge 0 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hê được biến đổi thành phương trình :

$$\left(x^2+y\right)\sqrt{x-y+6}=2\left(x^2+y\right)-\left(x-y+2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+y\right)\left(\sqrt{x-y+6}-2\right)+x-y+2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+y\right)\left(\frac{x-y+2}{\sqrt{x-y+6}+2}\right)+x-y+2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-y+2\right)\left(\frac{x^2+y}{\sqrt{x-y+6}+2}+1\right)=0 \qquad (1)$$

Nhận xét với điều kiện của bài toán ta luôn có : $\frac{x^2+y}{\sqrt{x-y+6}+2}+1>0$.

Do đó từ (1) ta có : $x-y+2=0\Leftrightarrow y=x+2$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$\sqrt{x\left(10-x-2\right)-12}+1=\frac{2}{\sqrt{x+2-4}+\sqrt{6-x}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{-x^2+8x-12}+1=\frac{2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{6-x}} \ (2)$$

Đặt $t=\sqrt{x-2}+\sqrt{6-x}, t>0$. Khi đó ta có : $\frac{t^2-4}{2}=2\sqrt{-x^2+8x-12}$.

Thay vào (2) ta được phương trình : $\frac{t^2-4}{2}+1=\frac{2}{t}\Leftrightarrow t^3-2t-4=0$

$$\Leftrightarrow\left(t-2\right)\left(t^2+2t+2\right)=0\Leftrightarrow t-2=0\Leftrightarrow t=2$$

vì $t^2+2t+2=\left(t+1\right)^2+1>0,\forall t>0$.

Với $t=2\Leftrightarrow\sqrt{x-2}+\sqrt{6-x}=2\Leftrightarrow 4+2\sqrt{-x^2+8x-12}=4$

$$\Leftrightarrow\sqrt{-x^2+8x-12}=0\Leftrightarrow -x^2+8x-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\Rightarrow y=4\\ x=6\Rightarrow y=8\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là $\left(x,y\right)=\left\{\left(2;4\right);\left(6;8\right)\right\}$.

Bình luận : Về cơ bản nếu bài toán có chứa một căn thức, thì ưu tiên hàng đầu là ẩn phụ. Nhưng trong trường hợp bài toán không tìm được mối liên quan giữa ẩn phụ và các ẩn ban đầu thì chúng ta có thể nghỉ đến phép liên hiệp trong điều kiện cho phép các đánh giá sau cùng được thuận lợi, đó cũng là một điểm mạnh của phương pháp nhân tử hóa bằng phép liên hiệp.

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\sqrt{y-x+1}+2x=\sqrt[3]{y-x^3-2x^2}+\sqrt{9x^2-4x+4} \\ x\left(2\sqrt{y-3x^2}-\sqrt{4y+9x^2}\right)=3\left(3x^2-y\right) \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích : Với hệ này, phương trình thứ nhất chứa các căn bậc lệch và các biểu thức dưới căn không liên quan gì tới nhau và cũng không nhận được tín hiệu có thể kết nối để dùng phương án gì để công phá. Do đó chúng ta chuyển sang trọng tâm công phá ở phương trình thứ hai.

Ở Phương trình thứ hai ta nhận thấy có đại lượng xuất hiện hai lần đó là $y-3x^2$, cấu trúc phương trình cho ta nghỉ đến phép liên hiệp.

Như các ví dụ trên đã phân tích, ta nhẩm thấy nếu $y=4x^2$ thì hai biểu thức trong căn thoát căn được và hai vế phương trình bằng nhau.

Tuy nhiên, các bạn chú ý là khi $y=4x^2 \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{y-3x^2}=2x \\ \sqrt{4y+9x^2}=5x \end{cases}$ là không chuẩn vì chúng ta chưa biết dấu của x

Do đó, ta cần phải xác định rõ dấu của x trước khi chúng ta tiến hành liên hiệp.

Điều này, có được là qua nhận định sau ở phương trình thứ hai :

$4\left(y-3x^2\right)-\left(4y+9x^2\right)=-21x^2$.

Nên từ hai ta có :

$$x\left(2\sqrt{y-3x^2}-\sqrt{4y+9x^2}\right)=\frac{-21x^2}{2\sqrt{y-3x^2}+\sqrt{4y+9x^2}}=3\left(3x^2-y\right).$$

Mà ta lại có : $y-3x^2\ge 0 \Leftrightarrow 3\left(3x^2-y\right)\le 0$ nên ta có: $x\ge 0$.

Do đó ta tiến hành liên hiệp như sau.

Cụ thể khi $y=4x^2 \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{y-3x^2}=2x \\ \sqrt{4y+9x^2}=5x \end{cases}$

Lúc này ta có phương trình thứ hai trong hệ được biến đổi thành :

$$2x\left(\sqrt{y-3x^2}-x\right)+5x^2-x\sqrt{4y+9x^2}+3\left(y-4x^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x\left(y-4x^2\right)}{\sqrt{y-3x^2}+x}-\frac{4x^2\left(y-4x^2\right)}{5x^2+x\sqrt{4y+9x^2}}+3\left(y-4x^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(y-4x^2\right)\left(\frac{2x}{\sqrt{y-3x^2}+x}-\frac{4x^2}{5x^2+x\sqrt{4y+9x^2}}+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(y-4x^2\right)\left(\frac{2x}{\sqrt{y-3x^2}+x}+\frac{11x^2+3x\sqrt{4y+9x^2}}{5x^2+x\sqrt{4y+9x^2}}\right)=0.$$

Tuy nhiên nếu đến đây chúng ta vội kết luận thì e rằng chung ta đã có một sai lầm nghiêm trọng. Khi liên hiệp thì biểu thức dưới mẫu phải khác 0. Nhưng với cách liên hiệp của chúng ta thì khi $(x,y)=(0;0)$ thì toàn bộ mẫu thức của chúng ta đều bằng 0. Do đó kế hoạch liên hiệp đã phá sản hoàn toàn. Để khắc phục điều này chúng ta cần kiểm tra trước nghiệm $(x,y)=(0;0)$ đối với hệ.

Và như vậy xem như nút thắt của bài toán đã gỡ và hệ cơ bản đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} y-3x^2\ge 0 \\ y-x+1\ge 0\end{cases}$.

Với $(x,y)=(0;0)$ hệ phương trình được thỏa.

Xét với $x\ne 0, y\ne 0$. Từ phương trình thứ hai ta có :

$$x\left(2\sqrt{y-3x^2}-\sqrt{4y+9x^2}\right)=\frac{-21x^3}{2\sqrt{y-3x^2}+\sqrt{4y+9x^2}}=3\left(3x^2-y\right)$$

Mà : $y-3x^2\ge 0\Leftrightarrow 3\left(3x^2-y\right)\le 0\Rightarrow x>0\Rightarrow y\ge 3x^2>0$

Mặt khác từ phương trình thứ hai trong hệ ta có :

$$2x\left(\sqrt{y-3x^2}-x\right)+5x^2-x\sqrt{4y+9x^2}+3\left(y-4x^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x\left(y-4x^2\right)}{\sqrt{y-3x^2}+x}-\frac{4x^2\left(y-4x^2\right)}{5x^2+x\sqrt{4y+9x^2}}+3\left(y-4x^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(y-4x^2\right)\left(\frac{2x}{\sqrt{y-3x^2}+x}-\frac{4x^2}{5x^2+x\sqrt{4y+9x^2}}+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(y-4x^2\right)\left(\frac{2x}{\sqrt{y-3x^2}+x}+\frac{11x^2+3x\sqrt{4y+9x^2}}{5x^2+x\sqrt{4y+9x^2}}\right)=0 \ (1)$$

Từ điều nhận xét trên ta có: $\dfrac{2x}{\sqrt{y-3x^2}+x}+\dfrac{11x^2+3x\sqrt{4y+9x^2}}{5x^2+x\sqrt{4y+9x^2}}>0$

Nên từ (1) ta có $y-4x^2=0\Leftrightarrow y=4x^2$.

Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$$2\sqrt{4x^2-x+1}+2x=\sqrt[3]{2x^2-x^3}+\sqrt{9x^2-4x+4} \ (2).$$

Chia hai vế phương trình (2) cho $x>0$ ta có :

$$(2)\Leftrightarrow\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2=3\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}+\sqrt{9-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}\quad(3)$$

Đặt $t=\frac{1}{x}>0$ ta có $(3)\Leftrightarrow\sqrt{t^2-t+4}+2=3\sqrt[3]{2t-1}+\sqrt{4t^2-4t+9}\ (4)$

Đặt $a=\sqrt[3]{2t-1}\Leftrightarrow t=\frac{a^3+1}{2}$. Lúc đó phương trình (4) trở thành phương trình :

$$\sqrt{a^6+8}+3a=2+\sqrt{a^6+15}\Leftrightarrow\sqrt{a^6+8}-\sqrt{a^6+15}+3a-2=0\ (5)$$

Nhận xét nếu $a\le\frac{2}{3}$ thì $\sqrt{a^6+8}-\sqrt{a^6+15}+3a-2<0$ nên (5) vô nghiệm.

Mặt khác : $\sqrt{a^6+8}-\sqrt{a^6+15}<0\Rightarrow 2-3a<0\Leftrightarrow a>\frac{2}{3}$

Xét $a>\frac{2}{3}$. Xét hàm số $f(a)=\sqrt{a^6+8}-\sqrt{a^6+15}+3a-2, a>\frac{2}{3}$

Ta có $f'(a)=3+3a^5\left(\frac{\sqrt{a^6+15}-\sqrt{a^6+8}}{\sqrt{(a^6+8)(a^6+15)}}\right)>0$, $a>\frac{2}{3}$.

Do đó hàm số $f(a)$ đồng biến với $a>\frac{2}{3}$. Do đó $f(a)=0$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Mà $f(1)=0\Leftrightarrow a=1$ là nghiệm duy nhất của (5).

Với $a=1\Leftrightarrow\sqrt[3]{2t-1}=1\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow\frac{1}{x}=1\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=4$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\{(0;0);(1;4)\}$.

Bình luận : Ở bài toán này, chỗ xử lí điều kiện $x>0$ là điểm đáng chú ý và tinh tế nhất của bài toán này.

Đối với phương trình thứ hai ngoài cách liên hiệp như trong phân tích và lời giải thì ta còn có cách khác liên hiệp như sau :

$$2x\left(\sqrt{y-3x^2}-x\right)+3y-7x^2-x\sqrt{4y+9x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x(y-4x^2)}{\sqrt{y-3x^2}+x}+\frac{(y-4x^2)(9y-10x^2)}{3y-7x^2+x\sqrt{4y+9x^2}}=0$$

Với chú ý từ điều kiện ta có : $3y-7x^2>0, 9y-10x^2>0$ và ta cũng thu được kết quả như trong lời giải.

Ở lời giải cho phương trình thứ (5) trong lời giải. Chúng ta chú ý rằng nếu chúng ta xuất phát từ ý tưởng : $\sqrt{a^6+8}-\sqrt{a^6+15}+3a-2=0$

Nhận xét: $a<0$ vô nghiệm và $a>0$ thì xét hàm số như trong lời giải thì chưa chuẩn lắm.

Ví dụ 11 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+2\sqrt{xy}=5x\\ (y^2+6x+13)\sqrt{4x^2+y^2-1}=(5y+16)x^2+8x+11\end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích: Với phương trình thứ hai trong hệ, tuy chỉ chứa một căn thức nhưng chúng ta chẳng có thể làm gì với nó, vì nếu có ẩn phụ hóa đi chăng nữa cũng không thu được gì liên quan tới nhau.

Phương trình thứ nhất tuy chứa nhiều căn thức nhưng bên phải của phương trình lại chẳng chứa gì căn, với cấu trúc của phương trình thứ nhất giúp chúng ta nghỉ đến việc liên hiệp.

Và như các ví dụ trước đã phân tích nên với với phương trình này mục đích hàng đầu của chúng ta là nhẩm nghiệm để thoát căn.

Nhận thấy $y=x$ ta có: $\begin{cases}\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}=3x\\ 2\sqrt{xy}=2x\end{cases}$. Và điều này lại đúng với phương trình thứ nhất.

Tuy nhiên, như ví dụ trước ta nhận thấy nếu không biết rõ về dấu của x ta đưa như nhận xét trên là không chuẩn. Do đó ta cần biện luận dấu cho x .

Điều này không khó vì từ phương trình thứ nhất ta có :

$\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+2\sqrt{xy}=5x\Rightarrow x\ge 0$.

Với $x=0\Rightarrow y=0$, thay vào hệ ta có (x;y) = (0;0) không thỏa hệ.

Do đó ta chỉ cần xét x > 0, y > 0. Với nhận xét này ta tiến hành liên hiệp phương trình thứ nhất trong hệ như sau :

$$\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}-3x+2\left(\sqrt{xy}-x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{11x^2-(2x-y)(x+y)-9x^2}{\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+3x}+2\left(\frac{xy-x^2}{\sqrt{xy}+x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y(y-x)}{\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+3x}+\frac{2(y-x)x}{\sqrt{xy}+x}=0$$

$$\Leftrightarrow (y-x)\left(\frac{y}{\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+3x}+\frac{2x}{\sqrt{xy}+x}\right)=0$$

Và như vậy mọi thứ đã có thể giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} 11x^2-(2x-y)(x+y)\ge 0 \\ xy\ge 0 \\ 4x^2+y^2-1\ge 0 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta suy ra $x\ge 0$. Kết hợp với điều kiện $x\ge 0$ thì từ điều kiện $xy\ge 0\Rightarrow y\ge 0$.

Nếu $(x,y)=(0;0)$ thì $\sqrt{4x^2+y^2-1}$ không xác định. Do đó hệ vô nghiệm.

Vậy $x>0, y>0$. Với điều kiện này phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành :

$$\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}-3x+2\left(\sqrt{xy}-x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{11x^2-(2x-y)(x+y)-9x^2}{\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+3x}+2\left(\frac{xy-x^2}{\sqrt{xy}+x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y(y-x)}{\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+3x}+\frac{2(y-x)x}{\sqrt{xy}+x}=0$$

$$\Leftrightarrow (y-x)\left(\frac{y}{\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+3x}+\frac{2x}{\sqrt{xy}+x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y-x=0\Leftrightarrow y=x \text{ vì } \frac{y}{\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+3x}+\frac{2x}{\sqrt{xy}+x}>0.$$

Thay $y=x$ vào phương trình thứ hai ta có phương trình :

$$\left(x^2+6x+13\right)\sqrt{5x^2-1}=5x^3+16x^2+8x+11$$

$$\Leftrightarrow (x+3)\left(5x^2-1\right)-\left(x^2+6x+13\right)\sqrt{5x^2-1}+x^2+9x+14=0 \ (1).$$

Điều kiện : $\begin{cases} x>0 \\ 5x^2-1\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow x\ge \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Đặt $t=\sqrt{5x^2-1}, t>0$. Lúc đó phương trình (1) được biến đổi thành phương trình:

$$(x+3)t^2-\left(x^2+6x+13\right)t+x^2+9x+14=0 \ (2).$$

Xem phương trình (2) là phương trình bậc hai theo biến t. Phuong trình này có :

$$\Delta=\left(x^2+6x+13\right)^2-4(x+3)\left(x^2+9x+14\right)=\left(x^2+4x-1\right)^2$$

Suy ra phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt :

$$\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{x^2+6x+13+x^2+4x-1}{2(x+3)}=x+2 \\ t=\dfrac{x^2+6x+13-x^2-4x+1}{2(x+3)}=\dfrac{x+7}{x+3} \end{array}\right.$$

⊕ Với $t=x+2 \Leftrightarrow \sqrt{5x^2-1}=x+2 \Leftrightarrow 4x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1-\sqrt{6}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta có: $x=\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}=y$.

⊕ Với $t=\dfrac{x+7}{x+3} \Leftrightarrow \sqrt{5x^2-1}=\dfrac{x+7}{x+3} \Leftrightarrow (x+3)\sqrt{5x^2-1}=x+7$

$\Leftrightarrow (x+3)^2\left(5x^2-1\right)=(x+7)^2 \Leftrightarrow 5x^4+30x^3+43x^2-20x-58=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\underbrace{\left(5x^3+35x^2+78x+58\right)}_{T}=0 \Leftrightarrow x=1=y$ vô lí vì $T>0, \forall x \ge \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x,y)=\left\{(1;1);\left(\dfrac{1+\sqrt{6}}{2};\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}\right)\right\}$.

Bình luận: Lại một lần nữa ta thấy sự thú vị của bài toán liên hiệp nằm ở việc đánh giá dấu của biểu thức cần liên hiệp là một điều đòi hỏi sự tính tế và sự tinh tế này không khó nếu chúng ta tư duy và thuần thục các kỉ năng nhìn tổng quát toàn bộ hệ. Ví dụ sau đây sẽ làm rõ hơn về điều đó.

Ví dụ 12:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+(y-6)^2=y+13x+27 \\ \sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}+4\sqrt{xy}=7y \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Hệ này có cấu trúc rất gọn nhẹ, nhưng để công phá nó chúng ta cũng phải có một chút sức lực và độ khéo léo, nếu không nó cũng sẵn sàng trở thành một bài toán không hề đơn giản.

Nhận định ban đầu, phương trình thứ nhất trong hệ có hình thức quá quen thuộc, đó là phương trình bậc hai hai ẩn. Với loại này chúng ta đã biết khi nhìn và muốn chạm vào thì cần kiểm tra và hy vọng.

Kiểm tra thấy phương trình thứ nhất có thể phân tích được thành nhân tử.

Tính delta thì chúng ta lại không được delta chính phương.

Do đó việc công phá phương trình thứ nhất tạm thời dừng lại tại bước này.
Chúng ta đành dành sự quan tâm vào công phá phương trình thứ hai. Hình thức phương trình thứ giống với hình thức phương trình thứ nhất ở ví dụ 9.
Về mặt tư tưởng chúng ta cũng sẽ sử dụng liên hiệp để công phá. Và ta tìm được mối quan hệ giữa hai biến là $x = y$ nên ta tiến hành liên hiệp như sau :

$$\sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}-3y+4\sqrt{xy}-4y=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2+(2x-3)(x-y)-9y^2}{\sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}+3y}+4\frac{xy-y^2}{\sqrt{xy}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{11x+9y-3}{\sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}+3y}+\frac{4y}{\sqrt{xy}+y}\right)=0$$

Về đánh giá dấu của y tương tự như ví dụ 9. Vấn đề nãy sinh bây giờ đó là với điều kiện mà ta có $x>0, y>0$ thì dấu của $11x+9y-3$ ta không hề xác định được dấu nên chưa thể có kết luận gì biểu thức trong ngoặc. Điều đó cũng có nghĩa là chúng ta vẫn chưa gỡ được nút thắt của bài toán.
Vấn đề bây giờ ở phương trình thứ hai chúng ta đã cố gắng khai thác hết tất cả những yếu tố có được có lợi cho chúng ta trong việc giải quyết hệ này, nhưng vẫn còn bị "kẹt" ở đại lượng $11x+9y-3$ nên ta buộc lòng quay về lại phương trình thứ nhất xem như thế nào ?
Khai triển phương trình thứ nhất ta được phương trình :

$$x^2+y^2-13x-13y+9=0 \ (1)$$

Chúng ta lưu ý mọi trọng tâm của chúng ta chính là xét dấu cho đại lượng $11x+9y-3$ nên ta sẽ tách trong (1) chứa đại lượng này rồi ta sẽ tính tiếp.
Do đó

$$(1) \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-4y-11x-9y+9=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=11x+9y-4$$

Không khó để nhận thấy

$$(x-1)^2+(y-2)^2 \ge 0 \Rightarrow 11x+9y-4 \ge 0 \Rightarrow 11x+9y-3>0.$$

Và tới đây mọi chuyện đã rõ ràng. Do đó ta đi vào giải quyết hệ.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} 9x^2+(2x-3)(x-y)\ge 0 \\ xy \ge 0 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ hai trong hệ ta suy ra $y \ge 0$. Kết hợp điều này với điều kiện $xy \ge 0$ ta có $x \ge 0$.

Mặt khác (x; y) = (0; 0) không thỏa hệ nên ta chỉ xét $x>0, y>0$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$x^2+y^2-13x-13y+9=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=11x+9y-4$.

Vì $(x-1)^2+(y-2)^2 \ge 0 \Rightarrow 11x+9y-4 \ge 0 \Rightarrow 11x+9y-3>0$.

Phương trình thứ hai được biến đổi thành phương trình :

$\sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}-3y+4\sqrt{xy}-4y=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{9x^2+(2x-3)(x-y)-9y^2}{\sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}+3y}+4\left(\dfrac{xy-y^2}{\sqrt{xy}+y}\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)\underbrace{\left(\dfrac{11x+9y-3}{\sqrt{11x^2+(2x-3)(x-y)}+3y}+\dfrac{4y}{\sqrt{xy}+y}\right)}_{T}=0 \Leftrightarrow y=x$ vì $T>0$.

Thay $y=x$ vào phương trình thứ nhất ta có: $2x^2-26x+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{13+\sqrt{151}}{2} \\ x=\dfrac{13-\sqrt{151}}{2} \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left(\dfrac{13+\sqrt{151}}{2};\dfrac{13+\sqrt{151}}{2}\right)$.

Bình luận : Rõ ràng bài toán này mạnh hơn bài toán ở ví dụ 9 và chính vì thế nó có độ khó hơn và tinh tế hơn. Sự kết hợp này cũng là một trường hợp hay gặp đối với giải hệ bằng phương pháp liên hiệp.

Ví dụ 13: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{5x^2-2x(2y-3)+1}+\sqrt{3x^2-2(y^2-5x)+11}=x+y+3 \\ x(x-2y)+y(y-2)=-2-x \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích : Với hệ này, ta nhận thấy nếu khai triển phương trình thứ hai trong hệ ta sẽ có được phương trình bậc hai theo hai biến x, y. Bằng cách kiểm tra, chúng ta nhận thấy phương trình này không phân tích được nhân tử. Do đó muốn giải được hệ này, chúng ta buộc lòng phải công phá phương trình thứ nhất trong hệ.

Do cấu trúc của phương trình thứ nhất chúng ta không thể mạo hiểm với việc chuyển vế sử dụng phép lũy thừa để khử căn được và các đại lượng trong căn thức và ngoài ngoài căn thức không giúp chúng ta nghỉ được một phương án nào khác. Nên để giải hệ này ta cần công phá phương trình thứ nhất trong hệ bằng phép liên hiệp.

Bây giờ việc quan trọng của chúng ta là cần tìm ra mối quan hệ giữa x, y để biểu thức trong căn thoát được căn thức và hai vế phương trình bằng nhau, với cấu trúc của các đại lượng trong căn nên ta nhận thấy rằng để thoát căn thì mối quan hệ giữa hai biến x, y phải có dạng $y=ax+b$.

Mặt khác ta nhận thấy trong hai căn hệ số đứng trước x^2 là hai số lẻ $5,3$ và liên kết với đại lượng y bằng dấu "$-$" và hệ số đều là số chẵn nên ta sẽ ưu tiên cho $a=1$.

Khi đó ta có : $\begin{cases}\sqrt{5x^2-4x(x+b)+6x+1}=\sqrt{x^2-4xb+6x+1}\\ \sqrt{3x^2-2(x+b)^2+10x+11}=\sqrt{x^2-4xb+10x+11-2b^2}\end{cases}$

Lúc này tinh ý một chút nếu ta cho $b=1$ ta sẽ có :

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-4xb+6x+1}=\sqrt{x^2+2x+1}=x+1\\ \sqrt{x^2-4xb+10x+11-2b^2}=\sqrt{x^2+6x+9}=x+3\end{cases}$$

Và với $a=1,b=1\Rightarrow y=x+1$ khi đó ta có hai biểu thức trong căn được thoát căn và lúc đó ta lại có hai vế phương trình bằng nhau. Như vậy, ta có thể kết luận được biểu thức $y=x+1$ chính là đại lượng cần tìm.

Vậy ta biến đổi phương trình thứ nhất trong hệ để liên hiệp như sau :

$$\sqrt{5x^2-4xy+6x+1}-(x+1)+\sqrt{3x^2-2y^2+10x+11}-(y+2)=0\ (1).$$

Nhưng bây giờ ở phương trình (1) lại phát sinh một vấn đề nghiêm trọng và là mấu chốt của bài toán đó là để liên hiệp thành công ta cần phải xác định dấu cho hai đại lượng $x+1,y+2$ vì chúng ta khi liên hiệp chưa biết được hai đại lượng sau đã khác 0 ?

$$\sqrt{5x^2-4xy+6x+1}+x+1;\sqrt{3x^2-2y^2+10x+11}+y+2.$$

Mặt khác khi liên hiệp ta sẽ có được phương trình :

$$\frac{4x(x-y+1)}{\sqrt{5x^2-4xy+6x+1}+x+1}+\frac{3x^2-3y^2+10x+7-4y}{\sqrt{3x^2-2y^2+10x+11}+y+2}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{4x(x-y+1)}{\sqrt{5x^2-4xy+6x+1}+x+1}+\frac{(x-y+1)(3x+3y+7)}{\sqrt{3x^2-2y^2+10x+11}+y+2}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y+1)\left(\frac{4x}{\sqrt{5x^2-4xy+6x+1}+x+1}+\frac{3x+3y+7}{\sqrt{3x^2-2y^2+10x+11}+y+2}\right)=0$$

Và tới đây để có gì đó thuận lợi cho biểu thức trong ngoặc ta cần khẳng định được dấu của toàn bộ các đại lượng $4x,3x+3y+7,x+1,y+2$. Điều này cũng có nghĩa ta cần đánh giá dấu cho hai biến x,y thông qua phương trình thứ hai trong hệ vì từ cấu trúc của hệ chỉ cho ta được ba điều kiện :

$\begin{cases}5x^2-4xy+6x+1\ge 0\\ 3x^2-2y^2+10x+11\ge 0\\ x+y+3\ge 0\end{cases}$ không giúp chúng ta được gì về dấu của các đại lượng cần quan tâm đến dấu mà ta đã nói ở trên.

Mặt khác vì mối liên quan chặt chẽ của bản chất một bài hệ phương trình nên để đánh giá dấu của các đại lượng cần quan tâm đó ta buộc phải xoay chuyển xuống phương trình thứ hai trong hệ.

Ta có phương trình thứ hai trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$x^2+y^2-2xy+x-2y+2=0\ (2)$.

Dựa vào hình thức của phương trình (2) ta có hai chiều hướng biến đổi :

⊕ Biến đổi hướng 1.

Ta có : $(2)\Leftrightarrow(x-y)^2+2(x-y)+1+1-x=0\Leftrightarrow(x-y-1)^2=x-1$

Từ đây ta suy ra : $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

⊕ Biến đổi hướng 2.

Ta có : $(2)\Leftrightarrow(x-y)^2+(x-y)+\frac{1}{4}-y+2-\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow\left(x-y+\frac{1}{2}\right)^2=y-\frac{7}{4}$

Từ đây ta suy ra : $y-\frac{7}{4}\ge 0\Leftrightarrow y\ge\frac{7}{4}$.

Như vậy từ (2) ta có : $\begin{cases}x\ge 1\\ y\ge\frac{7}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+1>0\\ y+2>0\\ 3x+3y+7>0\end{cases}$

Điều đó ta giúp chúng ta khẳng định được toàn bộ dấu trong ngoặc cũng như cách ghép liên hiệp đã thành công. Vậy hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}5x^2-4xy+6x+1\ge 0\\ 3x^2-2y^2+10x+11\ge 0\\ x+y+3\ge 0\end{cases}$

Phương trình thứ hai trong hệ được biến đổi trở thành phương trình :

$x^2+y^2-2xy+x-2y+2=0\ (*)$

Từ (*) ta có :

$(x-y)^2+2(x-y)+1+1-x=0\Leftrightarrow(x-y-1)^2=x-1\Rightarrow x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Mặt khác từ (*) ta lại có :

$(x-y)^2+(x-y)+\frac{1}{4}-y+2-\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow\left(x-y+\frac{1}{2}\right)^2=y-\frac{7}{4}$

Suy ra : $y-\frac{7}{4}\ge 0\Leftrightarrow y\ge\frac{7}{4}$.

Như vậy ta có : $x\ge 1, y\ge\frac{7}{4}$. Với điều kiện này ta biến đổi phương trình thứ nhất trong hệ thành phương trình :

$$\sqrt{5x^2-4xy+6x+1}-(x+1)+\sqrt{3x^2-2y^2+10x+11}-(y+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^2-4xy+6x+1-(x+1)^2}{\sqrt{5x^2-4xy+6x+1}+x+1}+\frac{3x^2-2y^2+10x+11-(y+2)^2}{\sqrt{3x^2-2y^2+10x+11}+y+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x(x-y+1)}{\sqrt{5x^2-4xy+6x+1}+x+1}+\frac{3x^2-3y^2+10x+7-4y}{\sqrt{3x^2-2y^2+10x+11}+y+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x(x-y+1)}{\sqrt{5x^2-4xy+6x+1}+x+1}+\frac{(x-y+1)(3x+3y+7)}{\sqrt{3x^2-2y^2+10x+11}+y+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)\left(\frac{4x}{\sqrt{5x^2-4xy+6x+1}+x+1}+\frac{3x+3y+7}{\sqrt{3x^2-2y^2+10x+11}+y+2}\right)=0\ (3)$$

Với điều kiện

$$\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge \frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{4x}{\sqrt{5x^2-4xy+6x+1}+x+1}+\frac{3x+3y+7}{\sqrt{3x^2-2y^2+10x+11}+y+2}>0.$$

Do đó từ $(3) \Leftrightarrow x-y+1=0 \Leftrightarrow y=x+1$. Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được :

$$x^2+(x+1)^2-2x(x+1)+x-2(x+1)+2=0 \Leftrightarrow -x+1=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=2.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là (x; y) = (1; 2).

Bình luận : Bài toán này có cách xử lí gần giống như ví dụ trên nhưng nó có độ khó hơn và cũng là một trong những trường hợp thường gặp của bài toán giải hệ bằng phép liên hiệp. Và điều đó làm nên sự thú vị cho loại hệ giải bằng phương pháp này, sau đây chúng ta sẽ nghiên cứu một vài ví dụ nữa để thấy được cách nhìn tổng quan hơn về bài toán hệ được giải bằng phương pháp nhân liên hiệp.

Ví dụ 14: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{4x^2+5(y-x)}=2\left(\sqrt{3x^2+y^2}-y\right) \\ 2y+x-6=\sqrt{2y}-\sqrt{2(x+y-2)} \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Phân tích : Với hệ này, ta nhận thấy cả phương trình đều gọn nhẹ, nên tư tưởng chúng ta đều có thể xuất phát từ phương trình nào cũng được. Tuy nhiên ở phương trình thứ nhất chúng ta nhận thấy cấu trúc có sự nhẹ nhàng hơn và khi cho $x=y$ thì hai vế phương trình bằng nhau. Do đó ta ưu tiên biến đổi phương trình thứ nhất trước.

Cụ thể ta có: $\sqrt{4x^2+5(y-x)}-\sqrt{3x^2+y^2}+2y-\sqrt{3x^2+y^2}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2+5(y-x)-3x^2-y^2}{\sqrt{4x^2+5(y-x)}+\sqrt{3x^2+y^2}}+\frac{4y^2-3x^2-y^2}{2y+\sqrt{3x^2+y^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)(x+y-5)}{\sqrt{4x^2+5(y-x)}+\sqrt{3x^2+y^2}}-\frac{3(x-y)(x+y)}{2y+\sqrt{3x^2+y^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{x+y-5}{\sqrt{4x^2+5(y-x)}+\sqrt{3x^2+y^2}}-\frac{3(x+y)}{2y+\sqrt{3x^2+y^2}}\right)=0\ (*)$$

Từ các dữ kiện của bài toán đã cho mà ta có là : $y\geq 0, x+y\geq 2$ thì từ phương trình biến đổi cuối cùng cái chúng ta quan tâm chính là dấu của biểu thức $x+y-5$. Và kết cấu của biểu thức trong ngoặc ta cần có đại lượng $x+y-5\leq 0$ là một đánh giá quyết định để đánh giá trong ngoặc được giải quyết nhẹ nhàng nhất.

Và câu hỏi được đặt ra là chúng ta cần có đánh giá này từ đâu ? Câu trả lời chính là ở phương trình thứ hai trong hệ.

Quan sát đại lượng vế trái của phương trình thứ hai và hai biểu thức chứa trong căn thức có sự liên quan tới nhau. Nên ta tiến hành tìm mối liên quan này (nếu có) như sau :

$$2y+x-6=m(2y)+n(2x+2y-4)\Leftrightarrow 2y+x-6=(2m+2n)y+2nx-4n$$

Đồng nhất hai vế phương trình ta có : $\begin{cases}2m+2n=2\\2n=2\\-4n=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=0\\n=1\\n=\frac{3}{2}\end{cases}$ (vô nghiệm).

Điều này khẳng định được đại lương $2y+x-6$ không phân tích được "trọn vẹn" theo hai lượng là $2y, 2x+2y-4$. Tuy nhiên ta vẫn thấy chúng có mối liên quan đến nhau, nên chúng ta không tách được "trọn vẹn" thì chúng ta sẽ tách "tạm" theo hướng nhận định sau : Tổng hệ số của y ở hai căn thức 4 và tổng hệ số của x ở hai căn thức là 2 nên ta sẽ nhân hai vế của phương trình thứ hai ta có :

$$4y+2x-12=2\sqrt{2y}-2\sqrt{2(x+y-2)}$$

$$\Leftrightarrow 2y-2\sqrt{2y}+2(x+y-2)+2\sqrt{2(x+y-2)}-8=0$$

$$\Leftrightarrow 2y-2\sqrt{2y}+1+2(x+y-2)+2\sqrt{2(x+y-2)}-9=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2y}-1\right)^2=-\left[2(x+y-2)+2\sqrt{2(x+y-2)}-9\right]$$

Từ đây ta suy ra :

$$2(x+y-2)+2\sqrt{2(x+y-2)}-9\le 0 \Leftrightarrow 0\le\sqrt{2(x+y-2)}\le -1+\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow 0\le x+y-2\le\frac{11-2\sqrt{10}}{2}\Leftrightarrow 2\le x+y\le\frac{15-2\sqrt{10}}{2}<5.$$

Với nhận xét này, xem như mọi chuyện trong ngoặc ở (*) đã rõ ràng. Và như thế ta có $x=y$.

Như thế hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} y\ge 0 \\ x+y\ge 2 \end{cases}$.

Nhận xét $(x,y)=(0;0)$ không thỏa hệ. Do đó với $x\neq 0, y>0$. Ta biến đổi phương trình thứ nhất trong hê trở thành :

$$\sqrt{4x^2+5(y-x)}-\sqrt{3x^2+y^2}+2y-\sqrt{3x^2+y^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{4x^2+5(y-x)-3x^2-y^2}{\sqrt{4x^2+5(y-x)}+\sqrt{3x^2+y^2}}+\frac{4y^2-3x^2-y^2}{2y+\sqrt{3x^2+y^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-y)(x+y-5)}{\sqrt{4x^2+5(y-x)}+\sqrt{3x^2+y^2}}-\frac{3(x-y)(x+y)}{2y+\sqrt{3x^2+y^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{x+y-5}{\sqrt{4x^2+5(y-x)}+\sqrt{3x^2+y^2}}-\frac{3(x+y)}{2y+\sqrt{3x^2+y^2}}\right)=0\ (1)$$

Mặt khác từ phương trình thứ hai trong hệ ta biến đổi thành phương trình :

$$4y+2x-12=2\sqrt{2y}-2\sqrt{2(x+y-2)}$$

$$\Leftrightarrow 2y-2\sqrt{2y}+2(x+y-2)+2\sqrt{2(x+y-2)}-8=0$$

$$\Leftrightarrow 2y-2\sqrt{2y}+1+2(x+y-2)+2\sqrt{2(x+y-2)}-9=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2y}-1\right)^2=-\left[2(x+y-2)+2\sqrt{2(x+y-2)}-9\right]$$

Từ đây ta suy ra :

$$2(x+y-2)+2\sqrt{2(x+y-2)}-9\le 0\Leftrightarrow 0\le\sqrt{2(x+y-2)}\le -1+\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow 0\le x+y-2\le\frac{11-2\sqrt{10}}{2}\Leftrightarrow 2\le x+y\le\frac{15-2\sqrt{10}}{2}<5.$$

Vậy : $\dfrac{x+y-5}{\sqrt{4x^2+5(y-x)}+\sqrt{3x^2+y^2}}-\dfrac{3(x+y)}{2y+\sqrt{3x^2+y^2}}<0$.

Do đó từ (1) ta có : $y=x$. Thay vào phương trình thứ hai ta có phương trình :

$3x-6=\sqrt{2x}-2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 3(x-2)=\dfrac{-(x-2)}{2\sqrt{2x}+2\sqrt{x-1}}$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(3+\dfrac{1}{\sqrt{2x}+2\sqrt{x-1}}\right)=0 \Leftrightarrow x=2$.

Vì với $x \ge 1$ ta có : $3+\dfrac{1}{\sqrt{2x}+2\sqrt{x-1}}>0$. Với $x=2 \Rightarrow y=2$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(2;2)$.

Bình luận : Bài toán này một lần nữa cho thấy sự kết hợp và có cái nhìn tổng quát từ hệ cho chúng ta một lời giải khá thú vị. Đây là một điều thú vị khi sử dụng phương pháp liên hiệp để giải hệ khi mà có kèm theo điều kiện để đánh giá. Sau đây, chúng ta sẽ tiếp tục nghiên cứu một ví dụ nữa để thấy điều thú vị nữa qua lớp bài toán giải bằng phương pháp này qua ví dụ sau đây.

Ví dụ 15: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{4xy+\left(3\sqrt{xy}-7\right)(x-y)}+2\sqrt{xy}=4y\\ (2x+1)\left(12y-1+\sqrt{x}\left(9\sqrt{y}-x\sqrt{x}-\sqrt{x}\right)\right)=27(x+1)\end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích : Cấu trúc của phương trình thứ nhất trong hệ giờ đã khá quen thuộc qua các ví dụ trước nên chúng tôi sẽ đi vào vấn đề ngay.Với hệ này, chúng ta muốn công phá hệ thì ta cần công phá phương trình thứ nhất trong hệ.

Tiến hành biến đổi phương trình thứ nhất trong hệ trở thành :

$$\sqrt{4xy+\left(3\sqrt{xy}-1\right)(x-y)}+2\sqrt{xy}=4y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4xy+\left(3\sqrt{xy}-7\right)(x-y)}-2y+2\left(\sqrt{xy}-y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4xy+\left(3\sqrt{xy}-1\right)(x-y)-4y^2}{\sqrt{4xy+\left(3\sqrt{xy}-1\right)(x-y)}+2y}+2\left(\frac{xy-y^2}{\sqrt{xy}+y}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)\left(4y+3\sqrt{xy}-7\right)}{\sqrt{4xy+\left(3\sqrt{xy}-1\right)(x-y)}+2y}+\frac{2y(x-y)}{\sqrt{xy}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{4y+3\sqrt{xy}-7}{\sqrt{4xy+\left(3\sqrt{xy}-1\right)(x-y)}+2y}+\frac{2y}{\sqrt{xy}+y}\right)=0$$

Như đã phân tích ở các ví dụ trước đó. Bây giờ chúng ta đã biết để giải quyết được trong ngoặc ta cần phải xử lí dấu của biểu đại lượng $4y+3\sqrt{xy}-7$.

Điều đó buộc lòng chúng ta phải quan tâm đến phương trình thứ hai trong hệ.

Phương trình thứ hai trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$(2x+1)\left(12y+9\sqrt{xy}-x^2-x-1\right)=27(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(4y+3\sqrt{xy}\right)=\frac{3(x+1)}{2x+1}+\frac{x^2+x+1}{9}$$

Ở phương trình cuối cùng biến đổi của phương trình thứ hai trong hệ ta thu được vế phải là một biểu thức toàn theo biến x nên để đánh giá dấu của đại lượng $4y+3\sqrt{xy}-7$ chúng ta sẽ tiến hành khảo sát hàm sau trên vùng điều kiện $x>0$.

Cụ thể ta có : $f(x)=\frac{3(x+1)}{2x+1}+\frac{x^2+x+1}{9},\ \forall x>0$.

Ta có : $f'(x)=\frac{(2x+1)^3-27}{9(2x+1)^2}$;

$f'(x)=0 \Leftrightarrow (2x+1)^3=27 \Leftrightarrow 2x+1=3 \Leftrightarrow x=1$.

Và ta nhận thấy $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>1$, $f'(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<1$ và $f(1)=\frac{7}{3}$.

Do đó $\forall x>0$ ta có $f(x)\ge\frac{7}{3}$.

Từ đây ta suy ra $\frac{1}{3}\left(4y+3\sqrt{xy}\right)\ge\frac{7}{3} \Leftrightarrow 4y+3\sqrt{xy}-7\ge 0$.

Và như vậy là biểu thức trong ngoặc đã được giải quyết hoàn toán. Như thế để giải hệ ta còn thực hiện thế và giải phương trình rất cơ bản.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}4xy+\left(3\sqrt{xy}-7\right)(x-y)\ge 0\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$

Nhận xét $(x,y)=(0;0)$ không thỏa hệ nên ta chỉ cần xét $\begin{cases}x>0\\ y>0\end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$\sqrt{4xy+\left(3\sqrt{xy}-1\right)(x-y)}+2\sqrt{xy}=4y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4xy+\left(3\sqrt{xy}-7\right)(x-y)}-2y+2\left(\sqrt{xy}-y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4xy+\left(3\sqrt{xy}-1\right)(x-y)-4y^2}{\sqrt{4xy+\left(3\sqrt{xy}-1\right)(x-y)}+2y}+2\left(\frac{xy-y^2}{\sqrt{xy}+y}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)\left(4y+3\sqrt{xy}-7\right)}{\sqrt{4xy+\left(3\sqrt{xy}-1\right)(x-y)}+2y}+\frac{2y(x-y)}{\sqrt{xy}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{4y+3\sqrt{xy}-7}{\sqrt{4xy+\left(3\sqrt{xy}-1\right)(x-y)}+2y}+\frac{2y}{\sqrt{xy}+y}\right)=0\ (1).$$

Mặt khác từ phương trình thứ hai trong hệ ta có :

$$(2x+1)\left(12y+9\sqrt{xy}-x^2-x-1\right)=27(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(4y+3\sqrt{xy}\right)=\frac{3(x+1)}{2x+1}+\frac{x^2+x+1}{9}$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{3(x+1)}{2x+1}+\frac{x^2+x+1}{9},\ \forall x>0.$

Ta có : $f'(x)=\frac{(2x+1)^3-27}{9(2x+1)^2}$;

$f'(x)=0\Leftrightarrow (2x+1)^3=27\Leftrightarrow 2x+1=3\Leftrightarrow x=1.$

Và ta nhận thấy $f'(x)>0\Leftrightarrow x>1$, $f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<1$ và $f(1)=\frac{7}{3}$.

Do đó $\forall x>0$ ta có $f(x)\ge\frac{7}{3}$.

Từ đây ta suy ra $\frac{1}{3}\left(4y+3\sqrt{xy}\right)\ge\frac{7}{3}\Leftrightarrow 4y+3\sqrt{xy}-7\ge 0$.

Với nhận xét này ta có : $\frac{4y+3\sqrt{xy}-7}{\sqrt{4xy+\left(3\sqrt{xy}-1\right)(x-y)}+2y}+\frac{2y}{\sqrt{xy}+y}>0$.

Nên từ (1) ta có: x = y. Thế vào phương trình thứ hai ta thu được phương trình:

$$(2x+1)\left(-x^2+20x-1\right)=27(x+1)\Leftrightarrow 2x^3+3x^2-33x+28=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(2x^2+5x^2-28\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\2x^2+5x^2-28=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{-5-\sqrt{249}}{4}\\x=\frac{-5+\sqrt{249}}{4}\end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là

$$(x,y)=\left\{(1;1);\left(\frac{-5+\sqrt{249}}{4};\frac{-5+\sqrt{249}}{4}\right)\right\}.$$

Bình luận: Đây là bài toán khó và đòi hỏi có sự tinh tế nhất định để có thể đánh giá được biểu thức trong ngoặc vô nghiệm. Do đó chúng ta lưu ý rằng để giải hệ bằng phương pháp nhân lượng liên hiệp bắt nhân tử chung tuy là một phương pháp cho lời giải gọn và đẹp nhưng chứa trong đó rất nhiều thú vị và đôi lúc cũng làm khó người giải.

Trong lời giải bài toán chỗ đánh giá $4y+3\sqrt{xy}-7\ge 0$ ngoài lời giải bằng hàm số, ta có thể đánh giá trực tiếp như sau :

Ta có : $\frac{1}{3}\left(4y+3\sqrt{xy}\right)=\frac{3x+3}{2x+1}+\frac{x^2+x+1}{9}=\frac{3}{2}+\frac{3}{4x+2}+\frac{2x^2+2x+5}{18}-\frac{1}{6}$

$$\ge\frac{3}{2}+\frac{3}{4x+2}+\frac{2x+1}{6}-\frac{1}{6}\ge\frac{4}{3}+\frac{3}{4x+2}+\frac{2x+1}{6}$$

$$\ge\frac{4}{3}+2\sqrt{\frac{3}{4x+2}\cdot\frac{2x+1}{6}}=\frac{7}{3}$$

Vậy $4y+3\sqrt{xy}-7\ge 0$. Tuy nhiên, sự đánh giá trực tiếp có sự khó khăn riêng khi ta cần chọn điểm rơi phù hợp một kỉ thuật không phải dễ đối với số đông học sinh. Còn lời giải hàm số trong bài toán giúp cho việc đánh giá dễ hiểu hơn và học sinh dễ tiếp

Ví dụ 16: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x\left(4y^3+3y+\sqrt{5y^2-x^2}\right)=y^2\left(x^2+4y^2+8\right)\\ x+\sqrt{12-2x}=2y^2-2\sqrt{y}-4\end{cases}\quad\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$$

Phân tích: Trước tiên, chúng ta cần nhìn nhận đây là một hệ khó và hay. Và tác giả của nó chính là chúng tôi. Hệ này khi đem ra thảo luận và giải thì hầu hết chúng tôi nhận được lời giải đi đúng hướng đó là đánh giá phương trình thứ nhất để tìm mối quan hệ giữa hai biến x,y rồi thay vào giải phương trình thứ hai trong hệ. Tuy nhiên, chúng tôi muốn cùng các bạn tư duy và tìm hướng đi cho bài toán này bằng phép liên hiệp.

Rõ ràng để công phá thành công hệ này, chúng ta không thể bắt đầu được với sự gọn gàng và rất nhẹ nhưng lại rất khó chịu của phương trình thứ hai.

Cấu trúc ở phương trình thứ nhất nếu có thể bắt được nhân tử chung để tìm mối quan hệ cho hai biến thì chúng ta chỉ có thể nghỉ đến việc "ép nghiệm" bằng liên hiệp hoặc đánh giá bằng các đánh giá bất đẳng thức cơ bản.

Để giải quyết hệ này bằng phép liên hiệp thì việc đầu tiên chúng ta cần làm đó là thoát căn. Nhìn nhận sự việc như thế ta tiến hành tập trung đoán mối quan hệ giữa x,y sao cho $\sqrt{5y^2-x^2}$ thoát căn.

Nhận thấy đại lượng trong căn là $5y^2-x^2$ nên nếu muốn thoát căn thì ta có hai định dạng cho mối quan hệ x,y và đồng thời phải làm cho hai vế phương trình bằng nhau.

Xét mối quan hệ thứ nhất có dạng $x=ay$.

Do hệ số đứng trước y^2 là 5 nên để thoát căn ta có thể nghỉ đến hai số $a=1,a=2$.

Với $a=1$ thì ta thoát được căn thức nhưng hai vế phương trình lại không bằng nhau nên ta loại.

Với $a=2$ thì ta thoát được căn và hai phương trình bằng nhau nên ta dự đoán mối quan hệ giữa x,y là $x=2y$.

Và lúc này ta tạm thời bỏ qua định dạng $x=ay+b$ và tập trung liên hiệp với $x=2y$.

Khi đó ta biến đổi phương trình thứ nhất trở thành:

$$4xy^3+3xy+x\sqrt{5y^2-x^2}-x^2y^2-4y^4-8y^2=0$$

$$\Leftrightarrow 2xy^2(2y-x)+y^2\left(x^2-4y^2\right)+4y(x-2y)+x\left(\sqrt{5y^2-x^2}-y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)\left(-2xy^2+y^2(x+2y)+4y\right)-\frac{x(x-2y)(x+2y)}{\sqrt{5y^2-x^2}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)\left(-xy^2+2y^3+4y-\frac{2xy+x^2}{\sqrt{5y^2-x^2}+y}\right)=0$$

Tới đây, chúng ta sẽ tìm cách đánh giá cho trong ngoặc vô nghiệm. Tuy nhiên, ở bài toán này thì có một sự thú vị đã xảy ra.

Các bạn hãy chú ý tới

$-xy^2+2y^3=-y^2(x-2y)$; $2xy+x^2=8y^2$ ($x=2y$); $\sqrt{5y^2-x^2}+y=2y$.

Và như vậy khi $x=2y$ thì $-xy^2+2y^3+4y-\dfrac{2xy+x}{\sqrt{5x^2-y^2}+y}=0$. Tức là trong ngoặc chúng ta lại có thêm nhân tử $x=2y$. Do đó chúng ta tiến hành liên hiệp tiếp cho biểu thức trong ngoặc. Nếu để vậy liên hiệp chúng ta sẽ rắc rối, dựa trên nhận xét đã có chúng ta quy đồng mẫu rồi sau đó liên hiệp sẽ cho lời giải gọn hơn.

Cụ thể ta có : $(x-2y)\left(-xy^2+2y^3+4y-\dfrac{2xy+x^2}{\sqrt{5y^2-x^2}+y}\right)=0$

$$\Leftrightarrow (x-2y)\left(-y^2(x-2y)\left(\sqrt{5y^2-x^2}+y\right)+4y\sqrt{5y^2-x^2}-2xy+4y^2-x^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)\left(-y^2(x-2y)\left(\sqrt{5y^2-x^2}+y\right)+\frac{10y(2y-x)(2y+x)}{2\sqrt{5y^2-x^2}+x}+(2y-x)(2y+x)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -(x-2y)^2\left(y^2\left(\sqrt{5y^2-x^2}+y\right)+\frac{10y(2y+x)}{2\sqrt{5y^2-x^2}+x}+2y+x\right)=0$$

Và lúc này trong ngoặc đã quá rõ ràng về dấu nên ta có thể kết luận được ngay $x=2y$.

Như vậy xem như hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Từ phương trình thứ nhất trong hệ :

$x\left(4y^3+3y+\sqrt{5y^2-x^2}\right)=y^2\left(x^2+4y^2+8\right)$ ta suy ra được $x\ge 0$ do $y\ge 0$.

Mặt khác $(x,y)=(0;0)$ không thỏa hệ nên ta chỉ cần xét $x>0, y>0$.

Từ đó ta có điều kiện của hệ là : $\begin{cases}5y^2-x^2\ge 0\\ 0<x\le 6\\ y>0\end{cases}$

Phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình :

$$4xy^3+3xy+x\sqrt{5y^2-x^2}-x^2y^2-4y^4-8y^2=0$$

$$\Leftrightarrow 2xy^2(2y-x)+y^2\left(x^2-4y^2\right)+4y(x-2y)+x\left(\sqrt{5y^2-x^2}-y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)\left(-2xy^2+y^2(x+2y)+4y\right)-\frac{x(x-2y)(x+2y)}{\sqrt{5y^2-x^2}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)\left(-xy^2+2y^3+4y-\frac{2xy+x^2}{\sqrt{5y^2-x^2}+y}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)\left(-y^2(x-2y)\left(\sqrt{5y^2-x^2}+y\right)+4y\sqrt{5y^2-x^2}-2xy+4y^2-x^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)\left(-y^2(x-2y)\left(\sqrt{5y^2-x^2}+y\right)+\frac{10y(2y-x)(2y+x)}{2\sqrt{5y^2-x^2}+x}+(2y-x)(2y+x)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -(x-2y)^2\left(y^2\left(\sqrt{5y^2-x^2}+y\right)+\frac{10y(2y+x)}{2\sqrt{5y^2-x^2}+x}+2y+x\right)=0\ (*)$$

Do $x>0, y>0 \Rightarrow y^2\left(\sqrt{5y^2-x^2}+y\right)+\frac{10y(2y+x)}{2\sqrt{5y^2-x^2}+x}+2y+x>0$.

Vậy từ (*) ta có $-(x-2y)^2=0 \Leftrightarrow x=2y$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$y+\sqrt{3-y}=y^2-\sqrt{y}-2 \Leftrightarrow \sqrt{3-y}+\sqrt{y}=y^2-y-2 \quad (*)$$

Để phương trình $(*)$ có nghiệm ta cần : $\begin{cases} y^2-y-2\ge 0 \\ 3-y\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\le y\le 3$.

Với điều kiện này ta có $(*) \Leftrightarrow y^2-3y-1+\left(y-1-\sqrt{y}\right)+\left(y-2-\sqrt{3-y}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left(y^2-3y+1\right)\left(1+\frac{1}{y-1+\sqrt{y}}+\frac{1}{y-2+\sqrt{3-y}}\right)=0 \ (*')$$

Với $2\le y\le 3$ ta luôn có $1+\frac{1}{y-1+\sqrt{y}}+\frac{1}{y-2+\sqrt{3-y}}>0$.

Do đó từ $(*')$ ta có : $y^2-3y+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ y=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện ta có : $y=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=3+\sqrt{5}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x,y)=\left(3+\sqrt{5};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bình luận : Ở bước phân tích các bạn thấy sau khi liên hiệp ta vẫn còn được nhân tử $x-2y$ một lần nữa. Do đó để tiến hành liên liệp có thể cho ra luôn nhân tử $(x-2y)^2$ thì ta có thể tư duy để xử lí như sau :

+ Nếu ta xử lí nguyên bản ban đầu chỉ cần thêm bình phương như thế này : $x\left(\sqrt{5y^2-x^2}-y\right)^2$

Thì rõ ràng việc thêm bớt của chúng ta sẽ khá rắc rối và khả năng tính toán nhầm rất dễ xảy ra.

+ Nhưng nếu ta để ý thì chúng ta nhận xét thấy là đại lượng cần liên hiệp để khử căn là $\sqrt{5y^2-x^2}$ trước nó có đại lượng x để lập thành một tích số $x\sqrt{5y^2-x^2}$.

Như vậy khi cho $x=2y \Rightarrow \sqrt{5y^2-x^2}=2y$ và khi đó ta sẽ có $x-2\sqrt{5y^2-x^2}=0$.

Và như thế để tạo được nhân tử $(x-2y)^2$ và không xa rời lắm với đại lượng $x\sqrt{5y^2-x^2}$

Thì ta sẽ tách lượng liên hiệp cần có là

$$\left(x-2\sqrt{5y^2-x^2}\right)^2=\frac{25(x-2y)^2(x+2y)^2}{x+2\sqrt{5y^2-x^2}}.$$

Do đó ta sẽ tiến hành tách phương trình thứ nhất thành :

$$x\left(4y^3+3y+\sqrt{5y^2-x^2}\right)=y^2\left(x^2+4y^2+8\right)$$

$$\Leftrightarrow -4x\left(4y^3+3y+\sqrt{5y^2-x^2}\right)=-4y^2\left(x^2+4y^2+8\right)$$

$$\Leftrightarrow -16xy^3-12xy+4x^2y^2+16y^4+12y^2+3x^2+\left(x-2\sqrt{5y^2-x^2}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow 16y^4-16xy^3+4x^2y^2+3x^2-12xy+12y^2+\left(x-2\sqrt{5y^2-x^2}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow 4y^2\left(x^2-4xy+4y^2\right)+3\left(x^2-4xy+4y^2\right)+\left(x-2\sqrt{5y^2-x^2}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)^2\left(4y^2+3\right)+\left(x-2\sqrt{5y^2-x^2}\right)^2=0\ (a)$$

Tới đây chúng ta có thể tiến hành liên hiệp, nhưng trên bước đường đi tìm nhân tử $(x-2y)^2$ chúng ta đã biến đổi về một phương trình mà không cần liên hiệp nữa vì chúng ta đã thu được một phương trình gồm tổng hai số không âm.

Do đó $(a)\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=0\\ x-2\sqrt{5y^2-x^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2y$. Và có thể nói đây chính là gốc rễ của sự đánh giá ở phương trình thứ nhất trong hệ.

Và chúng ta thấy đó, một bài toán có được mối quan hệ nhờ đánh giá thì với kỉ năng cơ bản liên hiệp cộng với một chút tinh tế ta vẫn đưa được về lời giải tự nhiên và dễ hiểu hơn. Và biết đâu đó trên bước đường chúng ta lượm nhặt từ những cái cơ bản và ghép lại chúng ta sẽ có một mãnh hoàn chỉnh về một lời giải ngắn gọn và nhanh nào trước đó đã có sẵn như lời giải có được từ ban đầu của bài hệ này.

Ví dụ 17: Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+y^3=xy\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\\ 4\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=9(y-1)\sqrt{2x-2}\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Để công phá hệ này chúng ta sẽ không bắt đầu từ phương trình thứ hai trong hệ được mà chúng ta cần công phá với phương trình thứ nhất.

Với cấu trúc của phương trình thứ nhất, chúng ta dễ thấy hai biến x,y đối xứng và cấu trúc của phương trình giúp chúng ta nhẩm được $x=y$ thì biểu

thức trong căn thoát căn được và hai vế phương trình bằng nhau. Do đó chúng ta tiến hành liên hiệp như sau :

$$x^3+y^3-xy\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}=0 \Leftrightarrow x^3+y^3-xy(x+y)+xy\left(x+y-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2-xy\left(\frac{(x-y)^2}{x+y+\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2\left(x+y-\frac{xy}{x+y+\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}}\right)=0$$

Và bây giờ chúng ta quan tâm đến biểu thức trong ngoặc với chú ý rằng điều kiện của bài toán chúng ta đang xét là $x\ge 1, y\ge 1$.

Như thế vấn đề bây giờ là chúng ta cần đánh giá sao cho

$\dfrac{xy}{x+y+\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}}\le 0$ là xem như trong biểu thức trong ngoặc đã được giải quyết thành công.

Để đánh giá điều này ta biến đổi biểu thức trong ngoặc tương đương với đánh giá sau (do mẫu số luôn dương).

Cụ thể là : $(x+y)\left(x+y+\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\right)-xy\ge 0$.

Ở biểu thức cần đánh giá chúng ta chú ý tới đại lượng $\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$ là một sự quen thuộc gắn liền với một đánh giá cơ bản quan trọng hay được dùng đó là đánh giá :

"$\forall x,y\in \mathbb{R}$ ta luôn có $|x+y|\le\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$"

Để chứng minh đánh giá này các bạn có thể sử dụng phép biến đổi tương đương là nâng lũy thừa hai vế hoặc sử dụng bất đẳng thức BCS rất đơn giản.

Như vậy với $x\ge 1, y\ge 1$, áp dụng đánh giá này ta có được đánh giá sau :

$$(x+y)\left(x+y+\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\right)\ge(x+y)(x+y+x+y)$$

$$\ge 2(x+y)^2$$

$\ge 4xy$ do $x+y\ge 2\sqrt{xy}$ (bất đẳng thức AM- GM).

Như thế ta có được : $(x+y)\left(x+y+\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\right)-xy>0$.

Và như thế biểu thức trong ngoặc hoàn toàn được giải quyết.

Do đó ta có $x = y$. Và như thế nút thắt của bài toán được mở và hệ xem như đã cơ bản được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$x^3 + y^3 - xy\sqrt{2\left(x^2 + y^2\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 - xy(x+y) + xy\left(x + y - \sqrt{2\left(x^2 + y^2\right)}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2 - xy\left(\frac{(x-y)^2}{x+y+\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2\left(x + y - \frac{xy}{x+y+\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2\left[(x+y)\left(x+y+\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\right) - xy\right] = 0 \quad (1)$$

Ta luôn có : $\forall x, y \geq 1$ thì $x + y \leq \sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$ $(*)$.

Thật vậy, từ $(*) \Leftrightarrow (x+y)^2 \leq 2\left(x^2+y^2\right) \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$. Nên ta có :

$$(x+y)\left(x+y+\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\right) \geq (x+y)(x+y+x+y)$$

$$\geq 2(x+y)^2$$

$$\geq 4xy \text{ do } x + y \geq 2\sqrt{xy} \text{ (bất đẳng thức AM- GM).}$$

Như thế ta có được : $(x+y)\left(x+y+\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\right) - xy > 0$.

Vậy từ (1) ta có : $(x-y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$. Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có :

$$4\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 9(x-1)\sqrt{2x-2} \Leftrightarrow 4\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-1}} = 18(x-1)\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)^2} = 18(x-1)\sqrt{x-1}.$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right) = 9(x-1)\sqrt{x-1} \quad (2)$$

⊕ Cách 1: Sử dụng ẩn phụ.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x+1} \\ b=\sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a,b\ge 0 \\ x=a^2-1 \\ x=b^2+1 \end{cases} \Rightarrow a^2-b^2=2$.

Kết hợp với (2) ta có hệ phương trình : $\begin{cases} 2(a+b)=9b^3 \\ a^2-b^2=2 \end{cases}$ (i)

Thế $2=a^2-b^2$ vào phương trình thứ nhất trong hệ (i) ta được phương trình :

$$(a+b)(a^2-b^2)=9b^3 \Leftrightarrow a^3+a^2b-ab^2-10b^3=0$$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{a}{b}\right)-10=0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}-2\right)\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2+3\left(\frac{a}{b}\right)+5\right)=0$ ($b=0$ không thỏa phương trình).

$\Leftrightarrow \frac{a}{b}-2=0 \Leftrightarrow a=2b$ vì $\left(\frac{a}{b}\right)^2+3\left(\frac{a}{b}\right)+5=0$ vô lí.

Với $a=2b \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x+1=4(x-1) \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$.

Đối chiếu điều kiện ta có : $x=\frac{5}{3} \Rightarrow y=\frac{5}{3}$.

⊕ Cách 2: Sử dụng nhân lượng liên hiệp hướng 1.

$$4\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=9(x-1)\sqrt{2x-2} \Leftrightarrow 8\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=81(x-1)^3$$

$$\Leftrightarrow 8\left(\sqrt{x^2-1}-\frac{4}{3}\right)-(3x-5)\left(27x^2-36x+\frac{55}{3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{24x+40}{9\sqrt{x^2-1}+12}-27x^2+36x-\frac{55}{3}\right)(3x-5)=0 \quad (3)$$

Ta có $\frac{24x+40}{9\sqrt{x^2-1}+12} \le \frac{24x+40}{12}, x\ge 1$.

Suy ra

$$\frac{24x+40}{9\sqrt{x^2-1}+12}-27x^2+36x-\frac{55}{3} \le -27x^2+38x-15=-27\left(x-\frac{19}{27}\right)^2-\frac{44}{27}<0$$

Vậy (3) cho $3x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$.

Đối chiếu điều kiện ta có : $x=\frac{5}{3}\Rightarrow y=\frac{5}{3}$.

⊕ Cách 3 : Sử dụng nhân lượng liên hiệp hướng 2.

$$(2)\Leftrightarrow 9(x-1)\sqrt{x-1}-2\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}\left(3(x-1)-2\right)+2\left(2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3(3x-5)\sqrt{x-1}+2\left(\frac{3x-5}{2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (3x-5)\left(3\sqrt{x-1}+\frac{2}{2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\right)=0\ (4)$$

Vì $3\sqrt{x-1}+\frac{2}{2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}>0, x\ge 1$ nên $(4)\Leftrightarrow 3x-5=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$

Đối chiếu điều kiện ta có : $x=\frac{5}{3}\Rightarrow y=\frac{5}{3}$.

Vậy qua ba cách giải ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right)$.

Bình luận : Ở phương trình thứ nhất trong hệ về bản chất thực là người ra đề nhằm đến đánh giá bằng bất đẳng thức BCS để có được $x=y$.

Cụ thể theo bất đẳng thức BCS ta có :

$$\left(x^3+y^3\right)(x+y)\ge\left(x^2+y^2\right)^2\ge xy(x+y)\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$$

Từ đây ta suy ra được $x^3+y^3\ge xy\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y$.

Tuy nhiên phương trình thứ nhất ta vẫn nhẩm được nghiệm để thoát căn và hai vế phương trình bằng nhau khi $x=y$ nên ta vẫn có thể tiến hành tốt bài toán với phép liên hiệp. Cái thú vị của phép liên hiệp là chúng ta chỉ cần sử dụng những đánh giá bằng các bất đẳng thức cơ bản quen thuộc vẫn giải quyết tốt bài toán. Đây chính là một điểm đáng lưu ý mà chúng tôi muốn các bạn nắm bắt để có thêm kỉ năng giải quyết thêm nhiều bài toán khác.

Với một lăng kính nhìn khác, chúng ta để ý một chút và tinh ý sẽ nhận ra ngay phương trình thứ nhất bản chất của nó là một phương trình đẳng cấp với hai biến x,y. Do đó chúng ta có thể tiến hành sử dụng kỉ thuật bắt nhân tử của hệ có một phương trình mang dáng dấp đẳng cấp để giải quyết ở phương trình thứ nhất .

Cụ thể ta có phương trình thứ nhất được biến đổi như sau :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3+1=\frac{x}{y}\sqrt{2\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2+1\right)} \Leftrightarrow t^3+1=t\sqrt{2\left(t^2+1\right)} \text{ với } t=\frac{x}{y}, t>0$$

$$\Leftrightarrow t^6-2t^4+2t^3-2t^2+1=0 \Leftrightarrow (t-1)^2\left(t^4+2t^3+2t^2+2t+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow x=y$$

Mặt khác, phương trình thứ nhất có tính đối xứng hai biến x, y nên về bản chất cơ bản chúng ta cũng có thể phân tích và bắt nhân tử chung vẫn tốt.

Cụ thể ta có phương trình thứ nhất sẽ biến đổi tương đương với phương trình sau :

$$\left(x^3+y^3\right)^2=2x^2y^2\left(x^2+y^2\right) \Leftrightarrow (x+y)^2\left(x^2-xy+y^2\right)^2-2x^2y^2\left(x^2+y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x^2+y^2\right)-2xy\right]\left[\left(x^2+y^2\right)-xy\right]^2-2x^2y^2\left(x^2+y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x^2+y^2\right)-2xy\right]\left[\left(x^2+y^2\right)^2-2xy\left(x^2+y^2\right)+x^2y^2\right]-2x^2y^2\left(x^2+y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^3-2xy\left(x^2+y^2\right)^2+2xy\left(x^2+y^2\right)^2$$
$$-4x^2y^2\left(x^2+y^2\right)-x^2y^2\left(x^2+y^2\right)+2x^3y^3=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2-2xy\right)\left(x^2+y^2\right)^2$$
$$+2xy\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2-2xy\right)-x^2y^2\left(x^2+y^2-2xy\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2\left(x^4+x^2y^2+y^4+2xy\left(x^2+y^2\right)\right)=0 \Leftrightarrow x=y$$

Đây là cũng là một định dạng để bắt nhân tử chung đối với hệ mà có chứa một phương trình mang dáng dấp đối xứng với hai biến mà chúng ta sẽ nghiên cứu phần tiếp theo sau.

Ví dụ 18: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x(y-x)-4=x\left(3x-2y^2\right) \\ \sqrt{7x^2-3xy}+\sqrt{y^2(1+2x)-4}=4y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích: Về cơ bản hệ có cấu trúc gọn nhẹ, phương trình thứ nhất là phương trình đa thức đơn giản, phương trình thứ hai là phương trình chứa căn cũng gọn đẹp. Tuy nhiên, trên thực tế thì mỗi phương trình không giúp chúng ta nhìn nhận được gì để bắt nhân tử chung.

Thật vậy, phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình :

$2xy-2x^2-4=3x^2-2xy^2$.

Kiểm tra phương trình này chúng ta biết được phương trình này không tách được nhân tử.

Phương trình thứ hai trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$\sqrt{7x^2-3xy}+\sqrt{y^2+2xy^2-4}=4y$.

Dáng dấp của phương trình này có vẻ như quen thuộc có thể báo trước được là có thể đoán nghiệm và liên hiệp. Tuy nhiên đại lượng y^2+2xy^2-4 thật gây khó cho chúng ta đoán nghiệm để liên hiệp.

Tuy nhiên, trên hai phép biến đổi trên ta thấy có mối liên quan giữa phương trình thứ nhất và phương trình thứ hai thông qua đại lượng : $-4+2xy^2$.

Cụ thể, từ phương trình thứ nhất ta có : $2xy^2-4=5x^2-2xy$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$\sqrt{7x^2-3xy}+\sqrt{5x^2-2xy+y^2}=4y\ (*)$.

Không khó để nhận ra phương trình mới có được là phương trình đẳng cấp và không khó để nhận thấy khi $x=y$ thì phương trình được nghiệm đúng.

Do đó ta có thể tiến hành liên hiệp tách nhân tử với chú ý ta có $y\ge 0$.

Ta có : $(*)\Leftrightarrow\sqrt{7x^2-3xy}-2y+\sqrt{5x^2-2xy+y^2}-2y=0$

$$\Leftrightarrow\frac{7x^2-3xy-4y^2}{\sqrt{7xy-3x^2}+2y}+\frac{5x^2-2xy+y^2-4y^2}{\sqrt{5x^2-2xy+y^2}+2y}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-y)(7x+4y)}{\sqrt{7x^2-3xy}+2y}+\frac{(x-y)(5x+3y)}{\sqrt{5x^2-2xy+y^2}+2y}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{7x+4y}{\sqrt{7x^2-3xy}+2y}+\frac{5x+3y}{\sqrt{5x^2-2xy+y^2}+2y}\right)=0.$$

Vấn đề nảy sinh bây giờ chính là đánh giá biểu thức trong ngoặc, muốn vậy ta cần xác định về dấu của hai đại lượng $7x+4y$, $5x+3y$. Tuy nhiên do ta đã biết dấu của y nên ta chỉ cần xác định dấu của x.

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$2xy+2xy^2=5x^2+4\Leftrightarrow 2xy(1+y)=5x^2+4\Rightarrow x>0$.

Như vậy với điều kiện $x>0, y\ge 0$ thì biểu thức trong ngoặc đã hoàn toàn xác định. Và như thế thì hệ cơ bản đã được giải quyết.

Lời giải: Điều kiện : $\begin{cases}7x^2-3xy\ge 0\\ y^2(1+2x)-4\ge 0\end{cases}$.

Từ phương trình thứ hai trong hệ ta suy ra : $y \geq 0$.

Mặt khác từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có

$2xy + 2xy^2 = 5x^2 + 4 \Leftrightarrow 2xy(1+y) = 5x^2 + 4$. Từ đây ta suy ra $x > 0$.

Từ phương trình thứ nhất ta có : $2xy^2 - 4 = 5x^2 - 2xy$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$\sqrt{7x^2 - 3xy} - 2y + \sqrt{5x^2 - 2xy + y^2} - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x^2 - 3xy - 4y^2}{\sqrt{7x^2 - 3xy} + 2y} + \frac{5x^2 - 2xy - 3y^2}{\sqrt{5x^2 - 2xy + y^2} + 2y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)(7x+4y)}{\sqrt{7x^2 - 3xy} + 2y} + \frac{(x-y)(5x+3y)}{\sqrt{5x^2 - 2xy + y^2} + 2y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{7x+4y}{\sqrt{7x^2 - 3xy} + 2y} + \frac{5x+3y}{\sqrt{5x^2 - 2xy + y^2} + 2y}\right) = 0 \ (1)$$

Do $x > 0, y \geq 0$ nên ta có : $\dfrac{7x+4y}{\sqrt{7x^2 - 3xy} + 2y} + \dfrac{5x+3y}{\sqrt{5x^2 - 2xy + y^2} + 2y} > 0$.

Nên từ (1) ta có: $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$. Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta thu được :

$2x^3 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ vì $2x^2 + x + 2 > 0, \forall x > 0$.

Với $x = 2 \Rightarrow y = 2$. Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y) = (2;2)$.

Bình luận : Bài toán trên là một ví dụ điển hình cho loại bài toán sử dụng phép thế và bắt nhân tử hóa bằng phép liên hiệp. Sự kết hợp này chúng ta có gặp trong phương pháp cộng, trừ. Tuy nhiên, nội dung thế liên hiệp là một bản chất gần như là phép liên hiệp để bắt nhân tử hóa. Các vi dụ tiếp theo chúng ta sẽ tiến hành nghiên cứu các cấu trúc khác của thể loại này. Về kỉ năng kết hợp cộng trừ và liên hiệp chúng ta sẽ đề cập sâu ở phần sau.

Ví dụ 19 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - 5xy - y^2 = 1 \\ y\left(\sqrt{xy - 2y^2} + \sqrt{4y^2 - xy}\right) = 1 \end{cases} \ (x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Bài toán này do chúng tôi sáng tác, với cấu trúc hệ cũng khá nhẹ nhàng. Nhưng sự nhẹ nhàng lại ẩn chứa rất nhiều thú vị. Quan sát thấy được phương trình thứ nhất là một phương trình mang dáng dấp đẳng cấp nhưng chúng ta lại chẳng tìm thấy được mối liên quan nào để thực hiện viêc bắt nhân tử. Phương trình thứ hai có cấu trúc cũng khá quen thuộc như một số ví dụ trước

đây ta đã xét, nhưng cái khó chịu chính là cái số 1 ở vế phải phương trình làm cho chúng ta cũng chẳng thể thực hiện gì việc đoán nghiệm.

Tuy nhiên, trên tinh thần chung nhận thấy cả hai phương trình đều chứa số 1 nên chúng ta sẽ tư duy bằng phương pháp thế hằng số bởi biến để hai phương trình kết hợp lại xem thế nào?

Cụ thể ta sẽ có: $2x^2-5xy-y^2=y\left(\sqrt{xy-2y^2}+\sqrt{4y^2-xy}\right)$.

Thật chất nhìn vào phương trình mới này chúng ta vẫn thấy dáng dấp của sự đẳng cấp, một phương trình mà chúng ta đã biết thông qua nó chúng ta có quyền hy vọng bắt nhân tử chung. Và lúc này, việc bắt nhân tử chung của chúng ta cần dựa vào việc sử dụng phép liên hiệp bởi vì các đại lượng trong căn thức và ngoài căn thức không giúp chúng ta suy đoán gì nhiều bằng các phương pháp khác.

Đoán được khi $x=3y$ thì các biểu thức trong căn thoát được căn thức và hai vế phương trình bằng nhau.

Tuy nhiên, từ phương trình thứ hai trong hệ ta có thể suy ra được $y>0$. Mặt khác ở phương trình mới ta thấy y là thừa số của một tích chứa tổng hai căn nên ta nghỉ đến việc chia y^2 cho vế phương trình để làm gọn lại phương trình :

Cụ thể ta có : $2\left(\frac{x}{y}\right)^2-5\left(\frac{x}{y}\right)-1=\sqrt{\frac{x}{y}-2}+\sqrt{4-\frac{x}{y}}\ (1)$.

Để tiện cho việc tính toán ta sẽ đặt $t=\frac{x}{y}$.

Chú ý rằng với việc nhẩm được $x=3y\Rightarrow t=3$.

Mặt khác từ điều kiện ban đầu của bài toán là :

$$\begin{cases}xy-2y^2\ge 0\\4y^2-xy\ge 0\\y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y\ge 0\\4y-x\ge 0\\y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\le\frac{x}{y}\le 4\\y>0\end{cases}$$

Và như thế ta có luôn dự đoán $t=3$ và miền giá trị cho $t\in[2;4]$.

Khi đó ta có

$$(1)\Leftrightarrow 2t^2-5t-1=\sqrt{t-2}+\sqrt{4-t}$$

$$\Leftrightarrow 2t^2-5t-3+\left(1-\sqrt{t-2}\right)+\left(1-\sqrt{4-t}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)(2t+1)-\frac{t-3}{1+\sqrt{t-2}}+\frac{t-3}{1+\sqrt{4-t}}=0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)\left(2t+1-\frac{1}{1+\sqrt{t-2}}+\frac{1}{1+\sqrt{4-t}}\right)=0$$

$\Leftrightarrow (t-3)\left(2t+\frac{\sqrt{t-2}}{1+\sqrt{t-2}}+\frac{1}{1+\sqrt{4-t}}\right)=0$.

Và tới đây biểu thức trong ngoặc đã rõ ràng về dấu nên xem như hệ cơ bản đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} xy-2y^2\ge 0 \\ 4y^2-xy\ge 0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y\ge 0 \\ 4y-x\ge 0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\le \frac{x}{y}\le 4 \\ y>0 \end{cases}$.

Từ hai phương trình trong hệ ta thu được phương trình :

$2x^2-5xy-y^2=y\left(\sqrt{xy-2y^2}+\sqrt{4y^2-xy}\right)$

$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2-5\left(\frac{x}{y}\right)-1=\sqrt{\frac{x}{y}-2}+\sqrt{4-\frac{x}{y}}=0\ (*)$.

Đặt $t=\frac{x}{y}, t\in[2;4]$.

Lúc đó phương trình $(*)$ trở thành phương trình :

$2t^2-5t-1=\sqrt{t-2}+\sqrt{4-t}\Leftrightarrow 2t^2-5t-1-\sqrt{t-2}-\sqrt{4-t}=0$

$\Leftrightarrow 2t^2-5t-3+\left(1-\sqrt{t-2}\right)+\left(1-\sqrt{4-t}\right)=0$

$\Leftrightarrow (t-3)(2t+1)-\frac{t-3}{1+\sqrt{t-2}}+\frac{t-3}{1+\sqrt{4-t}}=0$

$\Leftrightarrow (t-3)\underbrace{\left(2t+\frac{\sqrt{t-2}}{1+\sqrt{t-2}}+\frac{1}{1+\sqrt{4-t}}\right)}_{T}=0\Leftrightarrow t=3$

vì $2t+\frac{\sqrt{t-2}}{1+\sqrt{t-2}}+\frac{1}{1+\sqrt{4-t}}>0, \forall t\in[2;4]$.

Với $t=3\Leftrightarrow x=3y$. Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta thu được phương trình : $18y^2-15y^2-y^2=1\Leftrightarrow y^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là : $(x.y)=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Bình luận: Bài toán này, xuất phát ý tưởng là thế tạo ra được phương trình bắt nhân tử chung bằng phép liên hiệp. Tuy nhiên về mức độ thì cần có độ tinh tế và cách nhìn tổng quan. Giúp chúng ta mở rộng thêm nhiều hướng tư duy mới.

Ví dụ 20 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\left(\sqrt{y^2+9}-12\right)=y\left(12-\sqrt{x^2+9}\right) \\ 4x(x+1)+y(y-2)=xy(20-xy) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Đây lại là một bài hệ có hình thức gọn nhẹ, nhưng chính sự gọn nhẹ này làm cho bài toán trở nên rất thú vị. Chúng ta sẽ cùng phân tích điều thú vị đó.

Trước tiên ta biến đổi phương trình thứ nhất trong hệ trở thành phương trình :

$x\sqrt{y^2+9}+y\sqrt{x^2+9}=12(x+y)$ (1).

Rõ ràng cấu trúc phương trình (1) cho ta nghỉ ngay đến liên hiệp. Và cũng từ cấu trúc này chúng ta nhận thấy rằng để chọn mối quan hệ giữa x,y nhắm đến thoát căn là điều bất khả thi. Do đó chúng ta chỉ còn một chọn lựa là chọn mối quan hệ giữa x,y để cho hai vế phương trình bằng nhau. Không quá khó khăn khi chúng ta nhẩm được khi $x=-y$ là hai vế phương trình của (1) luôn đúng.

Nhưng cũng bắt nguồn từ nhận xét có tính chất đặc biệt này (khác với các bài toán sử dụng liên hiệp ở các ví dụ trước mà chúng ta phân tích) nên việc liên hiệp của chúng ta đành ưu tiên khử hệ số ở các đại lượng trong căn thức là hàng đầu.

Do đó ta tiến hành tách (1) trở thành phương trình sau :

$$x\left(\sqrt{y^2+9}-3\right)+y\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)=9(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy^2}{\sqrt{y^2+9}+3}+\frac{yx^2}{\sqrt{x^2+9}+3}=9(x+y)$$

$$\Leftrightarrow xy\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+9}+3}+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}+3}\right)=9(x+y)$$

$$\Leftrightarrow xy\left(\frac{y\sqrt{x^2+9}+x\sqrt{y^2+9}+3(x+y)}{\left(\sqrt{y^2+9}+3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}\right)=9(x+y)$$

Tới đây việc khử hệ số xem như đã ổn nhưng vấn đề là chúng ta vẫn chưa thấy tìm được nhân tử của bài toán mà ta dự đoán từ trước là $x=-y$.

Tuy nhiên quan sát biểu thức trong ngoặc trên tử có một đại lượng mà bài toán đã đề cập ngay từ đầu đó là: $y\sqrt{x^2+9}+x\sqrt{y^2+9}=12(x+y)$ nên lúc này ta sẽ sử dụng phương án thế để thu được phương trình hệ quả sau:

$$xy\left(\frac{15(x+y)}{\left(\sqrt{y^2+9}+3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}\right)=9(x+y)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ 5xy=3\left(\sqrt{y^2+9}+3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right) \end{array}\right.$$

Và lúc này mục đích của chúng ta trong việc bắt nhân tử hóa đã thành công, tuy nhiên quá trình bắt nhân tử này lại phát sinh ra một vấn đề khác, đó chính là cần xử lí phương trình sau: $5xy = 3\left(\sqrt{y^2+9}+3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)$ (2).

Ở (2) ta có vế phải chứa đựng rất nhiều sự quen thuộc mà ta từng gặp ở các lớp trung học cơ sở.

Đó là nhận xét thấy : $\begin{cases} y^2+9 \ge 9 \\ x^2+9 \ge 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y^2+9} \ge 3 \\ \sqrt{x^2+9} \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y^2+9}+3 \ge 6 \\ \sqrt{x^2+9}+3 \ge 6 \end{cases}$.

Vậy từ đây ta có : $3\left(\sqrt{y^2+9}+3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right) \ge 3\cdot 6\cdot 6 = 108 \Rightarrow xy \ge \dfrac{108}{5}$

Với điều kiện này cũng chẳng giúp chúng ta có khẳng định gì với phương trình (2). Tuy nhiên, như các ví dụ trước đã có đề cập, do bản chất của hệ nên hai phương trình trong hệ đều có sự tương tác rất chặt chẽ nên chúng ta sẽ tiến hành khai thác phương trình thứ nhất trong hệ để xem có liên quan gì sự đánh giá của (2), khi mà ở phương trình này chứa rất nhiều đại lượng liên quan đến xy.

Cụ thể ta có phương trình thứ nhất được biến đổi thành :

$$4x^2+4x+y^2-2y = 20xy - x^2y^2 \Leftrightarrow 4x^2+4x+y^2-20xy-2y = -x^2y^2$$

Ta nhận thấy vế trái của phương trình mới biến đổi chứa một biểu thức có dáng dấp của hằng đẳng thức.

Thật vậy ta có:

$$4x^2+y^2+1-4xy+4x-2y = -x^2y^2+16xy+1 \Leftrightarrow (2x-y+1)^2 = -x^2y^2+16xy+1.$$

Từ đây ta suy ra được : $-x^2y^2+16xy+1 \ge 0 \Leftrightarrow 8-\sqrt{65} \le xy \le 8+\sqrt{65}$.

Như vậy ta sẽ có : $\begin{cases} xy \ge \dfrac{108}{5} \\ 8-\sqrt{65} \le xy \le 8+\sqrt{65} \end{cases}$ (vô lí).

Điều này có nghĩa rằng (2) vô nghiệm trong điều kiện có được của hệ cho đại lượng xy.

Và như thế là xem như hệ đã được giải quyết .

Lời giải : Từ phương trình thứ hai trong hệ ta biến đổi được thành phương trình :

$$4x^2+4x+y^2-2y = 20xy-x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+y^2+1-4xy+4x-2y = -x^2y^2+16xy+1$$

$$\Leftrightarrow (2x-y+1)^2 = -x^2y^2+16xy+1.$$

Từ đây ta suy ra: $-x^2y^2+16xy+1 \ge 0 \Leftrightarrow 8-\sqrt{65} \le xy \le 8+\sqrt{65}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi trở thành phương trình :

$$x\sqrt{y^2+9}+y\sqrt{x^2+9}=12(x+y)\Leftrightarrow x\left(\sqrt{y^2+9}-3\right)+y\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)=9(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy^2}{\sqrt{y^2+9}+3}+\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+9}+3}=9(x+y)$$

$$\Leftrightarrow xy\left(\frac{y\sqrt{x^2+9}+x\sqrt{y^2+9}+3(x+y)}{\left(\sqrt{y^2+9}+3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}\right)=9(x+y)$$

$$\Rightarrow xy\left(\frac{15(x+y)}{\left(\sqrt{y^2+9}+3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}\right)=9(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ 5xy=3\left(\sqrt{y^2+9}+3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)\end{array}\right. (*).$$

Xét phương trình : $5xy=3\left(\sqrt{y^2+9}+3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)$ (i)

Nhận xét : $\begin{cases} y^2+9\ge 9 \\ x^2+9\ge 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{y^2+9}\ge 3\\ \sqrt{x^2+9}\ge 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{y^2+9}+3\ge 6\\ \sqrt{x^2+9}+3\ge 6\end{cases}$.

Từ đây ta có: $5xy=3\left(\sqrt{y^2+9}+3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)\ge 3\cdot 6\cdot 6=108\Rightarrow xy\ge\frac{108}{5}$.

Như vậy ta sẽ có: $\begin{cases} 8-\sqrt{65}\le xy\le 8+\sqrt{65} \\ xy\ge\frac{108}{5}\end{cases}$ (hệ vô nghiệm).

Vậy ta có phương trình (i) vô nghiệm. Do đó từ (*) ta có $x+y=0\Leftrightarrow y=-x$.

Thay vào phương trình thứ nhất ta thu được phương trình :

$(3x+1)^2=-x^4+16x^2+1$

$$\Leftrightarrow x^4-7x^2+6x=0\Leftrightarrow x\left(x^3-7x+6\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=0\\ x=1\Rightarrow y=-1\\ x=2\Rightarrow y=-2\\ x=-3\Rightarrow y=3\end{array}\right..$$

Thử lại ta có nghiệm của hệ phương trình là $(x,y)=(0;0)$.

Bình luận: Đây là một bài toán khó, dù nó cũng là ý tưởng thế và liên hiệp để bắt nhân tử chung nhưng có khó khăn hơn, vì phép thế sẽ dẫn đến một phương trình hệ quả và khi tìm xong nghiệm học sinh ít khi chịu kiểm tra lại mà vội vã kết

luận. Nhất là nghiệm của hệ đẹp như bài toán trên rất dễ cho học sinh sai lầm. Và một sai lầm nữa hay gặp là sau khi thế học sinh vẫn sử dụng dấu tương đương. Còn việc đánh giá cho phương trình (i) vô nghiệm là một việc cũng không hề đơn giản nếu học sinh không nắm vững và đủ tinh tế để quan sát hệ.

Ví dụ 21 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-5\sqrt{x}+5=0 \\ \sqrt{x+2}=\sqrt{y^2+2y+3}-\frac{1}{5}y^2+y \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

(Học sinh giỏi tỉnh An Giang 2013 – 2014)

Phân tích : Bài toán này, thể hiện quá rõ về kỉ thuật thế để giải hệ. Chúng tôi sẽ đi vào cụ thể phần thế để giải quyết hệ.

Cụ thể ta có từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có: $\frac{1}{5}y^2=\sqrt{x}-1$.

Thay vào phương trình thứ hai ta có phương trình:

$\sqrt{x+2}=\sqrt{y^2+2y+3}-\sqrt{x}+1+y$.

Điều chúng tôi muốn phân tích chính là ở phương trình này. Ta để ý sẽ thấy ngay được mối quan hệ sau :

$$(x+2)-(y^2+2y+3)$$

$$=x-(y^2+2y+1)=(\sqrt{x})^2-(y+1)^2=(\sqrt{x}+y+1)(\sqrt{x}-y-1).$$

Điều này ta dẫn đến ta cần liên hiệp để bắt nhân tử chung, chú ý từ kết quả của phép thế ta sẽ có $x\ge 1$. Do đó ta tiến hành liên hiệp như sau :

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{y^2+2y+3}+(\sqrt{x}+1+y)=0\Leftrightarrow\frac{(\sqrt{x})^2-(y+1)^2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y^2+2y+3}}+\sqrt{x}+y+1=0$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{x}-y-1)\left(\frac{\sqrt{x}+y+1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y^2+2y+3}}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{x}-y-1)\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}+y+1+\sqrt{y^2+2y+3}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y^2+2y+3}}\right)=0$$

Và vấn đề trong ngoặc bây giờ chính là đại lượng $y+1+\sqrt{y^2+2y+3}$.

Tuy nhiên, ta lại có :

$\sqrt{y^2+2y+3}+y+1=\sqrt{(y+1)^2+2}+y+1>|y+1|+y+1\ge 0$.

Do đó xem như chúng ta liên hiệp thành công.

Và hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $x \ge 0$.

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có: $\frac{1}{5}y^2 = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow \sqrt{x} \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 1$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{y^2+2y+3} - \sqrt{x} + 1 + y \Leftrightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{y^2+2y+3} + \sqrt{x} - y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)-(y^2+2y+3)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y^2+2y+3}} + \sqrt{x} - y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-(y+1)^2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y^2+2y+3}} + \sqrt{x} - y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-y-1\right)\left(\frac{\sqrt{x}+y+1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y^2+2y+3}}+1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-y-1\right)\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}+y+1+\sqrt{y^2+2y+3}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y^2+2y+3}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - y - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = y + 1 \Rightarrow y \ge -1.$$

Vì : $\sqrt{y^2+2y+3} + y + 1 > |y+1| + y + 1 \ge 0$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}+y+1+\sqrt{y^2+2y+3}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y^2+2y+3}} > 0.$$

Thế $\sqrt{x} = y + 1$ vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có phương trình :

$$y^2 - 5(y+1) + 5 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 5y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y = 5 \Rightarrow y = 36 \end{array}\right.$$

Đối chiếu tất cả các điều kiện đã xét ta có nghiệm của hệ là :

$(x.y) = \{(1;0);(36;5)\}$.

Bình luận : Bài toán trên chúng tôi nghĩ người ra đề khi thực hiện phép thế xong, sẽ tính đến xét hàm số đại diện. Lý do là sau khi thế ta biến đổi được thành phương trình: $\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2+2} + \sqrt{x} = \sqrt{(y+1)^2+2} + y + 1$.

Và từ đây chúng ta xét hàm số đại diện : $f(t) = \sqrt{t^2+2} + t, \forall t \in \mathbb{R}$.

Đó cũng là một lời giải hay. Tuy nhiên, chúng tôi nghĩ lời giải mà chúng tôi đề cập trên vẫn là một lời giải hay và tự nhiên. Và từ lời giải bài toán này, chúng ta sẽ đưa ra một câu hỏi : Liệu các bài toán đưa về xét hàm số đại diện thì có thể giải

bằng phép nhân liên hiệp bắt được nhân tử chung không ? Câu trả lời là hoàn toàn có thể. Ở đây, chúng tôi dùng từ có thể là bởi vì đa số các bài toán xét hàm số đại diện người ra đề có thể chế tác một hàm số đơn điệu (tăng hoặc giảm) rồi từ đó chọn đại lượng để biến đổi nên đôi lúc mà ở đó nếu dùng phép liên hiệp có thể gặp khó khăn. Vì phép liên hiệp bắt nhân tử chung tuy là một phương pháp khá mạnh nhưng cũng có nhược điểm của nó chính là cách xét dấu đánh giá phần trong ngoặc không phải lúc nào cũng thuận lợi. Nhưng trên thực tế, có một số bài toán được chế tác theo hướng xét hàm số đại diện có hình thức gọn nhẹ và cách đánh giá để biết bản chất về dấu của biểu thức trong ngoặc khi liên hiệp thường hiện được đậm nét, thì lúc này liên hiệp là một phương án bắt nhân tử chung khá tự nhiên.

Ví dụ 22 : Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1\\ y^3-y+1=\sqrt{x-1}-3x\end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với những người hay giải hệ thì cấu trúc phương trình trình thứ nhất trong hệ đang xét đều nghĩ đến việc xét hàm số là ưu tiên hàng đầu vì đó là một cấu trúc khá quen thuộc. Và suy nghĩ đó là hoàn toàn chính xác và tự nhiên. Tuy nhiên, chúng ta sẽ không theo lối mòn đó mà chúng ta sẽ đi một hướng khác đó là nhờ phép liên hiệp bắt nhân tử chung dựa trên các cơ sở sau :

Nhận xét : $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=1$, $\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)=1$.

Mặt khác từ điều này, khi ta thay $y=-x \vee x=-y$ thì phương trình thứ nhất luôn đúng.

Do đó ta tiến hành liên hiệp phương trình thứ nhất hai lần. Cụ thể ta có, phương trình thứ nhất biến đổi trở thành phương trình :

$$x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y \Leftrightarrow x+y+\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}=0$$

$$\Leftrightarrow x+y+\frac{(x-y)(x+y)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}=0 \Leftrightarrow (x+y)\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x+\sqrt{y^2+1}-y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\right)=0.$$

Lúc này, việc đánh giá trong ngoặc được hiện đậm nét (tương tự như ví dụ 21). Do đó ta đã liên hiệp và bắt nhân tử chung thành công.

Lời giải : Điều kiện : $x \ge 1$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi trở thành phương trình :

$$x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y \Leftrightarrow x+y+\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}=0$$

$$\Leftrightarrow x+y+\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}=0 \Leftrightarrow x+y+\frac{(x-y)(x+y)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(1+\frac{x-y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\right)=0 \Leftrightarrow (x+y)\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x+\sqrt{y^2+1}-y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow y=-x \text{ vì } \frac{\sqrt{x^2+1}+x+\sqrt{y^2+1}-y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}} > \frac{|x|+x+|y|-y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}} \ge 0.$$

Thay $y=-x$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$-x^3+x=-3x-1+\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^3-4x+\left(\sqrt{x-1}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-4\right)+\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}=0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+2x+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=-2 \text{ vì } x^2+2x+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}>0, \forall x \ge 1.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(2;-2)$.

Bình luận : Một lần nữa ta nhận thấy, với một hệ mà phép biến đổi hầu hết là xét hàm số. Chúng ta đã khoác cho nó một lời giải mới dựa trên một nền tảng đã có. Cách giải này phù hợp với những bạn chưa tiếp xúc với hàm số.

Ví dụ 23 : Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2 \\ 27x^6=x^3-8y+2\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

(Học sinh giỏi tỉnh Nghệ An 2013 – 2014)

Phân tích : Bài toán này, có cấu trúc phương trình thứ nhất khá giống với hai ví dụ trước đó ta đã xét, chỉ khác biệt duy nhất vế phải lúc này là số 2. Sự khác biệt này làm bài toán thêm thú vị. Hãy để ý, ở tích của phương trình thứ nhất ta có : $x+\sqrt{x^2+4}$

Và ta lại có : $\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)=4$. Như thế ta sẽ để ý tiếp thừa số còn lại trong tích với một nhận xét : $\left(\sqrt{4y^2+4}+2y\right)\left(\sqrt{4y^2+1}-2y\right)=4$.

Điều này, dẫn đến chúng ta sẽ nhân 2 cho hai vế của phương trình thứ nhất, ta có : $2\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=4 \Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(2y+\sqrt{4y^2+1}\right)=4$.

Và giờ đây, mọi chuyện đã trở về như hai ví dụ trước đó ta đã phân tích. Và xem như hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Phương trình thứ nhất được biến đổi để trở thành phương trình :

$$2\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=4 \Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(2y+\sqrt{4y^2+4}\right)=4$$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+4}=\sqrt{4y^2+4}-2y \Leftrightarrow x+2y+\sqrt{x^2+4}-\sqrt{4y^2+4}=0$

$\Leftrightarrow x+2y+\dfrac{x^2-4y}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{4y^2+4}}=0 \Leftrightarrow (x+2y)\left(1+\dfrac{x-2y}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{4y^2+4}}\right)=0$

$\Leftrightarrow (x+2y)\left(\dfrac{\sqrt{x^2+4}+x+\sqrt{4y^2+4}-2y}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{4y^2+4}}\right)=0 \Leftrightarrow x+2y=0 \Leftrightarrow x=-2y$.

Vì : $\dfrac{\sqrt{x^2+4}+x+\sqrt{4y^2+4}-2y}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{4y^2+4}} > \dfrac{|x|+x+|2y|-2y}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{4y^2+4}} \geq 0$.

Thay $y=-\dfrac{1}{2}x$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$27x^6=x^3+4x+2 \Leftrightarrow 3x^2=\sqrt[3]{x^3+4x+2}$

$\Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1-x^3-3x-1=\sqrt[3]{x^3+4x+1}$

$\Leftrightarrow (x+1)^3+(x+1)=x^3+4x+2+\sqrt[3]{x^3+4x+2}$

$\Leftrightarrow (x+1)^3+(x+1)=\left(\sqrt[3]{x^3+4x+2}\right)^3+\sqrt[3]{x^3+4x+2} \qquad (1)$.

Đặt $\begin{cases} a=x+1 \\ b=\sqrt[3]{x^3+4x+2} \end{cases}$. Khi đó (1) trở thành phương trình :

$a^3+a=b^3+b \Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)+(a-b)=0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2+1)=0 \Leftrightarrow (a-b)\left[\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3b^2}{4}+1\right]=0$

$\Leftrightarrow a-b=0 \Leftrightarrow a=b$ vì $\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3b^2}{4}+1>0$.

$\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{x^3+4x+2} \Leftrightarrow (x+1)^3=x^3+4x+2$

$\Leftrightarrow 3x^2-x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6} \Rightarrow y=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{12} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{6} \Rightarrow y=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{12} \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của hệ là : $(x,y)=\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{6};\dfrac{-1-\sqrt{13}}{12}\right);\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{6};\dfrac{-1+\sqrt{13}}{12}\right)\right\}$.

Bình luận: Bài toán trên có lẻ người chế tác muốn nhắm đến một bài toán hàm số lồng hàm số ở cả việc bắt nhân tử chung và giải phương trình khi thay vào. Tuy nhiên, với hai công cụ chủ yếu mà chúng ta thường dùng thì vẫn giải quyết tốt được hệ. Với một bài hệ, được xây dựng như vậy được đánh giá là một bài hệ hay vì không gò ép người giải theo một định hướng bắt buộc nào.

Ví dụ 24 : Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y\\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0\end{cases}$

(Tuyển sinh khối A,A1 năm 2013)

Phân tích : Đây cũng là một hệ hay và đủ khó để phân loại. Bàn về cấu trúc hệ, ta nhận thấy phương trình thứ hai trong hệ là một phương trình bậc hai hai ẩn. Kiểm tra ta thấy có thể phân tích nhân tử nhưng lại không cho được delta chính phương, do đó hy vọng có nhân tử chung này là bất khả kháng.

Phương trình thứ nhất trong hệ, chỉ chứa một căn thức bậc 4 nên ưu tiên hàng đầu là ẩn phụ để biễ diễn x về ẩn phụ mới có chưa mũ 4.

Cụ thể nếu $t=\sqrt[4]{x-1}\Rightarrow t^4=x-1\Leftrightarrow x=t^4+1$ ta sẽ có phương trình thứ nhất được biến đổi là : $\sqrt{t^4+2}+t=\sqrt{y^4+2}+y$.

Và dáng điệu xét hàm số đại diện đã được lộ rõ. Tuy nhiên, vơi cấu trúc phương trình thứ nhất vẫn cho ta được tư duy liên hiệp bắt nhân tử chung.

Không khó nếu cho $x=y^4+1$ thì ta sẽ được hai vế phương trình luôn đúng. Như vậy ta cần phải tách phương trình thứ nhất về phương trình:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{y^4+2}+\sqrt[4]{x-1}-y=0$$

Tuy nhiên để liên hiệp thành công phương trình này ta cần phải xác định dấu của y. Như các ví dụ trước đã đề cập, để xét dấu của y ta cần quan tâm đến phương trình thứ hai trong hệ.

Phương trình thứ hai trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$x^2+y^2+1+2xy-2x-6y=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+1+2xy-2x-2y=4y$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)^2=4y\Rightarrow y\ge 0.$$

Vậy với nhận xét này ta liên hiệp thành công. Cụ thể ta có:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{y^4+2}+\sqrt[4]{x-1}-y=0\Leftrightarrow\frac{x-y^4-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}+\frac{\sqrt{x-1}-y^2}{\sqrt[4]{x-1}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-y^4-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}+\frac{x-1-y^4}{\left(\sqrt{x-1}+y^2\right)\left(\sqrt[4]{x-1}+y\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y^4-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}+\frac{1}{\left(\sqrt{x-1}+y^2\right)\left(\sqrt[4]{x-1}+y\right)}\right)=0.$$

Với điều kiện đang xét ta dễ dàng xác định được biểu thức trong ngoặc vô nghiệm. Và như thế hệ được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $x \ge 1$.

Từ phương trình thứ hai trong hệ biến đổi ta có phương trình :

$$x^2+y^2+1+2xy-2x-6y=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+1+2xy-2x-2y=4y$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y-1\right)^2=4y \Rightarrow y \ge 0.$$

Nhận xét (x;y) = (1;0) thỏa hệ. Vậy ta chỉ cần xét $x>1, y>0$.

Khi đó phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{y^4+2}+\sqrt[4]{x-1}-y=0 \Leftrightarrow \frac{x-y^4-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}+\frac{\sqrt{x-1}-y^2}{\sqrt[4]{x-1}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y^4-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}+\frac{x-1-y^4}{\left(\sqrt{x-1}+y^2\right)\left(\sqrt[4]{x-1}+y\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y^4-1\right)\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}+\frac{1}{\left(\sqrt{x-1}+y^2\right)\left(\sqrt[4]{x-1}+y\right)}\right)}_{T}=0$$

$$\Leftrightarrow x-y^4-1=0 \Leftrightarrow x=y^4+1 \text{ vì } \begin{cases} x>1 \\ y>0 \end{cases} \Rightarrow T>0.$$

Thay $x=y^4+1$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$\left(y^4+y\right)^2=4y \Leftrightarrow y\left(y^3+1\right)^2=4 \text{ vì } y>0$$

Xét hàm số $f\left(y\right)=y\left(y^3+1\right)^2,\ y>0$.

Ta có : $f'\left(y\right)=\left(y^3+1\right)^2+6y^3\left(y^3+1\right)>0,\ \forall y>0$.

Vậy hàm số $f\left(y\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ nên phương trình $f\left(y\right)=4$ có tối đa một nghiệm.

Mà $f\left(1\right)=4 \Rightarrow y=1$ là nghiệm duy nhất. Với $y=1 \Rightarrow x=2$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $\left(x,y\right)=\left\{\left(1;0\right);\left(2;1\right)\right\}$.

Bình luận: Về bản chất của bài toán, có thể xét hàm số đại diện trực tiếp mà không cần qua phép đặt ẩn phụ.

Cụ thể ta có phép biến đổi : $\sqrt{\left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4+2}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{y^4+2}+y$.

Còn với việc xét trước cặp nghiệm $(x,y)=(1;0)$ là do tính chất của phép liên hiệp cần mẫu số khác 0. Một chú ý mà chúng ta hay quên nên dễ dẫn đến sai lầm.

Về việc giải phương trình $f(y)=4$, có thể không cần xét hàm số mà chúng ta có thể đơn thuần khai triển và giải bình thường.

Cụ thể ta có : $y\left(y^3+1\right)^2=4\Leftrightarrow y\left(y^6+2y^3+1\right)=4\Leftrightarrow y^7+2y^4+y-4=0$

$\Leftrightarrow (y-1)\left(y^6+y^5+3y^4+3y^3+3y^2+3y+4\right)=0$.

Với $y>0$ ta có : $y^6+y^5+y^4+3y^3+3y^2+3y+4>0\Rightarrow y=1$.

Ví dụ 25 :

Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)=4\sqrt{y^2+16}+4y \\ 9(1-x)\left(2x^2-x^2y+8\right)=4y\sqrt{3(2y-9)} \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Cấu trúc của hệ, không cho phép chúng ta bắt đầu khai thác từ phương trình thứ hai trong hệ. Với phương trình thứ nhất trong hệ ta biến đổi một chút ta sẽ có : $xy^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)=4\left(\sqrt{y^2+16}+y\right)$

Với phương trình này ta nhận thấy có hai đại lượng có tính chất liên hiệp quen thuộc là $\sqrt{x^2+1}+1$, $\sqrt{y^2+16}+y$. Tuy nhiên trước đại lượng $\sqrt{x^2+1}+1$ ta còn có một thừa số xy^2 nên với điều kiện cho phép của hệ ta biến đổi như sau vẫn không làm mất tính chất liên hiệp

Cụ thể ta có :

$$x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)=\frac{4}{y}\left(\sqrt{1+\frac{16}{y^2}}+1\right)\Leftrightarrow x-\frac{4}{y}+x\sqrt{x^2+1}-\frac{4}{y}\sqrt{1+\frac{16}{y^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{4}{y}+\frac{x^2\left(x^2+1\right)-\frac{4^2}{y^2}\left(1+\frac{4^2}{y^2}\right)}{x\sqrt{x^2+1}+\frac{4}{y^2}\sqrt{1+\frac{16}{y^2}}}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{4}{y}\right)\left(1+\frac{\left(x+\frac{4}{y}\right)\left(1+x^2+\frac{16}{y^2}\right)}{x\sqrt{x^2+1}+\frac{4}{y}\sqrt{1+\frac{16}{y^2}}}\right)=0.$$

Chú ý rằng từ phương trình thứ nhất trong hệ ta cũng suy ra được $x>0$.

Cấu trúc phương trình biến đổi khi chia hai vế phương trình cho y^2 đã hiện rõ cách xét hàm số đại diện. Tuy nhiên, với phép liên hiệp thì cấu trúc này cũng đã

hiện rõ. Và từ phép liên hiệp ta có được $x = \frac{4}{y} \Leftrightarrow y = \frac{4}{x}$. Và như vậy nút thắt của bài toán đã được gỡ, và hệ cũng được giải quyết.

Lời giải :

Điều kiện : $y \geq \frac{9}{2}$.

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta suy ra được $x > 0$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right) = \frac{4}{y}\left(\sqrt{1+\frac{16}{y^2}}+1\right) \Leftrightarrow x - \frac{4}{y} + x\sqrt{x^2+1} - \frac{4}{y}\sqrt{1+\frac{16}{y^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{4}{y} + \frac{x^2\left(x^2+1\right) - \frac{16}{y^2}\left(1+\frac{16}{y^2}\right)}{x\sqrt{x^2+1}+\frac{4}{y}\sqrt{1+\frac{16}{y^2}}} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{4}{y} + \frac{\left(x^2-\frac{16}{y^2}\right)\left(1+x^2+\frac{16}{y^2}\right)}{x\sqrt{x^2+1}+\frac{4}{y}\sqrt{1+\frac{16}{y^2}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{y}\right)\underbrace{\left(1 + \frac{\left(x+\frac{4}{y}\right)\left(1+x^2+\frac{16}{y^2}\right)}{x\sqrt{x^2+1}+\frac{4}{y}\sqrt{1+\frac{16}{y^2}}}\right)}_{T} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{x} \text{ vì } \begin{cases} y \geq \frac{9}{2} \Rightarrow T > 0. \\ x > 0 \end{cases}$$

Thay $y = \frac{4}{x}$ vào phương trình thứ hai ta được phương trình :

$$9(1-x)\left(2x^2-4x+8\right) = \frac{16}{x}\sqrt{3\left(\frac{8}{x}-9\right)} \Leftrightarrow 9(1-x)\left(x^2-2x+4\right) = \frac{8}{x}\sqrt{3\left(\frac{8}{x}-9\right)}$$

$$\Leftrightarrow (1-x)\left(x^2-2x+4\right) = \frac{8}{9x}\sqrt{3\left(\frac{8}{x}-9\right)}$$

$$\Leftrightarrow (1-x)\left(x^2-2x+4\right) - \frac{8}{3x}\sqrt{\frac{8}{3x}-3} = 0 \ (1).$$

Điều kiện để giải (1) là $0 < x \leq \frac{8}{9}$.

Đặt $t = \sqrt{\frac{8}{3x}-9}, t > 0$. Ta có : $t^2 + 9 = \frac{8}{3x}$.

Khi đó phương trình (1) trở thành phương trình :

$$-x^3 + 3x^2 - 6x + 4 - \left(t^2+9\right)t = 0 \Leftrightarrow (1-x)^3 + 3(1-x) - t^3 - 3t = 0$$

$\Leftrightarrow (1-x-t)\left((1-x)^2+(1-x)t+t^2\right)+3(1-x-t)=0$

$\Leftrightarrow (1-x-t)\left((1-x)^2+(1-x)t+t^2+3\right)=0$

$\Leftrightarrow 1-x-t=0 \Leftrightarrow t=1-x$ vì $(1-x)^2+(1-x)t+t^2+3>0$.

Với $t=1-x \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{8}{3x}-3}=1-x \Leftrightarrow \dfrac{8}{3x}-3=x^2-2x+1 \Leftrightarrow 8-9x=3x^3-6x^2+3x$

$\Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-8=-2x^3 \Leftrightarrow (x-2)^3=-2x^3 \Leftrightarrow x-2=-x\cdot\sqrt[3]{2}$

$\Leftrightarrow \left(1+\sqrt[3]{2}\right)x=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{1+\sqrt[3]{2}}$.

Đối chiếu điều kiện của phương trình (1) ta có: $x=\dfrac{2}{1+\sqrt[3]{2}} \Rightarrow y=2\left(1+\sqrt[3]{2}\right)$.

Đối chiếu điều kiện của hệ ta có nghiệm của hệ là : $(x,y)=\left(\dfrac{2}{1+\sqrt[3]{2}};2\left(1+\sqrt[3]{2}\right)\right)$.

Bình luận: Về cấu trúc thì bài toán này giải bằng xét hàm số đại diện thì sẽ ngắn gọn hơn ở phương trình thứ nhất trong hệ. Tuy nhiên, với điều kiện cho giữa các biến rất rõ ràng cho việc liên hiệp nên bài toán trên vẫn liên hiệp cho được lời giải tự nhiên. Qua đây, chúng tôi muốn nhắn gửi đến các bạn, có lẻ đôi lúc chúng ta cứ chăm chăm vào định dạng bài toán này phải thực hiện bằng xét đánh giá hàm số đại diện thì cũng chưa chuẩn lắm. Chúng ta có thể mở rộng thêm một vài kỉ thuật khác cũng giải tốt được hệ đó một cách tự nhiên. Và các ví dụ trên đã minh chứng cho điều đó. Hy vọng với những gợi mở như vậy, chúng ta sẽ có thêm hướng để luyện tập thêm được nhiều bài toán khác phù hợp với kiến thức mình có. Tiếp theo chúng ta sẽ nghiên cứu một dạng liên hiệp khác mà tính hiệu quả của nó cũng khá cao.

Ví dụ 26 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(y+\sqrt{y^2+4}\right)=1\\(2y+5)^3-\sqrt[3]{5-2y}=6\sqrt{x^2+1}+10x\end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích : Quan sát hệ này chúng ta nhận thấy được, để công phá hệ ta cần công phá được phương trình thứ nhất trong hệ vì phương trình thứ hai các biểu thức vế trái và vế phải tuy đã tách biến nhưng chúng không cho chúng ta mối liên hệ nào để phán đoán hướng đi.

Nhìn vào phương trình thứ nhất trong hệ ta nhận thấy rằng, phương trình này có cấu tạo khá giống với một số ví dụ ta vừa xét nhưng hãy để ý đến số 1 ở vế phải phương trình này. Chính con số đặc biệt này sẽ làm cho bài toán không cho chúng ta giải quyết nó bằng hướng hàm số được.

Tuy nhiên ta nhận thấy được rằng : $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=1$ nên ta sẽ đẩy ý tưởng liên hiệp xem thế nào ?

Cụ thể ta sẽ có :

$$\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{y^2+4}+y\right)=1 \Leftrightarrow \sqrt{y^2+4}+y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\sqrt{x^2+1}-x .$$

Tới đây chúng ta vẫn chưa nhận thấy được điều gì. Ta tiếp tục liên hiệp đại lượng còn lại xem sao?

Cụ thể ta sẽ có : $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(y+\sqrt{y^2+4}\right)=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x=\dfrac{1}{\sqrt{y^2+4}+y}$

$$\Leftrightarrow -4\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\frac{-4}{\sqrt{y^2+4}+y}=y-\sqrt{y^2+4} .$$

Với hai cách phân tích trên ta sẽ có : $\begin{cases} y+\sqrt{y^2+4}=\sqrt{x^2+1}-x \\ y-\sqrt{y^2+4}=-4\sqrt{x^2+1}-4x \end{cases}$.

Ở bước này kết hợp với yếu tố bên vế phải phương trình thứ hai trong hệ chứa hai đại lượng $\sqrt{x^2+1}$, x

Nên ta sẽ nghỉ đến phép cộng vế theo vế để sử dụng được phép thế.

Thật vậy, từ hệ $\begin{cases} y+\sqrt{y^2+4}=\sqrt{x^2+1}-x \\ y-\sqrt{y^2+4}=-4\sqrt{x^2+1}-4x \end{cases}$

$$\Rightarrow 2y=-3\sqrt{x^2+1}-5x .$$

Từ phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình sau :

$$(2y+5)^3-\sqrt[3]{5-2y}=2\left(3\sqrt{x^2+1}+5x\right) \Leftrightarrow (2y+5)^3-\sqrt[3]{5-2y}=-4y .$$

Phương trình này không khó để giải quyết. Do đó hệ phương trình đã cho được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải :

Do $\sqrt{x^2+1}+x\neq 0$, $y+\sqrt{y^2+4}\neq 0$. Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có phép biến đổi sau :

$$\begin{cases} y+\sqrt{y^2+4}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\sqrt{x^2+1}-x \\ -4\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\dfrac{1}{y+\sqrt{y^2+4}}=y-\sqrt{y^2+4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+\sqrt{y^2+4}=\sqrt{x^2+1}-x\,(1) \\ y-\sqrt{y^2+4}=-4\sqrt{x^2+1}-4x\,(2) \end{cases}$$

Lấy $(1)+(2)$ vế theo vế ta có $2y=-3\sqrt{x^2+1}-5x \quad (*)$

Phương trình thứ hai trong hệ được biến đổi thành :

$$(2y+5)^3-\sqrt[3]{5-2y}=-2\left(-3\sqrt{x^2+1}-5x\right)$$

Thay $(*)$ vào ta được phương trình :

$$(2y+5)^3-\sqrt[3]{5-2y}=-4y \Leftrightarrow (2y+5)^3+4y-\sqrt[3]{5-2y}=0\,(3)$$

⊕ Cách 1: Sử dụng phép liên hiệp.

Ta có : $(3)\Leftrightarrow 8y^3+60y^2+154y+123+2-\sqrt[3]{5-2y}=0$

$$\Leftrightarrow (2y+3)\left(4y^2+24y+41\right)+\frac{2y+3}{4+2\sqrt[3]{5-2y}+\sqrt[3]{(5-2y)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (2y+3)\underbrace{\left(4y^2+24y+41+\frac{1}{4+2\sqrt[3]{5-2y}+\sqrt[3]{(5-2y)^2}}\right)}_{T}=0$$

$$\Leftrightarrow 2y+3=0 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{2} \text{ vì } T>0, \forall y\in\mathbb{R}.$$

Với $y=-\frac{3}{2}$ ta có

$$(*)\Leftrightarrow 3=3\sqrt{x^2+1}+5x \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+1}=3-5x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-5x\ge 0 \\ 9x^2+9=9-30x+25x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le \frac{5}{3} \\ 8x^2-15x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \frac{5}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{15}{8} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

Thử lại ta có nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x,y)=\left(0;-\frac{3}{2}\right)$.

⊕ Cách 2 : Sử dụng hàm số .

Xét hàm số $f(y)=(2y+5)^3+4y-\sqrt[3]{5-2y}$, $\forall y\in\mathbb{R}$.

Ta có : $f'(y)=6(2y+5)^2+\frac{2}{\sqrt[3]{(5-2y)^2}}+4>0,\ \forall y\neq\frac{5}{2}$.

Do đó hàm số $f(y)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác $f\left(-\frac{3}{2}\right)=0$. Do đó phương trình $f(y)=0$ có nghiệm duy nhất $y=-\frac{3}{2}\Rightarrow x=0$.

Thử lại ta có nghiệm của hệ đã cho là $(x,y)=\left(0;-\frac{3}{2}\right)$.

Bình luận : Bài toán này ở phương trình thứ nhất hầu hết học sinh sẽ nghỉ ngay đến phương pháp hàm số để giải. Tuy nhiên cách này lại không ứng dụng được, lời giải mà chúng tôi đưa ra là một hướng giải sử dụng phương pháp liên hiệp " **giả định kéo theo ".** Phương pháp này có một ưu điểm đó là nếu trong trường hợp bài toán hệ mà có một phương trình có khả năng " sử dụng phép liên hiệp nhưng không triệt để về dấu hoặc đã triệt để nhưng không kéo được biểu thức ràng buộc giữa hai biến về kiểu đơn giản " thì với phương án này bài toán hoàn toàn toàn có thể giải quyết tốt được. Chú ý rằng, với phương án dùng **" liên hiệp giả định kéo theo "** ta luôn thu được một **phương trình hệ quả** nên sau khi tìm nghiệm xong ta cần thử lại.

Ví dụ 27: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{y+2x-1}+\sqrt{1-y}=y+2\\ x\sqrt{x}=\sqrt{y(x-1)}+\sqrt{x^2-y}\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Phân tích : Với hệ này, chúng ta dễ dàng nhận thấy cấu trúc phương trình thứ nhất trong hệ tuy đơn giản nhưng lại không có nhiều dữ kiện yếu tố để khai thác vì các đại lượng trong căn và ngoài căn rất "trơ". Ở phương trình thứ hai tuy có cấu trúc khá phức tạp hơn phương trình thứ hai nhưng hai đại lượng trong căn thức ở vế phải có chung đại lượng $-y$ nên ta sẽ tiến hành công phá phương trình thứ hai bằng phương pháp " liên hiệp giả định kéo theo ".

Cụ thể ta sẽ có :]

$$\sqrt{y(x-1)}-\sqrt{x^2-y}=\frac{xy-y-x^2+y}{\sqrt{y(x-1)}+\sqrt{x^2-y}}=\frac{x(y-x)}{x\sqrt{x}}=\frac{y-x}{\sqrt{x}}.$$

Khi đó kết hợp với phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$$\begin{cases}\sqrt{y(x-1)}+\sqrt{x^2-y}=x\sqrt{x}\,(1)\\ \sqrt{y(x-1)}-\sqrt{x^2-y}=\frac{y-x}{\sqrt{x}}(2)\end{cases}.$$

Lấy $(1)+(2)$ vế theo vế ta có phương trình :

$$2\sqrt{y(x-1)}=x\sqrt{x}+\frac{y-x}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow 2\sqrt{y(x^2-x)}=x^2-x+y$$

$$\Rightarrow 4y(x^2-x)=(x^2-x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow (y-x^2+x)^2=0\Leftrightarrow y=x^2-x.$$

Tới đây ta chỉ cần thế vào phương trình thứ hai là hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} y+2x-1\geq 0\\ 1-y\geq 0\\ x\geq 0\\ y(x-1)\geq 0\\ x^2-y\geq 0\end{cases}$

Ta có : $\sqrt{y(x-1)}+\sqrt{x^2-y}=x\sqrt{x}$ (1)

Lại có : $\sqrt{y(x-1)}-\sqrt{x^2-y}=\dfrac{xy-x^2}{\sqrt{y(x-1)}+\sqrt{x^2-y}}=\dfrac{x(y-x)}{x\sqrt{x}}=\dfrac{y-x}{\sqrt{x}}$ (2)

Kết hợp (1),(2) ta có hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{y(x-1)}+\sqrt{x^2-y}=x\sqrt{x}\,(1)\\ \sqrt{y(x-1)}-\sqrt{x^2-y}=\dfrac{y-x}{\sqrt{x}}\,(2)\end{cases}$

Lấy (1)+(2) vế theo vế ta thu được phương trình :

$$2\sqrt{xy-x}=\frac{y-x}{\sqrt{x}}+x\sqrt{x}=\frac{x^2-x+y}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y(x^2-x)}=x^2-x+y\ \Rightarrow 4y(x^2-x)=(x^2-x+y^2)$$

$$\Leftrightarrow (y-x^2+x)^2=0\Leftrightarrow y=x^2-x.$$

Thay $y=x^2-x$ vào phương trình thứ nhất trong hệ ta thu được phương trình :

$$\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}=x^2-x+2$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có :

$$\sqrt{x^2+x-1}\leq\frac{x^2+x-1+1}{2}=\frac{x^2+x}{2}.$$

$$\sqrt{-x^2+x+1}\leq\frac{-x^2+x+1+1}{2}=\frac{-x^2+x+2}{2}.$$

Từ đó ta có $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}\leq x+1$

$\Rightarrow x^2 - x + 2 \le x + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0$

Đối chiếu và thử lại ta có nghiệm duy nhất của hệ là $(x;y) = (1;0)$.

Bình luận : Bài toán giải bằng phương án "liên hiệp giả định kéo theo" dựa trên nhận xét yếu tố phần chung có được từ các đại lượng trong căn ở phương trình thứ hai trong hệ. Một đặc điểm cũng thường được tính đến khi sử dụng phương án này. Tuy nhiên, trong bài toán này nếu chúng ta sử dụng phép nâng lũy thừa cho phương phương trình thứ hai hoặc đánh giá nó thì chúng ta cũng được kết quả như trong lời giải. Bài toán này do chúng tôi đề xuất.

Ví dụ 28 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\sqrt{x^2+5} - 2\sqrt{y^2+3} = 5y \\ 2\sqrt{x^2+5} - \sqrt{y^2+3} = 2x \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, ta nhận thấy các đại lượng $\sqrt{x^2+5}, \sqrt{y^2+3}$ xuất hiện lặp lại trong cả hai phương trình trong hệ nên ta có thể nghỉ ngay đến phương án ẩn phụ hoa hai căn thức như sau :

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x^2+5} \\ b = \sqrt{y^2+3} \end{cases}$. Lúc đó hệ đã cho đưa về hệ mới là : $\begin{cases} 3a - 2b = 5y \\ 2a - b = 2x \end{cases}$.

Ta có thể xem hệ này là hệ bậc nhất hai ẩn a, b và coi hai ẩn x, y là tham số để giải quyết bằng cách giải hệ bậc nhất hai ẩn bằng định thức Cramer hoặc phương pháp cộng bình thường.

Tuy nhiên, chúng tôi muốn đề cập bài toàn này theo phương án 'liên hiệp giả định kéo theo" dựa trên yếu tố khá đặc biệt ở phương trình thứ hai đó là $2\sqrt{x^2+5}, 2x$.

Cụ thể ta có :

$$2\sqrt{x^2+5} - \sqrt{y^2+3} = 2x \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x^2+5} - x\right) = \sqrt{y^2+3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5} - x = \frac{\sqrt{y^2+3}}{2}.$$

Mặt khác do :

$\left(\sqrt{x^2+5} - x\right)\left(\sqrt{x^2+5} + x\right) = 5$ nên ta có : $\sqrt{x^2+5} + x = \dfrac{5}{\sqrt{x^2+5} - x} = \dfrac{10}{\sqrt{y^2+3}}$

Khi đó kết hợp với phương trình thứ hai trong hệ ta có hệ :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+5} - x = \dfrac{\sqrt{y^2+3}}{2} \quad (1) \\ \sqrt{x^2+5} + x = \dfrac{10}{\sqrt{y^2+3}} \quad (2) \end{cases}$$

Lấy $(1)+(2)$ vế theo vế ta có được phương trình :

$$2\sqrt{x^2+5}=\frac{\sqrt{y^2+3}}{2}+\frac{10}{\sqrt{y^2+3}}\quad(3)$$

Thay (3) vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có được phương trình :

$$\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{y^2+3}}{2}+\frac{10}{\sqrt{y^2+3}}\right)-2\sqrt{y^2+3}=5y.$$

Phương trình này không quá khó để giải. Do đó hệ đã được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải :

Do $\sqrt{x^2+5}-x\neq 0$.

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$$2\sqrt{x^2+5}-\sqrt{y^2+3}=2x$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)=\sqrt{y^2+3}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+5}-x=\frac{\sqrt{y^2+3}}{2}$$

Mặt khác do :

$\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\left(\sqrt{x^2+5}+x\right)=5$ nên ta có : $\sqrt{x^2+5}+x=\frac{5}{\sqrt{x^2+5}-x}=\frac{10}{\sqrt{y^2+3}}$

Khi đó kết hợp với phương trình thứ hai trong hệ ta có hệ :

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+5}-x=\dfrac{\sqrt{y^2+3}}{2}(1)\\[2mm]\sqrt{x^2+5}+x=\dfrac{10}{\sqrt{y^2+3}}(2)\end{cases}$$

Lấy $(1)+(2)$ vế theo vế ta có được phương trình :

$$2\sqrt{x^2+5}=\frac{\sqrt{y^2+3}}{2}+\frac{10}{\sqrt{y^2+3}}\quad(3)$$

Thay (3) vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có được phương trình :

$$\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{y^2+3}}{2}+\frac{10}{\sqrt{y^2+3}}\right)-2\sqrt{y^2+3}=5y\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt{y^2+3}}-\frac{1}{4}\sqrt{y^2+3}=y$$

$$\Leftrightarrow 12-\left(y^2+3\right)=4y\sqrt{y^2+3}$$

$$\Leftrightarrow 9-y^2=4y\sqrt{y^2+3}\Rightarrow 81-18y^2+y^4=16y^4+48y^2$$

$$\Leftrightarrow 15y^4+66y^2-81=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2=1 \\ y^2=-\frac{81}{15}(l) \end{array}\right. \Leftrightarrow y=\pm 1.$$

Thử lại ta có : $y=1$.

Với $y=1$ ta có : $2\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)=2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5}-x=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5}=x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ x^2+5=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Thử lại ta có nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x,y)=(2;1)$.

Bình luận : Dựa vào điều đặc biệt ở con số 2 trong phương trình thứ hai trong hệ, chúng ta đã sử dụng đẳng thức liên hiệp quen thuộc để tiến hành phương án "liên hiệp giả định kéo theo" thực hiện phép thế. Và với phương án này ta đã đưa bài toán về lời giải độc đáo hơn ý tưởng ban đầu của bài toán mà chúng tôi đã phân tích.

Ví dụ 29 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y\sqrt{x^2-9}=x\sqrt{y^2+9}-9 \\ 3x^3-11y^2-95=\sqrt[3]{x^2\left(x^4+2x+15y^2+131\right)} \end{cases} \quad (x,y\in \mathbb{R})$$

Phân tích : Từ hệ này ta dễ nhận thấy để công phá hệ này ta cần công phá phương trình thứ nhất trong hệ trước. Với cấu tạo của phương trình thứ nhất ta có thể nghỉ đến phép nâng lũy thừa hai vế phương trình hoặc nhờ một phép đánh giá nào đó.

Tuy nhiên, trong bài toán này chúng tôi muốn triển khai phương trình thứ nhất bằng phương án "liên hiệp giả định kéo theo" dựa vào yếu tố chung đặc biệt đó là chúng có chung đại lượng x^2y^2.

Thật vậy, dựa vào yếu tố này ta sẽ có "phép giả định" như sau :

$$\begin{cases} x\sqrt{y^2+9}-y\sqrt{x^2-9}=9(1) \\ x\sqrt{y^2+9}+y\sqrt{x^2-9}=\dfrac{9\left(x^2+y^2\right)}{x\sqrt{y^2+9}-y\sqrt{x^2-9}}=x^2+y^2(2) \end{cases}.$$

Lấy (1) + (2) vế theo vế ta có :

$$2x\sqrt{y^2+9}=x^2+y^2+9 \Rightarrow 4x^2\left(y^2+9\right)=\left(x^2+y^2+9\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2y^2+36x^2=x^4+y^4+81+2x^2y^2+18x^2+18y^2 \Leftrightarrow \left(x^2-y^2-9\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow y^2=x^2-9.$$

Tới đây ta chỉ cần thực hiện phép thế vào phương trình thứ hai trong hệ xem như bài toán đã được giải quyết.

Lời giải :

Điều kiện : $x^2-9\ge 0 \Leftrightarrow x\le -3 \vee x\ge 3$.

Ta có : $\begin{cases} x\sqrt{y^2+9}-y\sqrt{x^2-9}=9\ (1) \\ x\sqrt{y^2+9}+y\sqrt{x^2-9}=\dfrac{9\left(x^2+y^2\right)}{x\sqrt{y^2+9}-y\sqrt{x^2-9}}=x^2+y^2\ (2) \end{cases}$.

Lấy $(1)+(2)$ vế theo vế ta có :

$$2x\sqrt{y^2+9}=x^2+y^2+9 \Rightarrow 4x^2\left(y^2+9\right)=\left(x^2+y^2+9\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2y^2+36x^2=x^4+y^4+81+2x^2y^2+18x^2+18y^2 \Leftrightarrow \left(x^2-y^2-9\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow y^2=x^2-9.$$

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$3x^3-11\left(x^2-9\right)-95=\sqrt[3]{x^2\left(x^4+2x+15\left(x^2-9\right)+131\right)}$$

$$\Leftrightarrow 3x^3-11x^2+4=\sqrt[3]{x^6+15x^4+2x^3-4x^2}$$

$$\Leftrightarrow 3x^3-12x^2-x+4=\sqrt[3]{x^6+15x^4+2x^3-4x^2}-\left(x^2+x\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\left(3x^2-1\right)$$

$$=\frac{-3x^5+12x^4+x^3-4x^2}{\sqrt[3]{\left(x^6+15x^4+2x^3-4x^2\right)^2}+\left(x^2+x\right)\sqrt[3]{x^6+15x^4+2x^3-4x^2}+\left(x^2+x\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\left(3x^2-1\right)$$

$$=\frac{-(x-4)\left(3x^2-1\right)x^2}{\sqrt[3]{\left(x^6+15x^4+2x^3-4x^2\right)^2}+\left(x^2+x\right)\sqrt[3]{x^6+15x^4+2x^3-4x^2}+\left(x^2+x\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\left(3x^2-1\right)$$

$$\underbrace{\left(1+\frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^6+15x^4+2x^3-4x^2\right)^2}+\left(x^2+x\right)\sqrt[3]{x^6+15x^4+2x^3-4x^2}+\left(x^2+x\right)^2}\right)}_{P}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(3x^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \text{ vì } P>0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Đối chiếu điều kiện ta nhận $x=4 \Rightarrow y=\pm\sqrt{7}$.

Thử lại ta có nghiệm của hệ phương trình là $(x,y)=(4;\sqrt{7})$.

Bình luận : Lời giải trong bài toán này được chúng tôi giải theo hướng tiếp cận "liên hiệp giả định kéo theo". Tuy nhiên, với phương trình thứ nhất chúng ta hoàn toàn có thể sử dụng phép nâng lũy thừa để công phá phương trình thứ nhất.

Cụ thể ta có :

$$x\sqrt{y^2+9}=y\sqrt{x^2-9}+9 \Rightarrow x^2y^2+9x^2=x^2y^2-9y^2+18y\sqrt{x^2-9}+81$$

$$\Leftrightarrow x^2-9-2y\sqrt{x^2-9}+y^2=0 \Leftrightarrow \left(y-\sqrt{x^2-9}\right)^2=0 \Leftrightarrow y=\sqrt{x^2-9}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0 \\ y^2=x^2-9 \end{cases}.$$

Và tới đây ta giải như trong lời giải.

Lưu ý rằng về thẩm mỹ của bài toán thì cách lũy thừa hai vế là cách đi tự nhiên và đẹp mắt nhất, tuy nhiên chúng ta không nên bằng lòng trước sự hoàn mỹ này mà ta nên đi tìm một hướng đi khác mà có thể áp dụng được cho nhiều bài toán khác hơn. Đó chính là cách học toán.

Ví dụ 30: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=\sqrt{4x-y} \\ \sqrt{x^2-9}=3\sqrt{y-3x+3}-2 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

(Thi thử chuyên Lam Sơn lần 1 năm 2015)

Phân tích : Với hệ này, chúng ta nhận thấy phương trình thứ nhất trong hệ hoàn toàn có thể sử dụng phép lũy thừa để tìm mối quan hệ giữa hai biến x, y. Tuy nhiên hình thức phương trình thứ nhất này cũng có thể nghỉ đến phép "liên hiệp giả định kéo theo" dựa vào yếu tố vế trái phương trình thứ nhất có chung đại lượng x.

Cụ thể ta có phép giả định sau :

$$\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=\sqrt{4x-y}\,(1) \\ \sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=\dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}}=\dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt{4x-y}}\,(2) \end{cases}$$

Lấy (1) + (2) vế theo vế ta có phương trình :

$$2\sqrt{x+\sqrt{y}}=\sqrt{4x-y}+\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{4x-y}}\Leftrightarrow 2\sqrt{(4x-y)\left(x+\sqrt{y}\right)}=4x-y+2\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow 4(4x-y)\left(x+\sqrt{y}\right)=\left(4x-y-2\sqrt{y}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y(y-4x+4)=0.$$

Và tới đây hệ đã được giải quyết.

Lời giải: Điều kiện : $\begin{cases} x^2-9\ge 0 \\ x\ge\sqrt{y} \\ y\ge 0 \\ 4x-y\ge 0 \\ y-3x+3\ge 0 \end{cases}$.

Ta có : $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=\sqrt{4x-y}\,(1) \\ \sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=\dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}}=\dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt{4x-y}}(2) \end{cases}$

Lấy $(1)+(2)$ vế theo vế ta có phương trình :

$$2\sqrt{x+\sqrt{y}}=\sqrt{4x-y}+\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{4x-y}}\Leftrightarrow 2\sqrt{(4x-y)\left(x+\sqrt{y}\right)}=4x-y+2\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow 4(4x-y)\left(x+\sqrt{y}\right)=\left(4x-y-2\sqrt{y}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y(y-4x+4)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=4x-4 \end{array}\right..$$

Thử lại ta loại $y=0$. Với $y=4x-4$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$\sqrt{x^2-9}=3\sqrt{x-1}-2$ (điều kiện $x\ge 3$).

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-9}-4=3\left(\sqrt{x-1}-2\right)\Leftrightarrow \frac{x^2-25}{\sqrt{x^2-9}+4}=\frac{3(x-5)}{\sqrt{x-1}+2}$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\underbrace{\left(\frac{x+5}{\sqrt{x^2-9}+4}-\frac{3}{\sqrt{x-1}+2}\right)}_{T}=0\ (*).$$

Với $x\ge 3$ ta có : $\dfrac{x+5}{\sqrt{x^2-9}+4}>1\ (3)$.

Thật vậy ta có $(3) \Leftrightarrow x+1 \geq \sqrt{x^2-9} \Leftrightarrow 2(x+5) > 0$ (luôn đúng).

Mặt khác $\sqrt{x-1}+2 \geq 2+\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x-1}+2} \leq \frac{3}{2+\sqrt{2}}$, với $x \geq 3$.

Từ đó ta có: $\frac{x+5}{\sqrt{x^2-9}+4} - \frac{3}{\sqrt{x-1}+2} > 1 - \frac{3}{2+\sqrt{2}} > 0$, với $x \geq 3$.

Nên từ $(*)$ ta có $x = 5 \Rightarrow y = 16$.

Đối chiếu và thử lại ta có nghiệm của hệ là $(x,y) = (5;16)$.

Bình luận : Bài toán này như chúng tôi đã phân tích thì từ phương trình thứ nhất trong hệ ta hoàn toàn có thể sử dụng chuyển vế rồi lũy thừa hai vế phương trình ta vẫn tìm được lời giải. Tuy nhiên dưới góc nhìn 'liên hiệp giả định kéo theo" ta vẫn có thể công phá được tốt. Và trên đây, chúng tôi đã cố gắng giới thiệu và phân tích tư duy để có thể giải hệ dưới phương án sử dụng liên hiệp trực tiếp hoặc giả định.

Kết thúc phần này, chúng tôi muốn gửi gắm đến các bạn độc giả một điều tuy phương pháp nhân lượng liên hiệp là một phương pháp khá mạnh, nhưng cũng có nhược điểm của riêng nó. Nhược điểm lớn nhất chính là sự đánh giá vô nghiệm hoặc có nghiệm lại hoặc có nghiệm khác là một bước khó khăn không nhỏ cho người giải. Nhưng chính sự khó khăn này làm cho bài toán thêm nhiều thú vị khi giải bằng phương pháp này. Để minh chứng điều này chúng tôi xin giới thiệu các bạn một bài toán mà sự liên hiệp hầu như đã có nhưng lại không triển khai rốt ráo để dẫn đến kết quả cuối cùng.

Ví dụ 31: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{(x-y)^2+4(2x-y)+15} - \sqrt{y} = \sqrt{x+3} \\ \sqrt{y^2-2(x+y)+10} + \sqrt[3]{2x-y+3} = y-x+2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Phân tích : Với cấu trúc hệ này, không quá khó để nhận ra để giải quyết hệ chúng ta cần công phá phương trình thứ nhất trong hệ.

Ở phương trình thứ nhất, chúng ta nhận thấy phương trình có cấu trúc khá quen thuộc nên để giải quyết ta thử đoán nghiệm. Vì đề bài cho ba căn thức, trong đó có một căn thức chứa cả biến x, y, còn hai căn thức còn lại thì một căn thức chỉ chứa biến y, một căn chỉ chứa biến x nên ta thử cho hai căn này bằng nhau để tìm mối quan hệ giữa chúng xem sao ?

Cụ thể ta có : $\sqrt{y} = \sqrt{x+3} \Leftrightarrow y = x+3$.

Thay mối quan hệ này, ta nhận thấy hai vế phương trình bằng nhau, do đó ta nghỉ đến phép liên hiệp.

Cụ thể ta tách phương trình thứ nhất như sau :

$$\sqrt{(x-y)^2+4(2x-y)+15}-2\sqrt{x+3}-\left(\sqrt{y}-\sqrt{x+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2+8x-4y+15-4x-12}{\sqrt{(x-y)^2+4(2x-y)+15}+2\sqrt{x+3}}-\frac{y-x-3}{\sqrt{y}+\sqrt{x+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2+4(x-y)+3}{\sqrt{(x-y)^2+4(2x-y)+15}+2\sqrt{x+3}}+\frac{x-y+3}{\sqrt{y}+\sqrt{x+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y+1)(x-y+3)}{\sqrt{(x-y)^2+4(2x-y)+15}+2\sqrt{x+3}}+\frac{x-y+3}{\sqrt{y}+\sqrt{x+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+3)\left(\frac{x-y+1}{\sqrt{(x-y)^2+4(2x-y)+15}+2\sqrt{x+3}}+\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{x+3}}\right)=0$$

Bây giờ vấn đề quan tâm trong ngoặc chính là dấu của $x-y+1$. Nếu chúng ta tìm được dấu của đại lượng này xem như bài toán hoàn toàn được giải quyết.

Tuy nhiên với điều kiện của hệ : $\begin{cases} x \ge -3 \\ y \ge 0 \\ (x-y)^2+4(2x-y)+15 \ge 0 \end{cases}$, rõ ràng không giải quyết được đại lượng này về dấu của đại lượng mà ta đang quan tâm.

Tiếp theo, ta quan tâm đến phương trình thứ hai trong hệ. Với cấu trúc phương trình này thì rõ ràng nếu có khai thác được gì thì chỉ khai thác được từ điều kiện: $y^2-2(x+y)+4 \ge 0$.

Nhưng thật không may là từ điều kiện này, chúng ta cũng không khai thác được gì cho dấu của đại lượng mà ta đang quan tâm. Và điều này, chứng tỏ được phương pháp nhân lượng liên hiệp trong bài toán này bắt được nhân tử chung nhưng lại không xử lí được rốt ráo và nếu có xử lí tiếp sẽ rất khó khăn cho chúng ta.

Vậy chúng ta đành tìm phương án khác. Với cấu trúc của phương trình thứ nhất thì ta có thể sử dụng phép nâng lũy thừa để khử bớt căn thức, cộng với việc đã đoán được mối quan hệ giữa x, y ta có quyền nghỉ đến các bước sau có thể là liên hiệp phương trình nào đó có lợi hơn hoặc xử lí liên quan đến hằng đẳng thức.

Cụ thể ta có phương trình thứ nhất được biến đổi tương đương với phương trình:

$$\sqrt{(x-y)^2+4(2x-y)+15}=\sqrt{y}+\sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+4(2x-y)+15=x+y+3+2\sqrt{y(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2+7x-5y+12-2\sqrt{y(x+3)}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+9-2xy+6x-6y+x+y+3-2\sqrt{y(x+3)}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+3)^2+\left(\sqrt{y}-\sqrt{x+3}\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{y}-\sqrt{x+3}=0\\ x-y+3=0\end{cases} \Leftrightarrow y=x+3.$$

Và lúc này mọi chuyện đã được giải quyết. Ta đi vào lời giải cho bài toán.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}x\ge -3\\ y\ge 0\\ (x-y)^2+4(2x-y)+15\ge 0\\ y^2-2(x+y)+4\ge 0\end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi tương đương thành phương trình :

$$(x-y)^2+4(2x-y)+15=x+y+3+2\sqrt{y(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2+7x-5y+12-2\sqrt{y(x+3)}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+9-2xy+6x-6y+x+y+3-2\sqrt{y(x+3)}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+3)^2+\left(\sqrt{y}-\sqrt{x+3}\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x-y+3=0\\ \sqrt{y}-\sqrt{x+3}=0\end{cases} \Leftrightarrow y=x+3$$

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$\sqrt{(x+3)^2-2(2x+3)+10}+\sqrt[3]{x}=5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+13}+\sqrt[3]{x}=5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+13}-4+\sqrt[3]{x}-1=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x-3}{\sqrt{x^2+2x+13}+4}+\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+3)}{\sqrt{x^2+2x+13}+4}+\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\underbrace{\left(\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+13}+4}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right)}_{T}=0$$

$\Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ vì $\forall x\ge -3 \Rightarrow T>0$.

Với $x=1\Rightarrow y=4$. Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(1;4)$.

Bình luận: Rõ ràng với các dữ kiện trong hệ này thì phương pháp nhân lượng liên hiệp tỏ ra "yếu" hơn phương pháp hằng đẳng thức. Do đó, trong làm toán các khái niệm "mạnh", "yếu" của phương pháp chỉ là các khái niệm ở mức độ tương đối. Nó còn tùy thuộc vào rất nhiều thực tế cấu trúc mà bài toán ta đang tiếp xúc nó tương thích với phương pháp nào.

* **Hệ phương trình chứa một phương trình có dáng dấp đối xứng hai biến.**
Để nhận dạng loại hệ này, ta cần chú ý tới cấu trúc của hệ có chứa một phương trình có tính đối xứng hai biến như :

⊕ *Chứa các đại lượng tổng và tích giữa hai biến* x, y

⊕ *Trên phương trình có thể cô lập được hai biến với nhau cùng theo một định dạng phương trình nhất định..*

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 - 5y = 2y^3 - 5x \\ \dfrac{3y}{x^2 + y + 1} + \dfrac{5x}{(y+1)^2 + x} = x - y + 2 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Cấu trúc phương trình thứ hai trong hệ không khai thác được gì, phương trình thứ nhất trong hệ hai biến x, y cô lập và có tính đối xứng.

Do đó ta xuất phát từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$$2x^3 - 5y = 2y^3 - 5x \Leftrightarrow 2\left(x^3 - y^3\right) + 5(x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)\left((x - y)^2 + x^2 + y^2 + 5\right) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Vậy hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x^2 + y + 1 \neq 0 \\ (y+1)^2 + x \neq 0 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta biến đổi thành phương trình :

$$2x^3 - 5y = 2y^3 - 5x \Leftrightarrow 2\left(x^3 - y^3\right) + 5(x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - y)\left(x^2 - xy + y^2\right) + 5(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)\left((x - y)^2 + x^2 + y^2 + 5\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ vì } (x - y)^2 + x^2 + y^2 + 5 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thay $y = x$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$\frac{3x}{x^2 + x + 1} + \frac{5x}{x^2 + 3x + 1} = 2 \qquad (1).$$

Với $x = 0$ không thỏa (1).

Do đó với $x \neq 0$ ta biến đổi (1) thành : $\dfrac{3}{x + \frac{1}{x} + 1} + \dfrac{5}{x + \frac{1}{x} + 3} = 2 \ (2)$.

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x} + 1$, ta có (2) trở thành :

$$\frac{3}{t} + \frac{5}{t + 2} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 0, t \neq -2 \\ t^2 - 2t - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (t - 3)(t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\left(x+\frac{1}{x}+2\right)=0\Leftrightarrow(x-1)^2(x+1)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\{(1;1);(-1;-1)\}$.

Bình luận : Bài toán trên là một bài toán cơ bản, kỉ thuật chính là dùng hằng đẳng thức.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x-\frac{1}{y}=2y-\frac{1}{x}\\2\left(2x^2+y^2\right)+4(x-y)=7xy-8\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích: Với hê này, ta nhận thấy phương trình thứ hai trong hệ là một phương trình bậc hai ẩn x,y. Kiểm tra nhận thấy không phân tích được thành nhân tử. Phương trình thứ nhất cô lập hai biến và có tính đối xứng nên ta bắt đầu với phương trình này.

Cụ thể ta có :

$$2x-\frac{1}{y}=2y-\frac{1}{x}\Leftrightarrow 2(x-y)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=0\Leftrightarrow(x-y)\left(1-\frac{2}{xy}\right)=0.$$

Vậy xem như hệ dễ dàng giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}x\neq 0\\y\neq 0\end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$2x-\frac{1}{y}=2y-\frac{1}{x}\Leftrightarrow 2(x-y)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=0\Leftrightarrow(x-y)\left(1-\frac{2}{xy}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\xy=2\end{array}\right..$$

⊕ Với $x=y$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình

$$x^2-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\sqrt{2}\Rightarrow y=2\sqrt{2}\\x=-2\sqrt{2}\Rightarrow y=2\sqrt{2}\end{array}\right..$$

⊕ Với $xy=2$. Ta có phương trình thứ hai được viết lại :

$$4x^2+2y^2+8-7xy+4x-4y=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+y^2+1-4xy+4x-2y+y^2-2y+1=3(xy-2)$$

$$\Leftrightarrow(2x-y+1)^2+(y-1)^2=3(xy-2)\Rightarrow xy-2\geq 0\Leftrightarrow xy\geq 2.$$

Do đó $xy=\frac{1}{2}$ loại.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left\{\left(2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right);\left(-2\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right)\right\}$.

Bình luận: Có một số lời giải đã giải bài toán có cấu trúc tương tự như bài toán này bằng cách xét hàm số đại diện. Tuy nhiên nếu như trong ví dụ này mà xét hàm số đại diện: $f(t)=t-\frac{2}{t}$ và khẳng định nó đơn điệu tăng với mọi $t\neq 0$ rồi suy ra $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$ là không chuẩn. Vì hàm số bị gián đoạn tại $t=0$ tức là hàm số f(t) đơn điệu trên một tập xác định D là hợp của hai khoảng $(-\infty;0),(0;+\infty)$ và điều này rõ ràng không hề xảy ra $f(2015)=f(-2015)$???.

Ví dụ 3:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3+\dfrac{3xy}{x+y}=1 \\ \left(\sqrt[3]{2x-y}+\sqrt[3]{6x+y}\right)\sqrt{x+y}=\sqrt[3]{3x-5y+5} \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Không khó để nhận ra hệ này chúng ta cần xuất phát từ phương trình thứ nhất trong hệ, quan sát thấy phương trình thứ nhất trong hệ được cấu tạo bởi một phương trình có tính đối xứng với hai biến x,y vì chứa tổng $x+y$ và tích xy nên ta sẽ bắt đầu từ phương trình này.

Cụ thể ta có : $x^3+y^3+\dfrac{3xy}{x+y}=1\Leftrightarrow (x+y)\left(x^3+y^3\right)+3xy-(x+y)=0$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2\left(x^2-xy+y^2\right)+3xy-(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2\left((x+y)^2-3xy\right)+3xy-(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^4-(x+y)-3xy\left((x+y)^2-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left((x+y)^3-1\right)-3xy(x+y-1)(x+y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)(x+y)\left((x+y)^2+x+y+1\right)-3xy(x+y-1)(x+y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)\left((x+y)^3+(x+y)^2+x+y-3xy(x+y+1)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)\left(x^3+y^3+x^2+y^2-xy+x+y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)\left((x+y)\left(x^2-xy+y^2+1\right)+x^2-xy+y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)\left((x+y)\left(\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+1\right)+\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x+y-1=0\Leftrightarrow y=1-x$ vì $x+y\geq 0$.

Vậy nút thắt bài toán đã được giải quyết. Do đó hệ cơ bản đã được giải.

Lời giải : Điều kiện : $x+y\ge 0$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$x^3+y^3+\frac{3xy}{x+y}=1\Leftrightarrow (x+y)\left(x^3+y^3\right)+3xy-(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2\left(x^2-xy+y^2\right)+3xy-(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2\left((x+y)^2-3xy\right)+3xy-(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^4-(x+y)-3xy\left((x+y)^2-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left((x+y)^3-1\right)-3xy\left((x+y)^2-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)(x+y)\left((x+y)^2+x+y+1\right)-3xy(x+y-1)(x+y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)\left((x+y)^3+(x+y)^2+x+y-3xy(x+y+1)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)\left(x^3+y^3+x^2+y^2+x+y-xy\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)\left((x+y)\left(\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+1\right)+\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x+y-1=0\Leftrightarrow y=1-x$ vì với

$$x+y\ge 0\Rightarrow (x+y)\left(\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+1\right)+\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}>0.$$

Thay $y=1-x$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$\sqrt[3]{3x-1}+\sqrt[3]{5x+1}=2\sqrt[3]{x}\Leftrightarrow 8x+3\sqrt[3]{(3x-1)(5x+1)}\left(\sqrt[3]{3x-1}+\sqrt[3]{5x+1}\right)=8x$$

$$\Rightarrow 8x+\sqrt[3]{(3x-1)(5x+1)x}=8x\Leftrightarrow (3x-1)(5x+1)x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\frac{1}{3}\\ x=-\frac{1}{5}\end{array}\right..$$

Thử lại ta có nghiệm của phương trình là : $x=0;x=\frac{1}{3};x=-\frac{1}{5}$.

Từ đó ta suy ra được : $y=1;y=\frac{2}{3};y=\frac{6}{5}$. Đối chiếu điều kiện có nghiệm của hệ là : $(x,y)=\left\{(0;1);\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right);\left(-\frac{1}{5};\frac{6}{5}\right)\right\}$.

Bình luận : Cấu trúc phương trình thứ nhất trong hệ quá rõ ràng về tính đối xứng nên nếu hệ này giải được bằng phương pháp nhân tử hóa và sử dụng phép thế thì chỉ có thể bắt đầu từ phương trình này. Kiểm tra cũng dễ thấy phương trình này tách được nhân tử. Về giải phương trình sau khi thế, tuy là một phương trình cơ bản nhưng nếu không tinh ý về kí hiệu tương đương hay hệ quả thì sẽ dẫn đến những sai lầm đáng tiếc, và trên thực tế rất nhiều học sinh đã bị sai lầm này.

Ví dụ 4 :

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2-36=-\dfrac{12xy}{x+y} \\ \dfrac{2}{y}\left(\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{2y^2}{3}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{\dfrac{6(5x-4y)x^2}{y}}-5x\right) \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích: Cấu trúc phương trình thứ nhất trong hệ này, giống với ví dụ 3 do đó ta tiến hành bắt nhân tử với phương trình này vì phương trình thứ hai trong hệ có cấu tạo khá rối.

Phương trình thứ nhất được biến đổi như sau :

$$(x+y)(x^2+y^2)-36(x+y)=-12xy$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left((x+y)^2-2xy\right)-36(x+y)=-12xy$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3-36(x+y)-2xy(x+y-6)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left((x+y)^2-36\right)-2xy(x+y-6)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-6)\left((x+y)^2+6(x+y)-2xy\right)=0 \Leftrightarrow (x+y-6)\left(x^2+y^2+6x+6y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-6)\left((x+3)^2+(y+3)^2-18\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-6=0 \\ (x+3)^2+(y+3)^2=18 \end{array}\right.$$

Tới đây về mặt tách nhân tử đã thành công. Tuy nhiên nếu ta cứ đem thế thì với trường hợp $x+y-6=0$ ta đã cảm thấy khó khăn, thì nhân tử còn lại sẽ khó khăn gấp nhiều lần.

Do đó buộc lòng chúng ta phải công phá phương trình thứ hai trong hệ xem như thế nào?

Cụ thể ta có:

$$\frac{2}{y}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{2y^2}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{6(5x-4y)x^2}{y}}-5x\right) \Leftrightarrow \frac{x^2}{2y}+\frac{5x-4y}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6(5x-4y)x^2}{y}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2y}+\frac{5x-4y}{3}=\sqrt{\frac{2(5x-4y)x^2}{3y}} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2y}+\frac{5x-4y}{3}=\sqrt{\frac{2x^2}{y}\left(\frac{5x-4y}{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2y}+\frac{5x-4y}{3}=2\sqrt{\frac{x^2}{2y}\left(\frac{5x-4y}{3}\right)} \Rightarrow \left(\frac{x^2}{2y}+\frac{5x-4y}{3}\right)^2=4\left(\frac{x^2}{2y}\left(\frac{5x-4y}{3}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{2y}-\frac{5x-4y}{3}\right)^2=0 \Leftrightarrow 3x^2=2y(5x-4y) \Leftrightarrow 3x^2-10xy+8y^2=0$$

Và thật may mắn là phương trình cuối là một phương trình đẳng cấp tách được nhân tử.

Vậy xem như hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} \dfrac{x^2(5x-4y)}{y} \geq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$.

Phương trình thứ hai trong hệ được viết lại :

$$\frac{2}{y}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{2y^2}{3}\right)=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6(5x-4y)x^2}{y}}-\frac{5x}{3} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2y}+\frac{5x-4y}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6(5x-4y)x^2}{y}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2y}+\frac{5x-4y}{3}=\sqrt{\frac{2(5x-4y)x^2}{3y}} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2y}+\frac{5x-4y}{3}=\sqrt{\frac{2x^2}{y}\left(\frac{5x-4y}{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2y}+\frac{5x-4y}{3}=2\sqrt{\frac{x^2}{2y}\left(\frac{5x-4y}{3}\right)} \Rightarrow \left(\frac{x^2}{2y}+\frac{5x-4y}{3}\right)^2=4\left(\frac{x^2}{2y}\left(\frac{5x-4y}{3}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{2y}-\frac{5x-4y}{3}\right)^2=0 \Leftrightarrow 3x^2=2y(5x-4y) \Leftrightarrow 3x^2-10xy+8y^2=0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-6xy-4xy+8y^2=0 \Leftrightarrow (x-2y)(3x-4y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ x=\dfrac{4y}{3} \end{array}\right.$$

⊕ Với $x=2y$ thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta được phương trình :

$$5y^2-36=-\frac{24x^2}{3y} \Leftrightarrow 15y^3+24y^2-108y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-\dfrac{18}{5} \\ y=2 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện của ta có $\left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{18}{5} \Rightarrow x=-\dfrac{36}{5} \\ y=2 \Rightarrow x=4 \end{array}\right.$.

⊕ Với $x=\dfrac{4y}{3}$ thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta được phương trình :

$$\frac{25}{9}y^2-36=-\frac{16y^2}{\frac{7}{3}y}\Leftrightarrow\frac{175}{27}y^3+16y^2-84y=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\ y=\frac{18}{7}\\ y=-\frac{126}{25}\end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện ta có : $\left[\begin{array}{l}y=\frac{18}{7}\Rightarrow x=\frac{24}{7}\\ y=-\frac{126}{25}\Rightarrow x=-\frac{168}{25}\end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là:

$$(x,y)=\left\{(4;2);\left(\frac{24}{7};\frac{18}{7}\right);\left(-\frac{36}{5};-\frac{18}{5}\right);\left(-\frac{168}{25};-\frac{126}{25}\right)\right\}.$$

Bình luận : Với hệ này, các bạn sẽ thắc mắc tại sao chúng tôi phân tích và giải lại ngược nhau. Bài toán này, thật chất là phương trình thứ hai chúng ta có được là sự may mắn sau khi biến đổi rốt ráo ta thu được một phương trình đẳng cấp tách được nhân tử. Chứ nếu phương trình cuối cùng mà ta thu được có kết quả cũng một phương trình đẳng cấp nhưng ở dạng này chẳng hạn $3x^2-10xy+8y^2=1$ thì thật sự là một trở ngại. Trong khi đó, phương trình thứ nhất trong hệ lại là một phương trình có cấu trúc đối xứng hai biến nên việc tư duy phương trình này tách được nhân tử là một tư duy tự nhiên, điều này liền mạch với kiến thức và đường hướng logic, còn phương trình thứ hai trong hệ nếu ngay từ đầu mà biến đổi là một sự "ăn may" trong đường hướng giải vì sẽ rất dễ gặp rủi ro có khi không tìm được hướng giải quyết. Trở ngại lúc này của bài toán tách nhân tử là chúng ta thu được hai nhân tử nhưng nếu thực hiện phép thế đơn lẻ thì sẽ khó khăn. Tuy nhiên nếu phương trình thứ hai trong hệ mà được biết đổi như chúng tôi lấy ví dụ thì việc nhân tử ban đầu tìm được là một đường hướng giải để giải quyết bài toán.

Ví dụ 5:

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{3\left(x^4+y^4\right)+2x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\ xy^2+\sqrt{\left(1-2y^2+x^2\right)^3}=x\sqrt{2\left(x^2-2y^2+1\right)}\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích: Với hệ này, dễ thấy rằng phương trình thứ nhất có tính đối xứng với biến x^2,y^2 nên ta có thể bắt đầu công phá hê này từ phương trình thứ nhất, còn phương trình thứ hai không cho chúng ta một đường hướng nào để công phá.

Biến đổi phương trình thứ nhất ta được phương trình :

$$\frac{x^4+y^4}{x^2y^2}=\frac{3\left(x^4+y^4\right)+2x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Với phương trình vừa biến đổi, nhận thấy nếu ta trừ 2 cho hai vế phương trình ta sẽ được hằng đẳng thức.

Thật vậy, ta có :

$$\frac{x^4+y^4}{x^2y^2}-2=\frac{3x^4+2x^2y^2+3y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}-2\Leftrightarrow\frac{\left(x^2-y^2\right)^2}{x^2y^2}=\frac{\left(x^2-y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-y^2\right)^2\left(\frac{1}{x^2y^2}-\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)=0\Leftrightarrow\left(x^2-y^2\right)^2\left(\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2y^2\left(x^2+y^2\right)^2}\right)=0$$

Không khó nhận ra biểu thức trong ngoặc luôn dương nên ta sẽ có $x^2=y^2$.

Và như thế nút thắt của bài toán đã được gỡ. Và hệ cơ bản đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện: $\begin{cases}xy\neq 0\\1-2y^2+x^2\geq 0\end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$\frac{x^4+y^4}{x^2y^2}=\frac{3x^4+2x^2y^2+3y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}\Leftrightarrow\frac{x^4+y^4}{x^2y^2}-2=\frac{3x^4+2x^2y^2+3y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}-2$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x^2-y^2\right)^2}{x^2y^2}=\frac{\left(x^2-y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)}\Leftrightarrow\left(x^2-y^2\right)^2\left(\frac{1}{x^2y^2}-\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-y^2\right)^2\left(\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2y^2\left(x^2+y^2\right)^2}\right)=0\Leftrightarrow x^2=y^2\text{ vì }\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2y^2\left(x^2+y^2\right)^2}>0.$$

Thay $y^2=x^2$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$x^3+\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}=x\sqrt{2\left(1-x^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(x^2-x\sqrt{1-x^2}+1-x^2\right)=x\sqrt{2\left(1-x^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1-x\sqrt{1-x^2}\right)=x\sqrt{2\left(1-x^2\right)}\ (1).$$

Đặt $t = x + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x\sqrt{1-x^2} = \dfrac{t^2-1}{2}$. Lúc đó phương trình (1) trở thành :

$$t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{t^2-1}{2}\right) \Leftrightarrow t^3 + \sqrt{2}\cdot t^2 - 3t - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(t-\sqrt{2}\right)\left(t^2+2\sqrt{2}\cdot t+1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{2} \\ t = 1-\sqrt{2} \\ t=-1-\sqrt{2} \end{array}\right. .$$

⊕ Với $t = -1-\sqrt{2} \Leftrightarrow x+\sqrt{1-x^2} = -1-\sqrt{2}\ \ (2)$.

Nhận xét với điều kiện $-1 \le x \le 1 \Rightarrow \begin{cases} x+\sqrt{1-x^2} \ge -1 \\ -1-\sqrt{2} < -1 \end{cases}$ nên ta có (2) vô nghiệm.

⊕ Với $t = 1-\sqrt{2} \Leftrightarrow x+\sqrt{1-x^2} = 1-\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1-\sqrt{2}-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 \ge 0 \\ 1-\sqrt{2}-x \ge 0 \\ x^2-\left(1-\sqrt{2}\right)x+1-\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1-\sqrt{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$$

⊕ Với $t=\sqrt{2} \Leftrightarrow x+\sqrt{1-x^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}-x \Leftrightarrow 1-x^2 = \left(\sqrt{2}-x\right)^2$

$$\Leftrightarrow 2x^2-2\sqrt{2}x+1 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}x-1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có :

$$(x,y) = \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right);\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right); \\ \left(\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2};\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\right);\left(\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2};\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1}{2}\right) \end{array}\right\}$$

Bình luận: Bài toán dễ nhân tử hóa từ sự đối xứng của phương trình thứ nhất trong hệ. Cách xử lí phương trình cuối cần một sự khéo léo trong tính toán và biến đổi.

Ví dụ 6:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2(x+y)^3}{\sqrt{xy}} - 2\left(x^2+y^2\right) - (x+y)\sqrt{xy} = 10xy \\ \sqrt{x\left(10x^2-1\right)+y-1} = 3\left(3-\sqrt[3]{4x+y+3}\right) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, phương trình thứ hai chứa hai căn bậc lệch, các đại lượng không có mối liên quan gì để ta khai thác. Phương trình thứ nhất có tính đối xứng với hai biến x, y. Nhưng nếu ta tinh ý, phương trình này không những có tính đối xứng mà nó còn là phương trình đẳng cấp bậc ba với đại lượng $x+y, \sqrt{xy}$.

Thật vậy, ta có phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình :

$$\frac{2(x+y)^3}{\sqrt{xy}} - 2\left(x^2+y^2\right) - (x+y)\sqrt{xy} = 10xy$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x+y)^3}{\sqrt{xy}} - 2(x+y)^2 - (x+y)\sqrt{xy} - 6xy = 0 \ (1).$$

Để cho tiện trong việc khai triển ta đặt $a = x+y, b = \sqrt{xy}$.

Khi đó (1) trở thành:

$$\frac{2a^3}{b} - 2a^2 - ab - 6b^2 = 0 \Leftrightarrow 2a^3 - 2a^2b - ab^2 - 6b^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2b)\left(2a^2+2ab+3b^2\right) = 0 \Leftrightarrow a = 2b$$

$$\Leftrightarrow x+y = 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Vậy xem nút thắt của bài toán đã được gỡ. Và giờ chúng ta đi giải quyết hệ.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} xy > 0 \\ x\left(10x^2-1\right)+y+1 \ge 0 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình :

$$\frac{2(x+y)^3}{\sqrt{xy}} - 2\left(x^2+y^2\right) - (x+y)\sqrt{xy} = 10xy$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x+y)^2}{\sqrt{xy}} - 2(x+y)^2 - (x+y)\sqrt{xy} - 6xy = 0 \ (1)$$

Đặt $\begin{cases} a = x+y \\ b = \sqrt{xy} \end{cases}, b > 0$.

Khi đó phương trình (1) trở thành :

$$\frac{2a^3}{b}-2a^2-ab-6b^2=0$$

$$\Leftrightarrow 2a^3-2a^2b-ab^2-6b^3=0 \Leftrightarrow (a-2b)\left(2a^2+2ab+3b^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a-2b=0 \Leftrightarrow a=2b \Leftrightarrow x+y=2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2=0 \Leftrightarrow x=y$$

vì $2a^2+2ab+3b^2>0$.

Thay $x=y$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$\sqrt{10x^3-1}+3\sqrt[3]{5x+3}=9 \Leftrightarrow \sqrt{10x^3-1}-3+3\left(\sqrt[3]{5x+3}-2\right)=0,\left(x\ge\frac{1}{\sqrt[3]{10}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{10\left(x^3-1\right)}{\sqrt{10x^3-1}+3}+3\cdot\frac{5(x-1)}{\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\underbrace{\left(\frac{10\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{10x^3-1}+3}+\frac{15}{\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4}\right)}_{T}=0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1 \text{ vì với } x\ge\frac{1}{\sqrt[3]{10}} \Rightarrow T>0.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là : $(x,y)=(1;1)$.

Bình luận: Bài toán thể hiện tính đối xứng thông qua định dạng phương trình đẳng cấp. Ở phương trình khi thay thế $x=y$ thì ngoài cách giải liên hiệp như trong lời, chúng ta có thể sử dụng hàm số để giải quyết.

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{2xy}{x+y}+\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}=\sqrt{xy}+\dfrac{x+y}{2}\\(3x-2y+2)\left(\sqrt{2x-y+1}-2\right)=\sqrt[3]{2x(x-y-1)^2+1}-3\end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích: Rõ ràng từ hệ này ta không thể công phá gì được phương trình thứ hai trong hệ, còn phương trình thứ nhất trong hệ ta dễ nhận thấy phương trình này đối xứng với hai biến x, y nên ta có thể bắt nhân tử chung phương trình này.

Ở phương trình thứ nhất trong hệ nếu ta để ý sẽ thấy các cặp đại lượng sau ghép lại ta sẽ được hằng đẳng thức.

Thật vậy ta có : $\begin{cases} \dfrac{2xy}{x+y}-\dfrac{x+y}{2}=-\dfrac{(x+y)^2-4xy}{2(x+y)}=-\dfrac{(x-y)^2}{2(x+y)} \\ \dfrac{x^2+y^2}{2}-xy=\dfrac{(x-y)^2}{2} \end{cases}$.

Do đó ta sẽ tách phương trình thứ nhất để quy đồng và liên hiệp như sau :

$$\frac{2xy}{x+y}-\frac{x+y}{2}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}-\sqrt{xy}=0 \Leftrightarrow -\frac{(x-y)^2}{2(x+y)}+\frac{(x-y)^2}{2\left(\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy}}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy}=x+y\,(*) \end{array}\right.$$

Với phương trình $(*)$ ta nhận thấy nếu $x=y$ thì $(*)$ luôn đúng. Do đó ta tách $(*)$ như sau :

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy}=x+y \Leftrightarrow \sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}-(x+y)=x+y-2\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}+x+y}=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left(\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}+x+y}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ 1=\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}+x+y} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ \sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}=2\sqrt{xy} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y.$$

Vậy xem như nút thắt của bài toán đã được gỡ và xem như hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} xy\ge 0 \\ 2x-y+1\ge 0 \\ x+y\ne 0 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$\frac{2xy}{x+y}-\frac{x+y}{2}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}-\sqrt{xy} \Leftrightarrow -\frac{(x-y)^2}{(x+y)}=\frac{(x-y)^2}{\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ \sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}-(x+y)=x+y-2\sqrt{xy} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ \dfrac{(x-y)^2}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}+x+y}=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \\ \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}+x+y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ 2\sqrt{xy}=\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ 2xy=x^2+y^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ (x-y)^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y.$$

Thay $x=y$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$(x+2)\left(\sqrt{x+1}-2\right)=\sqrt[3]{2x+1}-3 \Leftrightarrow (x+2)\sqrt{x+1}-2x-1=\sqrt[3]{2x+1}\ \ (1)$.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x+1} \\ b=\sqrt[3]{2x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 0 \\ x=a^2-1 \\ 2x=b^3-1 \end{cases}$. Khi đó phương trình (1) trở thành :

$\left(a^2+1\right)a-b^3=b \Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2+1\right)=0$

$\Leftrightarrow a=b$ vì $a^2+ab+b^2+1>0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt[3]{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ (x+1)^3=(2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ x\left(x^2-x-1\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=0 \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là : $(x,y)=\left\{(0;0);\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

Bình luận : Với bài toán này, phương trình thứ nhất trong hệ có tính đối xứng hai biến x, y nhưng kỉ thuật để bắt nhân tử chung là phép nhân lượng liên hiệp. Sự trở lại của nhan tử x, y lặp lại hai lần, nếu không tinh ý sẽ dễ sa đà vào việc chứng minh phần còn lại vô nghiệm. Đối với phương trình thứ hai giải tìm nghiệm, ngoài cách làm ẩn phụ hóa như trên thì ta có thể tách trực tiếp để cô lập hai đại lượng $\sqrt{x+1}, \sqrt[3]{2x+1}$ và sử dụng hằng đẳng thức để tách nhân tử vẫn cho kết quả.

Cụ thể ta có:

$$(x+2)\left(\sqrt{x+1}-2\right)=\sqrt[3]{2x+1}-3 \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}=\sqrt[3]{2x+1}+2x+1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^3+\sqrt{x+1}=\sqrt[3]{2x+1}+2x+1 \Rightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt[3]{2x+1}.$$

Ví dụ 8:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3=3\left(x^2+y\right)-2(3x-2) \\ 2x^2\left(y+\sqrt[3]{5x-(y+1)^3}\right)=8x^2-17y-9 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Phân tích : Cấu trúc của phương trình thứ hai trong hệ này, thật khó để phán đoán công phá nó bằng hướng nào. Phương trình thứ nhất trong hệ cũng chưa giúp được gì ngay, tuy nhiên quan sát phương trình thứ nhất có thể cô lập được hai biến x, y nên có khả năng bắt nhân tử.

Cụ thể ta biến đổi phương trình thứ nhất trở thành : $x^3-3x^2+6x-4=y^3+3y$.

Do vế phải phương trình vừa biến đổi ta có biến y được sắp xếp theo định dạng y^3+3y. Do đó để bắt được nhân tử ta sẽ cố gắng biến đổi vế trái của phương trình vừa biến đổi cũng theo một định dạng tương tự như vậy để có được tính đối xứng.

Ta cần có : $x^3-3x^2+6x-4=(ax+b)^3+3(ax+b)$. Do hệ số x^3 là 1 nên ta có $a=1$.

Vậy $x^3-3x^2+6x-4=(x+b)^3+3(x+b)=x^3+3x^2b+3\left(b^2+1\right)x+b^3+3b$ $(*)$.

Đồng nhất hai vế phương trình $(*)$ ta có : $\begin{cases} -3=3b \\ 3\left(b^2+1\right)=6 \Leftrightarrow b=-1. \\ b^3+3b=-4 \end{cases}$

Vậy ta sẽ có : $x^3-3x^2+6x-4=y^3+3y \Leftrightarrow (x-1)^3+3(x-1)=y^3+3y$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 - y^3 + 3(x-1-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y-1)\left((x-1)^2 + (x-1)y + y^2 + 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = x - 1.$$

Vậy xem như hệ đã được giải quyết với việc tìm ra nút thắt này.

Lời giải : Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = y^3 + 3y \Leftrightarrow (x-1)^3 + 3(x-1) = y^3 + 3y$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 - y^3 + 3(x-y-1) = 0 \Leftrightarrow (x-y-1)\left((x-1)^2 + y(x-1) + y^2 + 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = x - 1 \text{ vì } (x-1)^3 + y(x-1) + y^2 + 3 > 0.$$

Thay $y = x - 1$ vào phưng trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$2x^2\left(x - 1 + \sqrt[3]{5x - x^3}\right) = 8x^2 - 17x + 8 \Leftrightarrow 2x^3 - 10x^2 + 17x - 8 + 2x^2\sqrt[3]{5x - x^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2(x-2) - \left(6x^2 - 17x + 8\right) + 2x^2\sqrt[3]{5x - x^3} \ (*)$$

Đặt $\begin{cases} a = x - 2 \\ b = \sqrt[3]{5x - x^3} \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 5x - x^3 = -\left(6x^2 - 17x + 8\right).$

Khi đó ta có $(*)$ trở thành :

$$2ax^2 + a^3 + b^3 + 2bx^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(a+b) + (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\left(a^2 - ab + b^2 + 2x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ a = b = x = 0 \end{array}\right.$$

Với $a = b = x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ \sqrt[3]{5x - x^3} = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ (hệ vô nghiệm).

Với $a = -b \Leftrightarrow 2 - x = \sqrt[3]{5x - x^3}$

$$\Leftrightarrow 8 - 12x + 6x^2 - x^3 = 5x - x^3 \Leftrightarrow 6x^2 - 17x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{17 + \sqrt{97}}{12} \\ x = \dfrac{17 - \sqrt{97}}{12} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là :

$$(x, y) = \left\{\left(\frac{17 + \sqrt{97}}{12}; \frac{5 + \sqrt{97}}{12}\right); \left(\frac{17 - \sqrt{97}}{12}; \frac{5 - \sqrt{97}}{12}\right)\right\}.$$

Bình luận : Với bài toán trên ở phương trình thứ nhất chúng ta thường lựa chọn giải quyết bằng hàm số. Điều đó là hoàn toàn hợp lí. Nhưng với góc độ nhìn

khác thì dựa trên tính phân ly của hai biến hay còn gọi là cô lập của hai biến về được một định dạng phương trình có tính đối xứng thì hằng đẳng thức vẫn cho lời giải tốt và tự nhiên hơn. Chúng tôi thiết nghỉ, nếu đó là cấu trúc phức tập thì sử dụng hàm số đại diện có thể là lựa chọn tốt nhất nhưng với những cấu trúc cơ bản có thể giải quyết tốt bằng hằng đẳng thức thì con đường tiếp cận như lời giải trong bài toán có thể là hướng đi tự nhiên và phù hợp với đại đa số học sinh hơn. Ở phương trình giải tìm nghiệm, ngoài lời giải trên, chúng ta cũng có thể sử dụng ẩn phụ hóa kết hợp hàm số để giải quyết. Tuy nhiên, nếu tinh tế thì chỉ cần ẩn phụ hóa ta vẫn có thể giải tốt.

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\left(2x^3-y^3\right)+5(2x-y)=6xy(x-y) \\ 7x\sqrt{3x-y+2}=6y+\sqrt{22-3x} \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, không khó khăn để nhận ra để giải quyết hệ, ta cần phải công phá phương trình thứ nhất trong hệ.

Cụ thể ta có :

$2\left(2x^3-y^3\right)+5(2x-y)=6xy(y-x) \Leftrightarrow 4x^3-2y^3+10x-5y=6x^2y-6xy^2$.

Tới phương trình biến đổi cuối cùng ta cũng chưa thấy điều gì rõ ràng, tuy nhiên quan sát vế phải của phương trình cuối ta nhận thấy đại lượng $6xy^2-6x^2y=2\left(3xy^2-3x^2y\right)$ có liên quan đến hằng đẳng thức bậc ba với hai biến x, y nên ta tách được phương trình :

$4x^3-2y^3+10x-5y=6x^2y-6xy^2 \Leftrightarrow 2x^3+10x-5y=2\left(y^3-3xy^2+3x^2y-x^3\right)$

$\Leftrightarrow 2x^3+10x-5y=2(y-x)^3 \Leftrightarrow 2x^3+5x=2(y-x)^3+5(y-x)$ (*)

Ta có (*) giữa hai đại lượng $x, y-x$ đã có tính phân ly và hai vế phương trình đều có định dạng đối xứng nên từ (*) ta sẽ bắt được nhân tử chung $y-2x$. Do đó hệ xem như được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x \le \dfrac{22}{3} \\ 3x-y+2 \ge 0 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$2\left(2x^3-y^3\right)+5(2x-y)=6xy(x-y) \Leftrightarrow 4x^3-2y^3+10x-5y=6x^2y-6xy^2$

$\Leftrightarrow 2x^3+10x-5y=2\left(y^3-3xy^2+3x^2y-x^3\right) \Leftrightarrow 2x^3+5x=2(y-x)^3+5(y-x)$

$\Leftrightarrow 2x^3-2(y-x)^3+5(2x-y)=0$

$\Leftrightarrow 2(2x-y)\left(x^2+x(y-x)+(y-x)^2\right)+5(2x-y)=0$

$$\Leftrightarrow (2x-y)\underbrace{\left(2x^2+2x(y-x)+2(y-x)^2+5\right)}_{M}=0 \Leftrightarrow y-2x=0 \Leftrightarrow y=2x \text{ vì } M>0.$$

Thay $y=2x$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$7x\sqrt{x+2}=12x+\sqrt{22-3x}$ (Điều kiện : $-2\le x\le \frac{22}{3}$).

$$\Leftrightarrow 7x^2-7x-14+\left(14-x-3\sqrt{22-3x}\right)+7x\left(3\sqrt{x+2}-x-4\right)=0 \quad (1).$$

Nhận xét với $-2\le x\le \frac{22}{3} \Rightarrow 14-x+3\sqrt{22-3x}>0, x+4+3\sqrt{x+2}>0$ nên ta có:

$$(1)\Leftrightarrow 7\left(x^2-x-2\right)+\frac{x^2-x-2}{14-x+3\sqrt{22-x}}-\frac{7x\left(x^2-x-2\right)}{x+4+3\sqrt{x+2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-2\right)\underbrace{\left(7+\frac{1}{14-x+3\sqrt{22-3x}}-\frac{7x}{x+4+3\sqrt{x+2}}\right)}_{P}=0 \quad (2)$$

⊕ Với $-2\le x\le 0 \Rightarrow P<0$.

⊕ Với $0<x\le \frac{22}{3} \Rightarrow P>7-\frac{7x}{x+4+3\sqrt{x+2}}>7-\frac{7x}{x+4}=\frac{28}{x+4}>0$.

Do đó với $-2\le x\le \frac{22}{3} \Rightarrow P=0$ vô nghiệm.

Do đó từ (2) ta có : $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{3} \Rightarrow y=2\left(1+\sqrt{3}\right) \\ x=1-\sqrt{3} \Rightarrow y=2\left(1-\sqrt{3}\right) \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là :

$(x,y)=\left\{\left(1+\sqrt{3};2+2\sqrt{3}\right);\left(1-\sqrt{3};2-2\sqrt{3}\right)\right\}$.

Bình luận : Bài toán có được tính đối xứng dựa vào dấu hiệu hằng đẳng thức để tạo sự phân li cho biến ở phương trình thứ nhất. Một đặc điểm cùng thường gặp.

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+4x-5=y^3+3y^2+7y \\ \left(x^3+2y\right)^3+2(y+1)x^2=3(1-y) \end{cases} \quad (x,y\in \mathbb{R})$

Phân tích : Với phương trình thứ hai chúng ta không thể nghỉ đến việc công phá nó vì bậc khá cao và các đại lượng tham gia chẳng có liên quan gì với nhau. Với phương trình thứ nhất trong hệ, các biến đa có tính phân li nên việc quy chúng về một định dạng có tính đối xứng cho hai vế là rất cao.

Nhưng rõ ràng vế trái và vế phải của phương trình thứ nhất đều cho ta sự lựa chọn để định dạng một cho trước để tìm sự đối xứng. Tuy nhiên, vế trái có hình thức gần gũi hơn nên ta sẽ cố gắng tách phương trình thứ nhất về dạng sau :

$x^3+4x-5=(ay+b)^3+4(ay+b)-5$.

Tức là ta cần có : $y^3+3y^2+7y=(ay+b)^3+4(ay+b)-5$.

Do hệ số của y^3 là 1 nên ta có $a=1$.

Vậy ta có :

$$y^3+3y^2+7y=(y+b)^3+4(y+b)-5=y^3+3y^2b+\left(3b^2+4\right)y+b^3+4b-5$$

Đồng nhất hệ số của phương trình này ta có : $\begin{cases}3b^2=3\\3b^2+4=7\\b^3+4b-5=0\end{cases}\Leftrightarrow b=1$.

Và như thế ta sẽ có: $x^3+4x-5=(y+1)^3+4(y+1)-5$. Phương trình này đã có sự cô lập hai biến và có định dạng đối xứng nên ta bắt được nhân tử chung $x-y-1$. Như vậy xem như hệ đã gỡ được nút thắt và sẽ được giải quyết.

Lời giải : Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$x^3+4x-5=(y+1)^3+4(y+1)-5\Leftrightarrow x^3-(y+1)^3+4(x-y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y-1)\underbrace{\left(x^2+(y+1)x+(y+1)^2+4\right)}_{C}=0\Leftrightarrow y=x-1 \text{ vì } C>0.$$

Thay $y=x-1$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$\left(x^3+2x-2\right)^3+2x^3+3x-6=0\Leftrightarrow\left(x^3+2x-2\right)^3+2\left(x^3+2x-2\right)=x+2\ (*)$$

Đặt $x^3+2x-2=t$. Khi đó kết hợp phép đặt và phương trình $(*)$ ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}x^3+2x-2=t\\t^3+2t-2=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-t^3+2(x-t)=t-x\\t^3+2t-2=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-t)\left(x^2+xt+t^2\right)+3(x-t)=0\\t^3+2t-2=x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-t)\left(x^2+xt+t^2+3\right)=0\\t^3+2t-2=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\x^3+2x-2=x\end{cases}\text{ vì } x^2+xy+y^2+3>0.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\x^3+x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\(x-1)\left(x^2+x+2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\x=1\end{cases}\text{ vì } x^2+x+2>0$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+2x-2=1 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=0$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x,y)=(1;0)$.

Bình luận : Với cấu trúc phương trình thứ nhất trong hệ ngoài cách tách định dạng như trong lời giải, chúng ta cũng có thể tách theo chiều hướng sau :

$(ax+b)^3+3(ax+b)^2+7(ax+b)=y^3+3y^2+7y$.

Tức là ta cần có : $x^3+4x-5=(ax+b)^3+3(ax+b)^2+7(ax+b)$. Ta cũng có $a=1$.

Nên : $x^3+4x-5=(x+b)^3+3(x+b)^2+7(x+b)$

$$=x^3+(3b+3)x^2+(3b^2+6b+7)x+b^3+3b^2+7b.$$

Đồng nhất hệ số hai vế phương trình này ta có : $\begin{cases} 3b+3=0 \\ 3b^2+6b+7=4 \\ b^3+3b^2+7b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow b=-1$.

Và như vậy ta sẽ có phương trình thứ nhất được viết lại :

$(x-1)^3+3(x-1)^2+7(x-1)=y^3+3y^2+7y$.

Phương trình vẫn bắt nhân tử được như trong lời giải. Qua bài toán này, chúng ta có thể nhìn nhận để tạo đươc định dạng phương trình cô lập và có tính đối xứng hai biến thì chúng ta không phải có duy nhất một cách. Tuy nhiên, trên thực tế chúng ta cần có cái nhìn bao quát để tìm được biểu diễn cái nào "lợi thế" về mặt hình thức và con đường đi tìm ra nó.

Trong bài toán này, ở phương trình hai là một cách giải khá hay của phương trình đa thức đưa về hệ đối xứng. Rõ ràng phương trình trong bài toán không cho chúng ta phép biến đổi trực tiếp vì thật sự có bậc khá cao.

Phép đặt có được bằng cách đưa phương trình về dạng : $\begin{cases} x^3+2x-2=mt \\ m^3t^3+2mt-2=x \end{cases}$.

Để hệ có tính đối xứng ta cần xử lí m sao cho : $\dfrac{m^3}{1}=\dfrac{2m}{2}=\dfrac{-2}{-2}=\dfrac{m}{1} \Rightarrow m=1$.

Ví dụ 11: Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3+5x+(x^3-2y+6)\sqrt{x^3-2y+1}=0 \\ 2(7y+1)+3(5x^2+3x+1)=(x^2+2y+11x+11)\sqrt{x(3x+4)} \end{cases} \quad (x,y\in \mathbb{R})$$

Phân tích : Với hệ này, quan sát ta thấy ngay được phương trình thứ nhất trong hệ có tính đối xứng giữa hai đại lượng $x,\sqrt[3]{x^3-2y+1}$.

Thật vậy, ta có phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình :

$$x^3+5x+\left(x^3-2y+1+5\right)\sqrt{x^3-2y+1}=0$$

$$\Leftrightarrow x^3+5x+\left(\sqrt{x^3-2y+1}\right)^3+5\sqrt{x^3-2y+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\sqrt{x^3-2y+1}\right)\left(x^2-x\sqrt{x^3-2y+1}+x^3-2y+1+5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^3-2y+1}=-x\Rightarrow 2y=x^3-x^2+1.$$

Và như vậy xem như bài toán đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}x^3-2y+1>0\\3x^2+4x\ge 0\end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$x^3+5x+\left(x^3-2y+1+5\right)\sqrt{x^3-2y+1}=0$$

$$\Leftrightarrow x^3+\left(\sqrt{x^3-2y+1}\right)^3+5\left(x+\sqrt{x^3-2y+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\sqrt{x^3-2y+1}\right)\underbrace{\left(x^2-x\sqrt{x^3-2y+1}+x^3-2y+1+5\right)}_{K}=0$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x^3-2y+1}=0\Leftrightarrow\sqrt{x^3-2y+1}=-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\2y=x^3-x^2+1\end{cases}\text{ vì } K>0.$$

Thay $2y=x^3-x^2+1$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$7\left(x^3-x^2+1\right)+15x^2+9x+12=\left(x^3+11x+12\right)\sqrt{3x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow 7x^3+8x^2+9x+12=\left(x^3+11x+12\right)\sqrt{3x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow 7x^3+8x^2+9x+12-\left(x^3+11x+12\right)-\left(x^3+11x+12\right)\left(\sqrt{3x^2+4x}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x\left(3x^2+4x-1\right)-\frac{\left(x^3+11x+12\right)\left(3x^2+4x-1\right)}{\sqrt{3x^2+4x}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(3x^2+4x-1\right)\left(2x-\frac{x^3+11x+12}{\sqrt{3x^2+4x}+1}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2+4x-1=0\\2x\sqrt{3x^2+4x}=x^3+9x+12\end{array}\right.\quad(*)$$

Với phương trình

$$2x\sqrt{3x^2+4x}=x^3+9x+12 \Rightarrow 4x^3(3x+4)=x^6+6x^3(3x+4)+9(3x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow x^6+2x^3(3x+4)+9(3x+4)^2 \Leftrightarrow \left(x^3+3x+4\right)^2+8(3x+4)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+3x+4=0 \\ 3x+4=0 \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).}$$

Do đó từ $(*)$ ta có : $3x^2+4x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3} \\ x=\dfrac{-2-\sqrt{7}}{3} \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện : $3x^2+4x \ge 0 \Leftrightarrow x \le -\dfrac{4}{3} \vee x \ge 0$ ta có : $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3} \\ x=\dfrac{-2-\sqrt{7}}{3} \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện $x \le 0$ ta có : $x=\dfrac{-2-\sqrt{7}}{3} \Rightarrow y=-\dfrac{56+31\sqrt{7}}{54}$

Đối chiếu điều kiện của hệ ta có nghiệm là : $(x,y)=\left(-\dfrac{2+\sqrt{7}}{3};=\dfrac{56+31\sqrt{7}}{54}\right)$.

Bình luận : Với cấu trúc của phương trình thứ nhất trong hệ, không khó cho chúng ta phán đoán tính đối xứng. Ở phương trình giải tìm nghiệm, chỉ cần một chút khéo léo để ý hai biểu thức bậc ba có cùng hệ số, ghép chúng lại với nhau và tách hợp lí.

Ví dụ 12 :

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (8x+1)\sqrt{2x-1}+(11-12y)\sqrt{3y-4}=0 \\ 3\sqrt{x+3y-6}-2\sqrt{5x-4}=\dfrac{2}{3y-x-5} \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Phân tích : Với hệ này, chúng ta sẽ khai thác từ phương trình thứ nhất trong hệ vì phương trình thứ hai có cấu trúc không cho được các phép biến đổi nào có lợi. Phương trình thứ nhất chứa hai căn bậc hai, mỗi căn chứa đúng một biến và gắn trước căn thức chứa biến nào thì đi với tích một đại lượng của biến đó. Do đó theo suy nghĩ tự nhiên, chúng ta sẽ ẩn phụ hóa, tuy nhiên cấu trúc khá nhẹ nhàng và dễ phán đoán nên ta có thể tách trực tiếp.

Cụ thể ta có :

$$\left(4(2x-1)+5\right)\sqrt{2x-1}-\left(4(3y-4)+5\right)\sqrt{3y-4}=0$$

$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+5\sqrt{2x-1}=4\left(\sqrt{3y-4}\right)^3+5\sqrt{3y-4}$

Rõ ràng phương trình cuối có tính phân li giữa hai đại lượng $\sqrt{2x-1},\sqrt{3y-4}$ và có định dạng phương trình là đối xứng nên ta có thể bắt nhân tử được nhân tử chung.

Thật vậy, ta có :

$4\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+5\sqrt{2x-1}=4\left(\sqrt{3y-4}\right)^3+5\sqrt{3y-4}$

$\Leftrightarrow 4\left(\left(\sqrt{2x-1}\right)^3-\left(\sqrt{3y-4}\right)^3\right)+5\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{3y-4}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{3y-4}\right)\left(4(2x-1)+4\sqrt{(2x-1)(3y-4)}+4(3y-4)+5\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=\sqrt{3y-4}\Leftrightarrow 2x+3=3y$.

Và tới đây xem như hệ đã gỡ được nút thắt và cơ bản đã có định hướng để giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x\ge \frac{1}{2} \\ y\ge \frac{4}{3} \\ x+3y-6\ge 0 \\ 3y-x-5\ne 0 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình:

$\left(4(2x+1)+5\right)\sqrt{2x-1}-\left(4(3y-4)+5\right)\sqrt{3y-4}=0$

$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+5\sqrt{2x-1}=4\left(\sqrt{3y-4}\right)^3+5\sqrt{3y-4}$

$\Leftrightarrow 4\left(\left(\sqrt{2x-1}\right)^3-\left(\sqrt{3y-4}\right)^3\right)+5\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{3y-4}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{3y-4}\right)\left(4(2x-1)+4\sqrt{(2x-1)(3y-4)}+4(3y-4)+5\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}-\sqrt{3y-4}=0$ vì $4(2x-1)+4\sqrt{(2x-1)(3y-4)}+4(3y-4)+5>0$.

$\Leftrightarrow 2x-1=3y-4\Leftrightarrow 3y=2x+3$.

Thay $3y=2x+3$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$3\sqrt{3x-3}-2\sqrt{5x-4}=\frac{2}{x-2}\Leftrightarrow \frac{9(3x-3)-4(5x-4)}{3\sqrt{3x-3}+2\sqrt{5x-4}}=\frac{2}{x-2}$ $(1\le x\ne 2)$.

$\Leftrightarrow \frac{7x-11}{3\sqrt{3x-3}+2\sqrt{5x-4}}=\frac{2}{x-2}\Leftrightarrow 3\sqrt{3x-3}+2\sqrt{5x-4}=\frac{7x^2-25x+22}{2}$

$$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{3x-3}-(x-1)\right)+2\left(\sqrt{5x-4}-x\right)=\frac{7x^2-25x+22}{2}-5x+3\ (*)$$

Với $x=1$ ta có phương trình được thỏa. Do đó với $1<x\neq 2$ ta có $(*)$ trở thành:

$$3\frac{3x-3-(x-1)^2}{\sqrt{3x-3}+x-1}+2\frac{5x-4-x^2}{\sqrt{5x-4}+x}=\frac{7\left(x^2-5x+4\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3\left(x^2-5x+4\right)}{\sqrt{3x-3}+x-1}-\frac{2\left(x^2-5x+4\right)}{\sqrt{5x-4}+x}=\frac{7\left(x^2-5x+4\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-1)(x-4)}{\sqrt{3x-3}+x-1}+\frac{2(x-1)(x-4)}{\sqrt{5x-4}+x}+\frac{7(x-1)(x-4)}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-4)}{\sqrt{3x-3}+x-1}+\frac{2(x-4)}{\sqrt{5x-4}+x}+\frac{7(x-4)}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\underbrace{\left(\frac{3}{\sqrt{3x-3}+x-1}+\frac{2}{\sqrt{5x-4}+x}+\frac{7}{2}\right)}_{P}=0\Leftrightarrow x=4 \text{ vì } P>0 \text{ khi } 1<x\neq 2.$$

Vậy phương trình $(*)$ có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=\frac{5}{3} \\ x=4\Rightarrow y=\frac{11}{3}\end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện của hệ ta có nghiệm của hệ là : $(x,y)=\left\{\left(1;\frac{5}{3}\right);\left(4;\frac{11}{3}\right)\right\}$.

Bình luận: Về cơ bản ta có nhận định, phương trình thứ nhất vẫn giải theo phương diện xét hàm số đại diện được. Ở phương trình giải tìm nghiệm, các bạn có thể sử dụng hàm số để giải quyết vẫn tốt.

Nhận định chung về loại hệ này, thông thường thì các bài toán hệ thuộc kiểu này đa số có thể giải bằng phương pháp xét hàm số đại diện. Tuy nhiên, đó chỉ là đa số chứ còn một số bài thuộc kiểu này nhưng xét hàm đại diện lại không tối ưu. Như trong các ví dụ chúng tôi đã có một vài bài toán minh họa và bình luận. Và trên hết, chúng tôi muốn gửi gắm tới các bạn, đó là xét hàm số đại diện thật chất nó là bài toán có tính đối xứng và sử dụng hằng đẳng thức để triển khai. Và có đôi lúc hiểu như vậy, thì lại cho lời giải được tự nhiên hơn vì xét hàm số thì cần phải có tập xác định rõ ràng và nếu không nắm chắc và hiểu rõ sẽ dễ kết luận sai và gây ra nhiều điều đáng tiếc.

III. PHƯƠNG PHÁP TẠO NHÂN TỬ BẰNG KỶ THUẬT CỘNG, TRỪ, NHÂN CHÉO

Đây là một phương pháp khá mạnh và hay dùng trong hệ để bắt nhân tử, nguồn gốc của phương pháp này chính là trong hệ có nhân tử chung nhưng không thể bắt nhân tử trên từng phương trình mà cần phải có sự phối hợp của cả hai phương trình trong hệ.

Về nội dung ta có thể tóm gọn như sau, từ hệ $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ *ta đưa về các hệ sau:*

$\oplus \begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)+g(x,y)=0 \\ f(x,y)-g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_1(x,y)\cdot h_2(x,y)=0 \\ f(x,y)=0 \end{cases}$

$\oplus \begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_1(x,y)=h(x,y) \\ h_2(x,y)=h(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow h_1(x,y)\cdot h(x,y)=h(x,y)\cdot h_2(x,y)$

$\oplus \begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)+k\cdot g(x,y)=0 \\ f(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_1(x,y)\cdot h_2(x,y)=0 \\ f(x,y)=0 \end{cases}$

Các bài toán hệ này thường là hệ bậc hai tổng quát, hệ phương trình chứa đa thức bậc cao, hệ có tính đối xứng (loại 1, loại 2), nữa đối xứng và dạng hệ có đặc thù riêng như chứa các hằng đẳng thức vv.... Cũng như hai phương pháp trước, để giải hệ theo phương pháp này chúng ta cần có cái nhìn tổng quát và nhận ra được tính chất của hệ.

Ví dụ 1 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^3y^3-7=-4x^6 \\ x^3y^3+xy+2=4x^6 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Phân tích : Với hệ này, không khó nhận ra nếu ta cộng hai phương trình lại với nhau vế theo vế ta sẽ khử được đại lượng $4x^6$ và tạo ra được phương trình bậc ba với biến xy.

Cụ thể ta có phương trình :

$4x^3y^3+xy-5=0 \Leftrightarrow (xy-1)\left(4x^2y^2+4xy+5\right)=0 \Leftrightarrow xy=1$.

Và hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Cộng vế theo vế hai phương trình trong hệ ta có phương trình :

$4x^3y^3+xy-5=0 \Leftrightarrow (xy-1)\underbrace{\left(4x^2y^2+4xy+5\right)}_{P}=0 \Leftrightarrow xy=1$ vì $P>0$.

Thay $xy=1$ vào phương trình thứ nhất trong hệ ta được phương trình :

$1=x^6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=1 \\ x=-1\Rightarrow y=-1 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x,y)=\{(1;1);(-1;-1)\}$.

Bình luận: Bài toán trên quá cơ bản, từ quan sát thấy hai phương trình chứa cùng $4x^6$ và trái dấu, đồng thời vế trái của hai phương trình đều chứa các đại lượng xy nên chọn phương án cộng hai vế là con đường đi tự nhiên nhất.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x-2)+y(7y-2)=0 \\ x^2+y^2+8xy-x-4y+1=0 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Phân tích : Cả hai phương trình trong hệ đều là phương trình bậc hai theo hai biến x,y. Kiểm tra ta nhận thấy cả hai phương trình đều phân tích được nhân tử nhưng lại không có được delta chính phương. Do đó việc nghỉ bắt nhân tử một trong hai phương trình trong hệ xem như thất bại. Nên ta sẽ tìm cách kết hợp hai phương trình lại với nhau xem sao ?

Trước hết ta biến đổi hệ cho dễ quan sát: $\begin{cases} x^2+7y^2-2x-2y=0 \\ x^2+y^2+8xy-x-4y+1=0 \end{cases}$.

Quan sát toàn hệ ta nhận thấy nếu ta cộng hai phương trình trong hệ ta sẽ thu được hằng đẳng thức nên ta định hướng cách này xem sao ?

Cụ thể ta sẽ có :

$$2x^2+8y^2+8xy-3x-6y+1=0 \Leftrightarrow 2(x+2y)^2-3(x+2y)+1=0.$$

Phương trình cuối đã chứng tỏ được sự thành công của ý tưởng. Và ta sẽ tiến hành giải hệ.

Lời giải :

Hệ phương trình được biến đổi trở thành: $\begin{cases} x^2+7y^2-2x-2y=0\,(1) \\ x^2+y^2+8xy-x-4y+1=0\,(2) \end{cases}$

Lấy (1) + (2) vế theo vế ta có phương trình:

$$2(x^2+4xy+4y^2)-3(x+2y)+1=0 \Leftrightarrow 2(x+2y)^2-3(x+2y)+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2y=1 \\ x+2y=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-2y \\ x=\dfrac{1}{2}-2y \end{array}\right.$$

⊕ Với $x=1-2y$ thế vào (1) ta có:

$$(1-2y)^2+7y^2-2(1-2y)-2y=0 \Leftrightarrow 11y^2-2y-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{1+\sqrt{12}}{11} \Rightarrow x=\dfrac{9-4\sqrt{3}}{11} \\ y=\dfrac{1-\sqrt{12}}{11} \Rightarrow x=\dfrac{9+4\sqrt{3}}{11} \end{array}\right..$$

⊕ Với $x=\frac{1}{2}-2y$ thế vào (1) ta có :

$$\left(\frac{1-4y}{2}\right)^2+7y^2-2\left(\frac{1-4y}{2}\right)-2y=0\Leftrightarrow 44y^2-3=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=\frac{\sqrt{33}}{22}\Rightarrow x=\frac{11-2\sqrt{33}}{22} \\ y=-\frac{\sqrt{33}}{22}\Rightarrow x=\frac{11+2\sqrt{33}}{22} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là :

$$(x,y)=\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{9-4\sqrt{3}}{11};\frac{1+\sqrt{12}}{11}\right);\left(\frac{9+4\sqrt{3}}{11};\frac{1-\sqrt{12}}{11}\right);\\ \left(\frac{11-2\sqrt{33}}{22};\frac{\sqrt{33}}{22}\right);\left(\frac{11+2\sqrt{33}}{22};-\frac{\sqrt{33}}{22}\right)\end{array}\right\}.$$

Bình luận : Bài hệ này vẫn còn cơ bản, chỉ cần tinh ý một chút ta sẽ nhận ra hằng đẳng thức và sẽ thu được một phương trình bậc hai theo đại lượng $x+2y$.

Ví dụ 3 :

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+3y^2-2xy-10x+22y+34=0 (1)\\ x^2+5y^2-4xy-16x+38y+68=0 (2)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích: Với hệ này nếu ta suy nghỉ tự nhiên ta sẽ có ba hướng sau khi nhìn vào hệ.

⊕ Hướng 1 : Ta lấy (1) – (2) vế theo vế ta sẽ khử được x^2 và thu được phương trình :

$$xy+3x-y^2-8y-17=0\Leftrightarrow\begin{cases} y\neq -3\\ x=\frac{y^2+8y+17}{y+3}\end{cases}.$$

Tới đây ta có thể sử dụng phép thế để giải quyết.

⊕ Hướng 2: Còn nếu ta muốn khử y^2 ta lấy $5\cdot(1)-3\cdot(2)$ ta sẽ thu được phương trình sau: $xy-2y+x^2-x-17=0\Leftrightarrow\begin{cases} x\neq 2\\ y=\frac{-x^2+x+17}{x-2}\end{cases}.$

Tới đây ta có thể thực hiện phép thế và biến đổi đại số để ra kết quả.

⊕ Hướng 3: Còn nếu ta muốn khử xy thì ta sẽ lấy $4\cdot(1)-2\cdot(2)$ ta sẽ được phương trình: $2x^2-8x+2y^2+12y-48=0$.

Kiểm tra ta thấy phương trình cũng không phân tích được delta chính phương.
Vậy qua 3 hướng ta sẽ nhận thấy hệ này có thể giải theo hướng 1 hoặc hướng 2 là sáng sủa nhất .
Tuy nhiên, đây là một hệ bậc hai tổng quát, để giải hệ này ta thường sử dụng ẩn phụ hóa theo hướng : $\begin{cases} x = u + a \\ y = v + b \end{cases}$. Tuy nhiên, cách giải này chúng tôi thiết nghỉ chưa thể khái quát hóa cách giải của loại hệ này được. Vì cách làm này, hầu hết sẽ đưa hệ ban đầu về hệ đẳng cấp. Có một điều đó là một phương trình bậc hai hai biến tổng quát về phương trình đẳng cấp với cách đặt như trên là điều có thể luôn có được, điều này cũng có nghĩa là ta luôn tìm được một cặp (a,b) để tịnh tiến nghiệm như trên. Tuy nhiên, hệ trên lại được cấu tạo bởi hai phương trình bậc hai tổng quát nên điều sau có thể xảy ra đó là mỗi phương trình sẽ có cặp (a,b) để thực hiện phép tịnh tiến riêng lẻ. Nếu điều đó xảy ra thì cách làm trên sẽ phá sản.
Nhận định chung là như vậy, nhưng trước một phương trình bậc hai dạng tổng quát ta có thể thử với phương pháp ẩn phụ này.

Đặt $\begin{cases} x = u + a \\ y = v + b \end{cases}$ thế vào phương trình (1) ta có :

$$u^2 + 2ua + a^2 + 3v^2 + 6vb + 3b^2 - 2uv - 2ub - 2av - 2ab - 10u - 10a + 22v + 22b + 34 = 0$$

Để (1) là đẳng cấp ta cần có : $\begin{cases} 2a - 2b - 10 = 0 \\ 6b - 2a + 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$.

Khi đó ta sẽ có phép đặt $\begin{cases} x = u + 2 \\ y = v - 3 \end{cases}$ thay vào hệ đã cho ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} (u+2)^2 + 3(v-3)^2 - 2(u+2)(v-3) - 10(u+2) + 22(v-3) + 34 = 0 \\ (u+2)^2 + 5(v-3)^2 - 4(u+2)(v-3) - 16(u+2) + 38(v-3) + 68 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 2uv + 3v^2 = 9 \\ u^2 - 4uv + 5v^2 = 5 \end{cases} (*).$$

Và hệ (*)là hệ đẳng cấp bậc hai đã biết cách giải.
Cũng như ngày từ đầu chúng tôi đề cập, loại hệ này cũng sẽ có nhân tử chung nên bằng mọi giá chúng ta sẽ nghỉ đến việc tách nhân tử chung. Do cấu tạo của hệ là chứa hai phương trình bậc hai với hai biến x, y nên ta có quyền nghỉ đến hướng ghép hai phương trình này thành một phương trình bậc hai tách được nhân tử chung tức là ta cần một phương trình bậc hai có delta chính phương bằng phương pháp hệ số bất định sau :

$$x^2+3y^2-2xy-10x+22y+34+k\left(x^2+5y^2-4xy-16x+38y+68\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(1+k)x^2-2(y+5+2ky+8k)x+22y+3y^2+5ky^2+38ky+34+68k=0$$

Ta cần có : $\Delta_x^{'}=(y+5+2ky+8k)^2-(1+k)\left(22y+3y^2+5ky^2+38ky+34+68k\right)$

$=-\left(k^2+4k+2\right)y^2-6\left(k^2+4k+2\right)y-4k^2-22k-9$ là một số chính phương.

Và như vậy ta cần có :

$$\Delta_y^{'}=9\left(k^2+4k+2\right)^2-\left(k^2+4k+2\right)\left(4k^2+22k+9\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=-1\\ k=-\dfrac{9}{5}\\ k=-2\pm\sqrt{2}\end{array}\right..$$

Ở đây ta chỉ lấy $k=-1,k=-\dfrac{9}{5}$ về tính thẩm mỹ. Với $k=-1$ ta có hướng 1, bây giờ ta sẽ xử lí với trường hợp $k=-\dfrac{9}{5}$.

Lúc đó ta có :

$$5\left(x^2+3y^2-2xy-10x+22y+34\right)-9\left(x^2+5y^2-4xy-16x+38y+68\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-(13y+47)x+15y^2+116y+221=0\ \ (*).$$

Phương trình $(*)$ có $\Delta=(13y+47)^2-8\left(15y^2+116y+221\right)=(7y+21)^2$.

Vậy từ đây ta đã tách được nhân tử.

Sau đây, ta sẽ đi vào lời giải chính thức cho hệ này.

Lời giải :

⊕ Cách 1 : Lấy $(1)-(2)$ vế theo vế ta có phương trình :

$$xy+3x-y^2-8y-17=0\Leftrightarrow\begin{cases}y\neq-3\\ x=\dfrac{y^2+8y+17}{y-3}\end{cases}$$

Thế vào phương trình (1) ta có phương trình :

$$\left(\frac{y^2+8y+17}{y+3}\right)^2+3y^2-2\left(\frac{y^2+8y+17}{y+3}\right)y-10\left(\frac{y^2+8y+17}{y+3}\right)+22y+34=0$$

$$\Leftrightarrow 2y^4+24y^3+99y^2+162y+85=0\Leftrightarrow\left(y^2+6y+5\right)\left(2y^2+12y+17\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2+6y+5=0 \\ 2y^2+12y+17=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-5 \Rightarrow x=-1 \\ y=-1 \Rightarrow x=5 \\ y=\dfrac{-6+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x=\dfrac{4+5\sqrt{2}}{2} \\ y=\dfrac{-6-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x=\dfrac{4-5\sqrt{2}}{2} \end{array}\right..$$

⊕ Cách 2: Đặt $\begin{cases} x=u+2 \\ y=v-3 \end{cases}$.

Lúc đó hệ phương trình trở thành hệ phương trình:

$$\begin{cases} (u+2)^2+3(v-3)^2-2(u+2)(v-3)-10(u+2)+22(v-3)+34=0 \\ (u+2)^2+5(v-3)^2-4(u+2)(v-3)-16(u+2)+38(v-3)+68=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2-2uv+3v^2=9 \\ u^2-4uv+5v^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u^2-10uv+15v^2=45 \quad (3) \\ 9u^2-36uv+45v^2=45 \quad (4) \end{cases}$$

Từ (3) và (4) ta có:

$$5u^2-10uv+15v^2=9u^2-36uv+45v^2 \Leftrightarrow 2u^2-13uv+15v^2=0$$

$$\Leftrightarrow (u-5v)(2u-3v)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=5v \\ u=\dfrac{3}{2}v \end{array}\right..$$

Với $u=5v$ thay vào (3) ta có : $v^2=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow u=\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \\ v=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow u=-\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$.

Từ đó ta có : $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2+\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}+2 \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{4+5\sqrt{2}}{2} \\ y=\dfrac{-6+\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{4-5\sqrt{2}}{2} \\ y=\dfrac{-6-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$.

Với $u=\dfrac{3}{2}v$ thay vào (3) ta có : $v^2=2 \Leftrightarrow v=\pm 2 \Rightarrow u=\pm 3$.

Từ đó ta có : $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3+2\\y=2-3\end{cases}\\\begin{cases}x=-3+2\\y=-2-3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=5\\y=-1\end{cases}\\\begin{cases}x=-1\\y=-5\end{cases}\end{array}\right.$

⊕ Cách 3. Lấy $5\cdot(1)-9\cdot(2)$ ta được phương trình :

$2x^2-(13y+47)x+15y^2+116y+221=0\ (a)$.

Phương trình (a) có $\Delta=(13y+47)^2-8(15y^2+116y+221)=(7y+21)^2$.

Từ đó ta suy ra (a) có hai nghiệm phân biệt : $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{13y+47+7y+21}{4}=5y+17\\x=\dfrac{13y+47-7y-21}{4}=\dfrac{3}{2}y+\dfrac{13}{2}\end{array}\right.$

Với $x=5y+17$ ta thay vào phương trình (1) ta được phương trình :

$$2(y+3)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y+3=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\y+3=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{-6+\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=\dfrac{4+5\sqrt{2}}{2}\\y=\dfrac{-6-\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=\dfrac{4-5\sqrt{2}}{2}\end{array}\right..$$

Với $x=\dfrac{3}{2}y+\dfrac{13}{2}$ ta thay vào phương trình (1) ta được phương trình :

$$y^2+6y+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-5\Rightarrow x=-1\\y=-1\Rightarrow x=5\end{array}\right..$$

Vậy qua ba cách giải ta có nghiệm của hệ là :

$$(x,y)=\left\{(-1;-5);(5;-1);\left(\frac{4+5\sqrt{2}}{2};\frac{-6+\sqrt{2}}{2}\right);\left(\frac{4-5\sqrt{2}}{2};\frac{-6-\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

Bình luận : Qua sự phân tích của ví dụ này, chắc bạn đọc đã hiểu được về cơ bản thì đối với hệ phương trình bậc hai tổng quát ta đều có thể tiến hành một cách tự nhiên là khử x^2 hoặc y^2 rồi dùng phép thế đều có thể giải tốt. Nhược điểm của cách này chính là sự biến đổi đại số khá phức tạp và đòi hỏi sự khéo léo. Cách đặt ẩn phụ hóa sẽ giải quyết tốt các hệ phương trình bậc hai tổng quát đưa được về hệ đẳng cấp, còn lại thì không tối ưu lắm. Nhược điểm của cách này là cũng thiên về tính toán. Tuy nhiên có một cách giải quyết phép đặt đối với hệ này nếu đưa về được về hệ đẳng cấp như sau :

Xét hệ tổng quát: $\begin{cases}a_1x^2+b_1y^2+c_1xy+d_1x+e_1y+f_1=0\\a_2x^2+b_2y^2+c_2xy+d_2x+ey_2+f_2=0\end{cases}.$

Ta lần lượt đạo hàm phương trình thứ nhất theo hướng sau :

Cố định y (tức là xem y là hằng số), đạo hàm theo biến x ta có :

$2a_1x + c_1y + d_1 = 0$.

Cố định x (tức là xem x là hằng số), đạo hàm theo biến y ta có :

$2b_1y + c_1x + e_1 = 0$.

Giải hệ $\begin{cases} 2a_1x + c_1y + d_1 = 0 \\ 2b_1x + c_1x + e_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k_1 \\ y = k_2 \end{cases} \Rightarrow$ đặt $\begin{cases} x = k_1 + u \\ y = k_2 + v \end{cases}$.

Với cách 3 thì ý nghĩa chính của nó là thực hiện "ghép và tạo" một phương trình bậc hai tách được nhân tử. Kỉ thuật hệ số bất định giải được tất cả hệ bậc hai tổng quát. Nhược điểm của nó chính là tính toán khá rắc rối. Tuy vậy, chúng tôi gửi đến các bạn cách thực hành nhanh như sau :

Đặt $a = a_1 + ka_2, b = b_1 + kb_2, c = c_1 + kc_2, e = e_1 + ke_2, f = f_1 + kf_2$.

Nhập vào máy tính phương trình : $cde + 4abf = ae^2 + bd^2 + fc^2$.

Phương trình này là phương trình bậc ba theo biến k nên sẽ luôn tìm được k.

Khi đó ta sẽ có :

$$a_1x^2 + b_1y^2 + c_1xy + d_1x + e_1x + f_1 + k\left(a_2x^2 + b_2y^2 + c_2xy + d_2x + e_2y + f_2\right) = 0$$

Được biến đổi thành một phương trình bậc hai tách được nhân tử.

Chắc các bạn thắc mắc là tại sao ở cách 3 chúng ta chỉ tìm được giá trị k cho hướng 1 trong phân tích và một giá trị k khác là cách được nhân tử, còn giá trị k cho hướng 2 đâu ? Câu trả lời khá đơn giản thế này, ở hướng 1 và hướng 2 tuy hình thức khác nhau nhưng nội dung của chúng là giống nhau đó chính là khử bớt đại lượng chứa mũ 2 trong phương trình nên khi sử dụng hệ số bất định k ta chỉ tìm được giá trị cho hướng 1 hoặc hướng 2 (đa số là hướng 1).

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 8y = y^3 + y^2 - 9 \\ y - 8x = -x^3 - x^2 + 15 \end{cases} \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$

Phân tích : Với hệ này, nhận xét đầu tiên là hệ này ngay từ đầu ta không nhận thấy được điều gì cả. Tuy nhiên ta nhận xét nếu chuyển bớt hai đại lượng $8y, 8x$ ở vế trái mỗi phương trình ta được một phương trình bậc ba nên ta thử xem với cách biến đổi này, ta có được nhận xét gì về hệ ?

Cụ thể ta có hệ được biến đổi trở thành: $\begin{cases} x = y^3 + y^2 - 8y - 9 \\ y = -x^3 - x^2 + 8x + 15 \end{cases}$

Tới đây, ý tưởng của chúng ta sẽ cố gắng tách được nhân tử bên vế phải của hai phương trình trong hệ nhờ nghiệm của phương trình bậc ba. Ý tưởng là vậy nhưng cái khó là chúng ta lại không được nghiệm nguyên cho cả hai phương trình bậc ba. Nhưng với hệ này ý tưởng tách nhân tử bên vế phải của hai

phương trình có vẻ là khả thi nhất để công phá hệ, do đó ta cố gắng tách cho được.

Nhận xét với $y = 3 \Rightarrow y^3 + y^2 - 8y = 27 + 9 - 24 = 12$;

$x = 3 \Rightarrow -x^3 - x^2 + 8x = -27 - 9 + 24 = -12$.

Do đó ta tách hệ như sau :

$$\begin{cases} x - 3 = y^3 + y^2 - 8y - 12 \\ y - 3 = -x^3 - x^2 + 8x + 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = (y - 3)\left(y^2 + 4y + 4\right) \\ y - 3 = (x - 3)\left(-x^2 - 4x^2 - 4\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = (y - 3)(y + 2)^2 \\ y - 3 = -(x - 3)(x + 2)^2 \end{cases}$$

Và tới đây hình hài bài toán đã rõ ràng hơn, khi mà ta nhân chéo hai vế hai phương trình trong hệ cho nhau ta sẽ được phương trình :

$$-(x - 3)^2 (x + 2)^2 = (y - 3)^2 (y + 2)^2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 (x + 2)^2 + (y - 3)^2 (y + 2)^2 = 0.$$

Và tới đây mọi thứ đã rõ ràng và hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ sau :

$$\begin{cases} x - 3 = y^3 + y^2 - 8y - 12 \\ y - 3 = -x^3 - x^2 + 8x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = (y - 3)(y + 2)^2 \, (1) \\ y - 3 = -(x - 3)(x + 2)^2 \, (2) \end{cases}$$

Nhân chéo hai vế của (1) và (2) ta được phương trình :

$$-(x - 3)^2 (x + 2)^2 = (y - 3)^2 (y + 2)^2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 (x + 2)^2 + (y - 3)^2 (y + 2)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)(x + 2) = 0 \\ (y - 3)(y + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \vee x = -2 \\ y = 3 \vee y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Thử lại ta nhận được nghiệm của hệ là $(x, y) = (3; 3)$.

Bình luận: Bài toán này, nhìn qua lời giải sẽ có suy nghĩ chủ quan là bài toán dễ, nhưng chúng tôi lại không nghỉ vậy. Vì lời giải thật sự đòi hỏi một chút "tinh quái " về tách nhân tử không phải học sinh nào cũng biết được. Chắc các bạn thắc mắc tại sao lại thử số 3 mà không thử với -2. Cái này là một mẹo nhỏ. Qua bước kiểm tra nghiệm của hai phương trình bậc ba ta thấy với phương trình

bậc ba theo biến y có ba nghiệm xấp xỉ là $2,87;-1;14;-2,72$. Còn phương trình bậc ba theo biến x có duy nhất một nghiệm xấp xỉ là $3,14$. Sự tương quan giữa hai con số $2,87$ và $3,14$ khi làm tròn là 3. Do đó ta nghỉ đến phép thế số 3.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x\left(y^2+1\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5}(1) \\ \dfrac{y\left(x^2-1\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5}(2) \end{cases}$ $\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Phân tích : Với hệ này, việc đầu tiên nhận thấy ngay hệ số chứa ba hệ số đặc biệt $3,4,5$. Điều này gợi ý cho chúng ta là bình phương hai vế mỗi phương trình cộng lại để thu gọn hệ số của vế phải của hai phương trình là 1. Tuy nhiên, nó chỉ là sự tinh ý thứ nhất, sự tinh ý thứ hai là chúng ta thấy được khi bình phương hai vế của hai phương trình thì khi cộng lại vế theo vế thì vế trái sẽ cho chúng ta một đại lượng giống mẫu số.

Thật vậy, ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{x\left(y^2+1\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{y\left(x^2-1\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2\left(y^2+1\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{9}{25} \\ \dfrac{y^2\left(x^2-1\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{16}{25} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2\left(y^2+1\right)^2+y^2\left(x^2-1\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1$$

$$\Leftrightarrow \dfrac{x^2y^4+x^2+y^2x^4+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1.$$

Và tới đây, mọi chuyện đã dễ dàng hơn.

Mặt khác ta để ý rằng nếu hệ này có nghiệm thì $xy\neq 0$. Do đó nếu ta nhân hai vế phương trình thứ nhất cho x và nhân hai vế phương trình thứ hai cho y và đem hai vế phương trình trừ cho nhau vế theo vế ta sẽ được vế trái sẽ có hệ số là 1.

Cụ thể ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{x\left(y^2+1\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{y\left(x^2-1\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2\left(y^2+1\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5}x \\ \dfrac{y^2\left(x^2-1\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5}y \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2\left(y^2+1\right)-y^2\left(x^2-1\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{3x}{5}-\dfrac{4y}{5}$$

$\Leftrightarrow \frac{3x-4y}{5}=1 \Leftrightarrow 3x-4y=5$.

Tới đây ta chỉ còn thực hiện phép thế.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$.

⊕ Cách 1. Lấy $(1)^2+(2)^2$ vế theo vế ta có được phương trình :

$$\frac{x^2\left(y^2+1\right)^2+y^2\left(x^2-1\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2y^4+x^2+y^2x^4+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1 \Leftrightarrow \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2+1=x^2+y^2 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ y=\pm 1 \end{array}\right.$$

Với $x=\pm 1$ ta dễ dàng thấy hệ vô nghiệm.

Với $y=1$ ta có hệ trở thành : $\begin{cases} \frac{2x}{x^2+1}=\frac{3}{5} \\ \frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-10x+3=0 \\ x^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$.

Với $y=-1$ ta có hệ trở thành : $\begin{cases} \frac{2x}{x^2+1}=\frac{3}{5} \\ \frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-10x+3=0 \\ 9x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

⊕ Cách 2. Lấy $x\cdot(1)-y\cdot(2)$ vế theo vế ta có phương trình :

$$\frac{x^2\left(y^2+1\right)-y^2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+y^2\right)}=\frac{3x-4y}{5} \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=\frac{3x-4y}{5}.$$

$$\Leftrightarrow 3x-4y=5 \Leftrightarrow x=\frac{4y+5}{3}$$

Thay vào (1) ta có :

$$5\cdot\frac{4y+5}{3}\cdot\left(y^2+1\right)=3\left(y^2+\left(\frac{5+4y}{3}\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow (20y+25)\left(y^2+1\right)=\left(9y^2+25+40y+16y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow y^2-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\Rightarrow x=3\\ y=-1\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

Vậy qua hai cách giải của ta có nghiệm của hệ $(x,y)=\left\{(3;1);\left(\dfrac{1}{3};-1\right)\right\}$.

Bình luận : Dựa vào đặc điểm đặc biệt của hệ số và các biểu thức có thể rút gọn ta đưa được nhiều ý tưởng giải hệ này. Hệ này cũng là một dạng thường gặp.

Ví dụ 6 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+y)(xy+4)=2\left(2x^2+y^2\right)+\dfrac{4}{xy}\left(2x^2-x+y^2-y\right)\\ 3\left(3x^2+2y^2\right)=(3x+2y)(xy+2)\end{cases}(x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích : Với hệ này, ta chưa có thể dự đoán được gì từ hình thức của hệ. Nên ta sẽ biến đổi hệ lại cho dễ nhìn hơn.

Cụ thể ta có hệ được biến đổi trở thành :

$$\begin{cases}xy(x+y)(xy+4)=2xy\left(2x^2+y^2\right)+4\left(2x^2+y^2\right)-4(x+y)\\ 3\left(3x^2+2y^2\right)=(3x+2y)(xy+2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)\left(x^2y^2+4xy+4\right)=2\left(2x^2+y^2\right)(xy+2)\\ 3\left(3x^2+2y^2\right)=(3x+2y)(xy+2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)(xy+2)^2=2\left(2x^2+y^2\right)(xy+2)\\ 3\left(3x^2+2y^2\right)=(3x+2y)(xy+2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy+2=0\\ 3\left(3x^2+2y^2\right)=(3x+2y)(xy+2)\end{cases}\\ \begin{cases}(x+y)(xy+2)=2\left(2x^2+y^2\right)\\ 3\left(3x^2+2y^2\right)=(3x+2y)(xy+2)\end{cases}\end{array}\right..$$

Tơi đây mọi thứ đã rõ ràng vì trong hai hệ sinh ra từ hệ đầu đã có một hệ vô nghiệm, còn hệ còn lại chỉ cần nhân vế theo vế ta sẽ rút gọn được $xy+2$ và đưa được phương trình đẳng cấp.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}x\neq 0\\ y\neq 0\end{cases}$.

Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} xy(x+y)(xy+4)=2xy\left(2x^2+y^2\right)+4\left(2x^2+y^2\right)-4(x+y) \\ 3\left(3x^2+2y^2\right)=(3x+2y)(xy+2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(xy+2)^2=2\left(2x^2+y^2\right)(xy+2) \\ 3\left(3x^2+2y^2\right)=(3x+2y)(xy+2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy+2=0 \\ 3\left(3x^2+2y^2\right)=(3x+2y)(xy+2) \end{cases} (I) \\ \begin{cases} (x+y)(xy+2)=2\left(2x^2+y^2\right) \\ 3\left(3x^2+2y^2\right)=(3x+2y)(xy+2) \end{cases} (II) \end{array}\right. .$$

⊕ Với hệ (I) dễ dàng thấy được hệ này vô nghiệm vì : $3x^2+2y^2=0$ (vô lí).

⊕ Với hệ (II) ta có : $\begin{cases} (x+y)(xy+2)=2\left(2x^2+y^2\right) (1) \\ 3\left(3x^2+2y^2\right)=(3x+2y)(xy+2) (2) \end{cases}$

Lấy $(1)\cdot(2)$ vế theo vế ta có phương trình :

$$3(x+y)(xy+2)\left(3x^2+2y^2\right)=2\left(2x^2+y^2\right)(3x+2y)(xy+2)$$

$$\Leftrightarrow 3(x+y)\left(3x^2+2y^2\right)=2\left(2x^2+y^2\right)(3x+2y) \Leftrightarrow 3x^3-x^2y-2y^3=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(3x^2+2xy+2y^2\right)=0 \Leftrightarrow x=y \text{ vì } 3x^2+2xy+2y^2>0.$$

Thay $x=y$ vào (1) ta có phương trình :

$$y\left(y^2+2\right)=3y^2 \Leftrightarrow y^2-3y+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Leftrightarrow x=1 \\ y=2 \Leftrightarrow x=2 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x,y)=\{(1;1);(2;2)\}$.

Bình luận: Bài toán chỉ cần sự biến đổi và nhóm nhân tử từ phương trình thứ nhất trong hệ ta sẽ tìm được lời giải cho bài toán một cách khá đơn giản.

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4-6x^3+13y^2-12y-23=0 \\ y^4-6y^3+13x^2-12x+31=0 \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Cấu trúc hệ này khi được viết lại ta sẽ có hệ mới là :

$$\begin{cases} x^4-6x^3+13y^2-12y=23 \\ y^4-6y^3+13x^2-12x=-31 \end{cases}.$$

Không khó để nhận thấy vế trái của hai phương trình trong hệ có tính đối xứng vì khi thay vai trò hai ẩn x, y cho nhau thì chúng giống nhau. Nhưng do khác biệt về hệ số ở vế phải nên chúng ta không thể xem nó là đối xứng loại 2, vì vậy ta có thể xem nó là hệ nữa đối xứng.

Từ định dạng của vế trái hai phương trình trong hệ nên ta đẩy ý tưởng cộng chúng lại xem có thể đưa về được điều gì ?

Cụ thể ta có : $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + y^4 - 6y^3 + 13y^2 - 12y + 8 = 0$.

Từ phương trình này ta linh cảm sẽ có hằng đẳng thức. Thật vậy ta có :

$$x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 + y^4 - 6y^3 + 13y^2 - 12y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 3x + 2\right)^2 + \left(y^2 - 3y + 2\right)^2 = 0.$$

Và tới đây mọi chuyện đã được rõ ràng. Và hệ sẽ được giải quyết.

Lời giải :

Hệ phương trình đã cho được viết lại : $\begin{cases} x^4 - 6x^3 + 13y^2 - 12y = 23 (1) \\ y^4 - 6y^3 + 13x^2 - 12x = -31 (2) \end{cases}$

Lấy $(1) + (2)$ vế theo vế ta có được phương trình :

$$x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 + y^4 - 6y^3 + 13y^2 - 12y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 3x + 2\right)^2 + \left(y^2 - 3y + 2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = 2 \\ y = 1 \vee y = 2 \end{cases}.$$

Thử lại với từng cặp nghiệm $(x, y) = \{(1;1); (1;2); (2;1); (2;2)\}$ ta nhận được nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x, y) = (1;2)$.

Bình luận : Đây là bài toán không khó lắm, chỉ cần tinh ý để ý tính nữa đối xứng của hệ và nhìn nhanh hằng đẳng thức là có thể giải quyết được hệ khá đơn giản.

Ví dụ 8 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2y} = 2\left(y^4 - x^4\right) (1) \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2y} = \left(3y^2 + x^2\right)\left(3x^2 + y^2\right) (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, ta nhận xét khi lấy hai phương trình cộng và trừ hai vế cho nhau ta sẽ thu được một hệ có vế trái ở mỗi phương trình sẽ gọn hơn vì ta đã rút gọn được bớt số hạng có mặt ở vế trái mỗi phương trình .

Cụ thể ta sẽ biến đổi hệ ban đầu ta sẽ có hệ: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2y} = 2y^4 - 2x^4 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2y} = 3x^4 + 3y^4 + 10x^2y^2 \end{cases}$

Cộng và trừ vế theo vế của hai phương trình trong hệ ta sẽ được hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} = x^4 + 5y^4 + 10x^2y^2 \\ \dfrac{1}{y} = 5x^4 + y^4 + 10x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^5 + 5xy^4 + 10x^3y^2 = 2 \\ y^5 + 5x^4y + 10x^2y^3 = 1 \end{cases}.$$

Tới đây, ta hãy để ý tới vế phải của mỗi phương trình trong hệ với các hệ số quan trọng $1,5,10$.

Khi đó ta liên kết với hai hằng đẳng thức :

$$\begin{cases} (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\ (a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^2b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5 \end{cases}$$

Ta nhận thấy nếu cộng và trừ hai vế của hệ mới ta sẽ được hằng đẳng thức trên. Và như vậy hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$.

Lấy $(1)+(2),(1)-(2)$ vế theo vế ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} = x^4 + 5y^4 + 10x^2y^2 \\ \dfrac{1}{y} = 5x^4 + y^4 + 10x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^5 + 5xy^4 + 10x^3y^2 = 2(3) \\ y^5 + 5x^4y + 10x^2y^3 = 1(4) \end{cases}.$$

Lấy $(3)+(4),(3)-(4)$ vế theo vế ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 = 3 \\ x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^5 = 3 \\ (x-y)^5 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \sqrt[5]{3} \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+\sqrt[5]{3}}{2} \\ y = \dfrac{-1+\sqrt[5]{3}}{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x,y) = \left(\dfrac{1+\sqrt[5]{3}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt[5]{3}}{2}\right)$.

Bình luận : Bài toán này, cách giải xem qua có vẻ dễ nhưng thật chất bài toán không dễ như chúng ta tưởng. Nó đòi hỏi sự quan sát tinh tế và cần nắm chắc các hằng đẳng thức bậc cao hơn 3 mà ta thường dùng. Cụ thể ở đây là bậc 5, có đôi khi ta còn gặp bậc 6, bậc 7, bậc 8. Và thường các loại hệ này, người chế đề xuất phát từ hằng đẳng thức rồi chọn nghiệm và khai triển tung tóe ra. Việc của chúng ta là gom chúng lại và buộc phải gỡ được nút thắt hằng đẳng thức đó.

Ví dụ 9 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+\dfrac{5y}{x^2+y^2}=4(1) \\ 2y+\dfrac{5x}{x^2+y^2}=5(2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, ta cũng nhận thấy từ cấu trúc của hệ cũng cho ta ý tưởng nếu lấy hai phương trình trong hệ cộng và trừ vế theo vế ta sẽ có được nhân tử chung. Do đó ta sẽ bước đầu đi thực hiện ý tưởng này.

Cụ thể ta lấy $(1)+(2),(1)-(2)$ vế theo vế ta sẽ có :

$$\begin{cases} 2(x+y)+\dfrac{5(x+y)}{x^2+y^2}=9 \\ 2(x-y)-\dfrac{5(x-y)}{x^2+y^2}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+\dfrac{5}{x^2+y^2}=\dfrac{9}{x+y}(3) \\ 2-\dfrac{5}{x^2+y^2}=-\dfrac{1}{x-y}(4) \end{cases}$$

Tới đây ta lại thấy ý tưởng ban đầu của chúng ta vẫn còn hữu dụng với hệ mới nên ta tiến hành như vậy với hệ mới.

Lấy $(3)+(4),(3)-(4)$ vế theo vế ta có hệ : $\begin{cases} 4=\dfrac{9}{x+y}-\dfrac{1}{x-y} \\ \dfrac{10}{x^2+y^2}=\dfrac{9}{x+y}+\dfrac{1}{x+y} \end{cases}(a)$.

Với hệ mới nếu ta nhân vế theo vế ta lại được hằng đẳng thức. Do đó ta tiến hành ý tưởng này.

Cụ thể nhân vế theo vế hệ (a) ta có phương trình :

$$\frac{40}{x^2+y^2}=\left(\frac{9}{x+y}+\frac{1}{x-y}\right)\left(\frac{9}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right)\Leftrightarrow\frac{40}{x^2+y^2}=\frac{81}{(x+y)^2}-\frac{1}{(x-y)^2}.$$

Tới đây nếu ta quy đồng phương trình cuối ta sẽ được phương trình đẳng cấp. Xem như hệ đã cơ bản đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x\neq 0 \\ y\neq 0 \end{cases}$.

Với $x=y$ ta có hệ trở thành: $\begin{cases} 2x+\dfrac{5}{2x}=4 \\ 2x+\dfrac{5}{2x}=5 \end{cases}$ (hệ vô nghiệm).

Với $x=-y$ ta có hệ trở thành: $\begin{cases} 2x+\dfrac{5}{2x}=4 \\ -2y-\dfrac{5}{2x}=5 \end{cases}$ (hệ vô nghiệm).

Do đó ta chỉ giải hệ với $x \neq \pm y$.

Lấy $(1)+(2),(1)-(2)$ vế theo vế ta có được hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2(x+y)+\dfrac{5(x+y)}{x^2+y^2}=9 \\ 2(x-y)-\dfrac{5(x-y)}{x^2+y^2}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+\dfrac{5}{x^2+y^2}=\dfrac{9}{x+y} (3) \\ 2-\dfrac{5}{x^2+y^2}=-\dfrac{1}{x-y} (4) \end{cases}$$

Lấy $(3)+(4),(3)-(4)$ vế theo vế ta có được hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4=\dfrac{9}{x+y}-\dfrac{1}{x-y} \\ \dfrac{10}{x^2+y^2}=\dfrac{9}{x+y}+\dfrac{1}{x-y} \end{cases} (I)$$

Nhân vế theo vế trong hệ (I) ta có được phương trình :

$$\frac{40}{x^2+y^2}=\left(\frac{9}{x+y}+\frac{1}{x-y}\right)\left(\frac{9}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right) \Leftrightarrow \frac{40}{x^2+y^2}=\frac{81}{(x+y)^2}-\frac{1}{(x-y)^2}$$

$$\Leftrightarrow 40\left(x^2-y^2\right)^2=\left(x^2+y^2\right)\left(81(x-y)^2-(x+y)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 10\left(x^2-y^2\right)^2=\left(x^2+y^2\right)(5x-4y)(4x-5y)$$

$$\Leftrightarrow 10x^4-41x^3y+60x^2y^2-41xy^3+10y^4=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)(2x-y)\left(5x^2-8xy+5y^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ y=2x \end{array}\right. \text{ vì } 5x^2-8xy+5y^2>0.$$

⊕ Với $x=2y$ thay vào (1) ta có phương trình :

$$4y+\frac{1}{y}=4 \Leftrightarrow (2y-1)^2=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2} \Rightarrow x=1.$$

⊕ Với $y=2x$ thay vào (1) ta có phương trình :

$$2x+\frac{2}{x}=4 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=2.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left\{(1;2);\left(\frac{1}{2};1\right)\right\}$.

Bình luận : Đây là một dạng toán hệ khá hay, mấu chốt của loại hệ này là từ hệ ta sử dụng phương pháp cộng trừ và nhân chéo sẽ đưa về được hằng đẳng thức $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ để áp dụng liên tục sẽ đưa được phương trình đẳng cấp. Loại này, có thể giải bằng một phương pháp khác mạnh đó là số phức.

Nhưng nhược điểm của số phức là chỉ áp dụng được một số định dạng hệ này mà dưới mẫu có chứa x^2+y^2 và việc lựa chọn đặt số phức cũng là một kỷ năng không phải dễ với hầu hết học sinh.

Ví dụ 10 : Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x}\left(1+\dfrac{8}{x+y}\right)=3\sqrt{3}\,(1)\\ \sqrt{y}\left(1-\dfrac{8}{x+y}\right)=-1\,(2)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Hệ này về cấu trúc hình thức thì khác ví dụ 9 nhưng bản chất và cách giải thì như nhau.

Thật vậy, nếu ta xem $a=\sqrt{x},b=\sqrt{y}$ thì hệ sẽ trở thành : $\begin{cases}a+\dfrac{8a}{a^2+b^2}=3\sqrt{3}\\ b-\dfrac{8b}{a^2+b^2}=-1\end{cases}$.

Và như vậy, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp giải ví dụ 9 để trực tiếp giải hệ này mà không cần thông qua ẩn phụ.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\\ x+y\ne 0\end{cases}$.

Nhận xét với $(x,y)=(0;0)$ không thỏa hệ. Do đó ta sẽ xét $x>0,y>0,x+y\ne 0$.

Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ phương trình :

$$\begin{cases}1+\dfrac{8}{x+y}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x}}(1)\\ 1-\dfrac{8}{x+y}=-\dfrac{1}{\sqrt{y}}(2)\end{cases}.$$

Lấy $(1)+(2),(1)-(2)$ vế theo vế ta có hệ phương trình : $\begin{cases}2=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}(3)\\ \dfrac{16}{x+y}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}(4)\end{cases}$

Lấy $(3)\cdot(4)$ vế theo vế ta có được phương trình:

$$\frac{32}{x+y}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\Leftrightarrow\frac{32}{x+y}=\frac{27}{x}-\frac{1}{y}\Leftrightarrow 32xy=(x+y)(27y-x)$$

$$\Leftrightarrow 32xy=26xy-x^2+27y^2\Leftrightarrow x^2+6y-27y^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3y\\ x=-9y\end{array}\right.\Leftrightarrow x=3y$$

vì $-9y<0$.

Với $x=3y$ thay vào (1) ta có phương trình:

$$1+\frac{2}{y}=\frac{3}{\sqrt{y}}\Leftrightarrow y-3\sqrt{y}+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{y}=1\\ \sqrt{y}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\Rightarrow x=3\\ y=4\Rightarrow x=12\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện và thử lại ta có nghiệm của hệ là : $(x,y)=(3;1)$.

Bình luận : Loại hệ này, xem qua cách giải thì hình như rất đơn giản nhưng thật chất đây là một loại hệ khó. Và do đặc điểm của hệ này gần với hệ ở ví dụ 9 nên người ta có thể dùng kỷ thuật phức hóa để giải hệ này. Và phải chăng nguồn gốc của loại hệ này là từ số phức?? Chứ nếu chọn đại một phương trình và ghép lại thì rõ ràng nó có gì đó rất ảo.

Ví dụ 11 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+x+y+1}+x+\sqrt{y^2+x+y+1}+y=18(1)\\ \sqrt{x^2+x+y+1}-x+\sqrt{y^2+x+y+1}-y=2(2)\end{cases}(x,y\in\mathbb{R})$$

Đại học An Ninh năm 1999

Phân tích : Quan sát hệ, ta nhận thấy cả hai phương trình trong hệ đều chứa hai đại lượng đó là $\sqrt{x^2+x+y+1},\sqrt{y^2+x+y+1}$ nên ý tưởng chúng ta sẽ trừ vế theo vế hai phương trình để giản ước các đại lượng này và thiết lập mối quan hệ giữa hai biến x,y và thực hiện phép thế.

Mặt khác chúng ta cũng dễ nhận thấy hai biến x,y ở ngoài căn có dấu trái nhau nên ta cũng sẽ thực hiện cộng hai vế phương trình để giản ước đại lượng này.

Như vậy, qua hai bước cộng trừ ta sẽ đưa được hệ về hệ đơn giản hơn đó là :

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+x+y+1}+\sqrt{y^2+x+y+1}=10\\ x+y=8\end{cases}$$

Và từ đây hệ đã cho được giải quyết rất đơn giản.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}x^2+x+y+1\ge 0\\ y^2+x+y+1\ge 0\end{cases}$.

Lấy $(1)+(2),(1)-(2)$ vế theo vế ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+x+y+1}+\sqrt{y^2+x+y+1}=10\\ x+y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}=10\\ x+y=8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-16x+73}=10\\ y=8-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2-16x+73}=10-\sqrt{x^2+9}\\ y=8-x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10-\sqrt{x^2+9} \ge 0 \\ x^2-16x+73 = 100-20\sqrt{x^2+9}+x^2+9 \\ y = 8-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \le x \le 9 \\ 5\sqrt{x^2+9} = 4x+9 \\ y = 8-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9 \le x \le 9 \\ x \ge -\dfrac{9}{4} \\ 25\left(x^2+9\right) = 16x^2+72x+81 \\ y = 8-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{9}{4} \le x \le 9 \\ \left(x-4\right)^2 = 0 \\ y = 8-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $\left(x,y\right) = \left(4;4\right)$.

Bình luận : Đây là bài không khó và đề thi cũng đã khá lâu nhưng cách giải thông qua hệ này vẫn còn nguyên giá trị và nó đã khơi gợi sự ra đời của nhiều bài toán sau này có cách giải tương tự. Lời giải trong bài toán có lẻ là hướng đi tự nhiên nhất cho bài toán này.

Ví dụ 12 :

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2+\sqrt{3-x}+\sqrt{y-2} = xy+2x+16\left(1\right) \\ 3y^2+\sqrt{3-x}+\sqrt{y-2} = 6y-10xy+16\left(2\right) \end{cases}$ $\left(x,y \in \mathbb{R}\right)$.

Phân tích : Hệ này có cấu trúc cũng tựa tựa như ví dụ 11. Quan sát hệ ta nhận thấy ở cả hai phương trình trong hệ đều có hai đại lượng $\sqrt{3-x},\sqrt{y-2}$ nên ta sẽ lên ý tưởng trừ vế theo vế hai phương trình này để thu khử bớt đại lượng đó, mặt khác khi trừ như vậy ta sẽ thu được phương trình bậc hai hai ẩn x,y nên ta có quyền hy vọng sẽ bắt được nhân tử.

Cụ thể ta lấy hai phương trình trừ cho nhau vế theo vế ta thu được phương trình:

$4x^2-3y^2 = 11xy+2x-6y \Leftrightarrow 4x^2-\left(11y+2\right)x-3y^2+6y = 0$.

Ta có $\Delta_x = \left(11y+2\right)^2+16\left(3y^2-6y\right) = \left(13y-2\right)^2$. Vậy phương trình bậc hai ta tách được nhân tử. Và như thế cơ bản hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x \le 3 \\ y \ge 2 \end{cases}$.

Lấy $\left(1\right)-\left(2\right)$ vế theo vế ta có được phương trình :

$$4x^2-3y^2-11xy-2x-6y = 0 \Leftrightarrow 4x^2+xy-2x-3y^2-12xy+6y = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(4x+y-2\right)-3y\left(y+4x-2\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x-3y\right)\left(y+4x-2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3y \\ y = -4x+2 \end{array}\right..$$

⊕ Với $x=3y$, thì do $y\ge 2\Rightarrow x=3y\ge 6$. Vậy $\begin{cases}x\ge 6\\ x\le 3\end{cases}$ vô lí. Vậy $x=3y$ loại.

⊕ Với $y=-4x+2$ thay vào phương trình (1) trong hệ ta có phương trình :

$$4x^2+\sqrt{3-x}+\sqrt{-4x}=x(-4x+2)+2x+16=0.$$

$$\Leftrightarrow 8x^2-4x-16+\sqrt{3-x}+\sqrt{-4x}=0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(2x^2-x-3\right)+\sqrt{3-x}-2+\sqrt{-4x}-2=0$$

$$\Leftrightarrow 4(x+1)(2x-3)-\frac{x+1}{\sqrt{3-x}+2}-\frac{4(x+1)}{\sqrt{-4x}+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\underbrace{\left(4(2x-3)-\frac{1}{\sqrt{3-x}+2}-\frac{4}{\sqrt{-4x}+2}\right)}_{K}=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$$

$$\Rightarrow y=6\ \ (*).$$

Ta có được (*)là vì điều kiện để giải phương trình lúc này là $x\le 0$. Mà với $x\le 0\Rightarrow K<0$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(1;6)$.

Bình luận : Bài toán này có độ khó hơn ví dụ 9 nhưng ý tưởng giải thì vẫn vậy. Ở việc rút xong nhân tử, ta cần quan sát chặt chẽ bài toán để tránh sai lầm cứ thế từng nhân tử vào rồi giải. Các điều này ở các phần trước chúng tôi cũng đã lưu ý khá nhiều. Các bạn cố gắng nắm chắc để tránh những bước đi lằng nhằng không cần thiết.

Ví dụ 13 :

Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2+x+\sqrt{x+2}=2y^2+y+\sqrt{2y+1}\,(1)\\ x^2+2y^2-2x+y-2=0\,(2)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

(Thi thử chuyên đại học Vinh lần 3 năm 2014)

Phân tích : Đây là một bài hệ hay, nhìn vào hệ thấy phương trình thứ nhất hai biến x,y đã có tính phân ly nên từ đây có thể định hướng đưa về phương trình thứ nhất về dạng phương trình có tính đối xứng để bắt nhân tử. Tuy nhiên với cấu trúc sắp xếp các đại lượng chưa cho phép cho ta được biến đổi này. Do đó ý tưởng sẽ kết hợp cả hai phương trình trong hệ để có được phương trình dạng đối xứng.

Lại có phương trình thứ hai trong hệ là phương trình bậc hai với hai biến x,y. Kiểm tra phương trình này không có delta chính phương nên hy vọng bắt nhân tử ở phương trình này cũng không giúp chúng ta được.

Quan tâm chính là sự khác biệt ở phương trình thứ nhất không giúp chúng ta đưa được về phương trình dạng đối xứng chính là sự sai biệt của hai đại lượng $2x^2+x$ đối với $\sqrt{x+2}$ và $2y^2+y$ đối với $\sqrt{2y+1}$. Và mục đích bắt nhân tử ở dạng đối xứng có chứa căn là khử căn.

Từ nhận xét này ta thử phép tính sau :

$\sqrt{2y+1}=\sqrt{x+2}\Leftrightarrow 2y+1=x+2\Leftrightarrow x=2y-1$.

Vậy nếu khử căn thì ta cần có mối quan hệ giữa hai biến x,y là $x=2y-1$. Khi đó ta có :

$$\oplus\ f(x)=2x^2+x+\sqrt{x+2}-2y^2-y-\sqrt{2y+1}=2(2y-1)^2+2y-1-2y^2-y$$
$$=6y^2-7y+1.$$

$$\oplus g(x)=x^2+2y^2-2x+y-2=(2y-1)^2+2y^2-2(2y-1)+y-2=6y^2-7y+1$$

Như vậy khi $x=2y-1$ cho ta $f(x)=g(x)$.

Do đó ta sẽ đưa ý tưởng là lấy (1) – (2) vế theo vế.

Cụ thể lấy $(1)-(2)$ vế theo vế ta được phương trình:

$$x^2-2y^2+3x+\sqrt{x-2}-y+2=2y^2+y+\sqrt{2y+1}$$
$$\Leftrightarrow x^2+3x+2-4y^2-2y+\sqrt{x+2}-\sqrt{2y+1}=0$$
$$\Leftrightarrow(x-2y+1)(x+2y+2)+\frac{x-2y+1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2y+1}}=0$$
$$\Leftrightarrow(x-2y+1)\left(x+2y+2+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2y-1}}\right)=0$$

Với điều kiện của hệ $\begin{cases}x+2\ge 0\\ 2y\ge 1\end{cases}$ thì biểu thức trong ngoặc đã rõ ràng về dấu nên ta đã có được nhan tử như dự đoán. Vậy xem như hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện: $\begin{cases}x\ge -2\\ y\ge \dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Với $(x,y)=\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$ ta nhận thấy không thỏa hệ. Do đó ta chỉ cần xét với $x>-2,y>\dfrac{1}{2}$.

Lấy (1) – (2) vế theo vế ta được phương trình :

$$x^2-2y^2+3x+\sqrt{x+2}-y+2=2y^2+y+\sqrt{2y+1}$$

$\Leftrightarrow x^2+3x+2-4y^2-2y+\sqrt{x+2}-\sqrt{2y+1}=0$

$\Leftrightarrow (x-2y+1)(x+2y+2)+\dfrac{x-2y+1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2y+1}}=0$

$\Leftrightarrow (x-2y+1)\underbrace{\left(x+2+2y+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2y+1}}\right)}_{P}=0\ (*)$

Với $\begin{cases} x>-2 \\ y>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow P>0$. Do đó từ $(*)$ ta có $x-2y+1=0 \Leftrightarrow x=2y-1$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$6y^2-7y+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=1 \\ y=\dfrac{1}{6} \Rightarrow x=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left\{(1;1);\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{6}\right)\right\}$.

Bình luận : Với bài toán này, thật chất chúng ta là rút $x^2=-2y^2+2x-y+2$ vào phương trình thứ nhất để đưa về phương trình dạng hai biến phân ly có tính đối xứng rồi xét hàm số. Nhưng với quan điểm của chúng tôi, cách thế ấy quá "ảo diệu" không phải học sinh nào cũng có thể cho một phép "lạ, hiểm" như vậy cả. Trên tinh thần của hệ số bất định mà chúng ta tôi đã đi được đến lời giải như vậy. Để có được điều đó thì từ sự phân ly giữa các biến ở phương trình thứ nhất chúng tôi hướng đến định dạng đối xứng (xét hàm số hoặc liên hiệp bắt nhân tử chung) nên chúng tôi nghỉ đến phép khử căn thức. Các căn thức đã rạch ròi về biến nên phép thử cho hai căn thức bằng nhau để tìm mối quan hệ giữa hai biến là một tư duy tự nhiên. Việc còn lại chính là chúng ta đem thử lại tính đúng trong hai phương trình. Chú ý rằng với hệ này nếu xét tính đơn điệu, nếu chọn hàm số không khéo thì khi chứng tỏ hàm đơn điệu sẽ qua bước đạo hàm cấp 2 khá rối. Tuy nhiên, dựa trên định dạng tính phân ly giữa biến và tính đối xứng của phương trình sẽ cho lời giải tự nhiên và đẹp.

Ví dụ 14:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+4y(x-5)-1=4y^2-x+2\sqrt{2y}\,(1) \\ 4y(x-4)+x=2\sqrt{x-1}\,(2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

(Thi thử lần 1 chuyên quốc học Huế 2015)

Phân tích : Bài toán này đã được người chế đề che giấu kỉ hơn, do tính hình thức của bài toán nên việc giải hệ này ý tưởng là cần phối hợp cả hai phương trình

trong hệ vì từ từng phương trình trong hệ ta không thể làm được gì để có nhân tử chung. Việc xuất hiện hai căn thức mà mỗi căn thức chỉ chứa x hoặc y nên ta có thể ẩn phụ để khử căn thức. Nhưng khi ẩn phụ hóa thì ta sẽ đưa bậc của đa thức sẽ cao hơn bậc ban đầu.

Vậy mục đích là khử căn thức, vậy ta sẽ thử phép tính sau :

$\sqrt{2y}=\sqrt{x-1}\Leftrightarrow x=2y+1$. Khi đó ta có :

$\oplus\ f(x)=x^2+4y(x-5)-1-4y^2+x-2\sqrt{2y}=2x^2-9x+8-2\sqrt{x-1}$

$\oplus\ g(x)=4y(x-4)+x-2\sqrt{x-1}=2x^2-9x+8-2\sqrt{x-1}$

Và như vậy với $x=2y+1$ ta luôn có $f(x)=g(x)$. Do đó ta sẽ lên ý tưởng là lấy (1) – (2) vế theo vế để bắt được nhân tử chung.

Cụ thể lấy (1) – (2) vế theo vế ta sẽ có được phương trình :

$$x^2+4y(x-5)-1-4y(x-4)-x=4y^2-x+2\sqrt{2y}-2\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow x^2-(2y+1)^2=2\left(\sqrt{2y}-\sqrt{x-1}\right)\Leftrightarrow(x+2y+1)(x-2y-1)=\frac{2(2y-x+1)}{\sqrt{2y}+\sqrt{x-1}}$$

$$\Leftrightarrow(x-2y-1)\left(x+2y+1+\frac{2}{\sqrt{2y}+\sqrt{x-1}}\right)=0.$$

Tới đây từ điều kiện có được của hệ ta sẽ có được nhân tử chung như dự đoán. Vậy hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện: $\begin{cases}y\ge 0\\ x\ge 1\end{cases}$.

Nhận xét với $(x,y)=(1;0)$ không thỏa hệ. Do đó ta chỉ cần xét $x>1, y>0$.

Lấy (1) – (2) vế theo vế ta sẽ có được phương trình :

$$x^2+4y(x-5)-1-4y(x-4)=4y^2-x+2\sqrt{2y}-2\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow x^2-(2y+1)^2=2\left(\sqrt{2y}-\sqrt{x-1}\right)\Leftrightarrow(x+2y+1)(x-2y-1)=\frac{2(2y-x+1)}{\sqrt{2y}+\sqrt{x-1}}$$

$$\Leftrightarrow(x-2y-1)\underbrace{\left(x+2y+1+\frac{2}{\sqrt{2y}+\sqrt{x-1}}\right)}_{T}=0\ (*).$$

Vì $\begin{cases}x>1\\ y>0\end{cases}\Rightarrow P>0$. Do đó từ $(*)$ ta có $2y=x-1$.

Thay vào phương trình (2) ta có được phương trình :

$2(x-1)(x-4)+x=2\sqrt{x-1}\Leftrightarrow 2x^2-9x+8=2\sqrt{x-1}$

$$\Leftrightarrow 4x^2-18x+16-4\sqrt{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-20x+17+2x-1-4\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow 4x^2-20x+17+\frac{4x^2-20x+17}{2x-1+4\sqrt{x-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(4x^2-20x+17\right)\underbrace{\left(1+\frac{1}{2x-1+4\sqrt{x-1}}\right)}_{K}=0 \Leftrightarrow 4x^2-20x+17=0$$

vì $x>1 \Rightarrow K>0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5+2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y=\frac{3+2\sqrt{2}}{4} \\ x=\frac{5-2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y=\frac{3-2\sqrt{2}}{4} \end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là :

$$(x,y)=\left\{\left(\frac{5+2\sqrt{2}}{2};\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right);\left(\frac{5-2\sqrt{2}}{2};\frac{3-2\sqrt{2}}{4}\right)\right\}.$$

Bình luận : Bài toán này có ý tưởng tương tự như ví dụ 13, nhưng ngay từ đầu cấu trúc của hệ cho ta hướng đi hẹp hơn vì không chứa một phương trình bậc hai hai biến như ví dụ 13. Về lời giải của phương trình tìm nghiệm, có thể bình phương hai vế đưa về phương trình bậc 4 tách được nhân tử.

Ví dụ 15 :

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{(x+3y-2)y-(x+1)^2}=x+2y-1 \\ (2y-3)x+(2x+y-1)\sqrt{2x+y}=1+y-y^2 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, ta chẳng phán đoán được gì từ hình thức của hệ nên trước hết ta sẽ biến đổi hệ một chút cho bớt căn thức vì phương trình thứ nhất của hệ có dạng cơ bản $\sqrt{f(x)}=g(x)$ và khi sử dụng nâng lũy thừa thì sẽ thu được phương trình bậc hai hai ẩn và hy vọng sẽ bắt được nhân tử.

Cụ thể ta biến đổi hệ trở thành hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+2y-1\ge 0 \\ (x+3y-2)y-(x+1)^2=(x+2y-1)^2 \\ (2y-3)x+(2x+y-1)\sqrt{2x+y}=1+y-y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-1\ge 0 \\ 2x^2+y^2+3xy-2y+2=0 \\ (2y-3)x+(2x+y-1)\sqrt{2x+y}=1+y-y^2 \end{cases}$$

Kiểm tra phương trình bậc hai ẩn trong hệ mới ta thấy không có delta chính phương nên việc bắt nhân tử chung từ phương trình này xem như thất bại.

Với hệ mới ta chỉ còn một căn thức và có thể ẩn phụ hóa căn thức nhưng nếu như vậy ta sẽ đưa hệ về một hệ chứa hai phương trình đa thức có bậc khá cao và lúc đó chọn lựa chắc cũng phải là tách nhân tử nên ở đây ta sẽ đề xuất một ý tưởng nhờ vào việc biểu thức gắn với căn bằng phép tính nhân có đại lượng giống trong căn và khi cho $2x+y-1=0$ lập tức ta sẽ thoát được căn thức luôn.

Vậy dự đoán mối quan hệ giữa hai biến lúc này là $2x+y-1=0$. Khi đó ta có :

$$\oplus f(x)=(2y-3)x+(2x+y-1)\sqrt{2x+y}+y^2-y-1$$
$$=(-1-4x)x+(1-2x)^2-2+2x=-3x-1$$

$$\oplus g(x)=2x^2+y^2+3xy-2y+2=2x^2+(1-2x)^2+3x(1-2x)+4x=3x+1$$

Vậy với $y=1-2x$ ta có : $f(x)=-g(x)$. Do đó ta sẽ đẩy ý tưởng là lấy phương trình thứ nhất trong hệ mới cộng vế theo vế với phương trình thứ hai trong hệ mới.

Cụ thể ta sẽ có phép biến đổi sau :

$$2x^2+y^2+3xy-2y+2+y^2-y+2xy-3x+(2x+y-1)\sqrt{2x+y}-1=0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+5xy-3x-3y+1+(2x+y-1)\sqrt{2x+y}=0$$
$$\Leftrightarrow (2x+y-1)(x+2y-1)+(2x+y-1)\sqrt{2x+y}=0$$
$$\Leftrightarrow (2x+y-1)\left(x+2y-1+\sqrt{2x+y}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+y-1=0\\ \begin{cases}x+2y-1=0\\ 2x+y=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Và tới đây xem như hệ đã được giải quyết .

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}x+2y-1\ge 0\\ (x+3y-2)y-(x+1)^2\ge 0\\ 2x+y\ge 0\end{cases}$.

Với điều kiện này hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ phương trình :

$$\begin{cases}(x+3y-2)y-(x+1)^2=(x+2y-1)^2\\ (2y-3)x+(2x+y-1)\sqrt{2x+y}=1+y-y^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2+y^2+3xy-2y+2=0\quad(1)\\ y^2+2xy-3x-y-1+(2x+y-1)\sqrt{2x+y}=0\quad(2)\end{cases}$$

Lấy $(1)+(2)$ vế theo vế ta được phương trình :

$2x^2+2y^2+5xy-3x-3y+1+(2x+y-1)\sqrt{2x+y}=0$

$\Leftrightarrow(2x+y-1)(x+2y-1)+(2x+y-1)\sqrt{2x+y}=0$

$\Leftrightarrow(2x+y-1)\left(x+2y-1+\sqrt{2x+y}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+y-1=0\\ \begin{cases}x+2y-1=0\\2x+y=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=1-2x\\ \begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{2}{3}\end{cases}\end{array}\right.$.

⊕ Với $(x,y)=\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ thử lại ta nhận thấy không thỏa hệ.

⊕ Với $y=1-2x$ thay vào (1) ta được : $3x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}\Rightarrow y=\frac{5}{3}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là : $(x,y)=\left(-\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$.

Bình luận: Bài toán này có định hướng giải giống các ví dụ 13, 14. Tuy nhiên nó một định dạng khó hơn một chút. Đặc biệt rất nhiều học sinh hay mắc sai lầm chỗ kết luận sau đây :

$(2x+y-1)\left(x+2y-1+\sqrt{2x+y}\right)=0\Leftrightarrow 2x+y-1=0$.

Vì nghỉ rằng $x+2y-1+\sqrt{2x+y}>0$. Đó là sai lầm bởi vì từ điều kiện của bài toán ta có được đại lượng $x+2y-1+\sqrt{2x+y}\ge 0$ nên ta cần có : $\begin{cases}x+2y-1=0\\2x+y=0\end{cases}$. Và sau đó kiểm tra lại nghiệm này đối với hệ.

Ví dụ 16: Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+\sqrt{x^2-2x+5}=3y+\sqrt{y^2+4}\,(1)\\x^2-y^2-3x+3y+1=0\,(2)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

(Thi thử toanphothong.vn)

Phân tích : Với hệ này ta cũng nhận thấy hai phương trình thứ nhất trong hệ có tính phân ly nên ta sẽ cố gắng đưa phương trình này về phương trình có tính đối xứng để bắt nhân tử chung. Tuy nhiên sự sai biệt về hai đại lượng $x,\sqrt{x^2-2x+5}$ và $3y,\sqrt{y^2+4}$ là khá lớn và không thể kéo theo được điều gì.

Mặt khác ta cũng nhận thấy phương trình thứ hai trong hệ là phương trình bậc hai hai ẩn nhưng lại không cho được delta chính phương nên phương trình này cũng không giúp ta bắt được nhân tử.

Với ý tưởng "phân ly và đối xứng" ta có mục đích là khử căn nên ta sẽ thử phép toán sau :

$$\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{y^2+4}\Leftrightarrow x^2-2x+5=y^2+4\Leftrightarrow (x-1)^2=y^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1=y\\1-x=y\end{array}\right..$$

⊕ Với $y=x-1$ ta có các bước tính sau:

• $f(x)=x+\sqrt{x^2-2x+5}-3y-\sqrt{y^2+4}=x-3(x-1)=-2x+3$

• $g(x)=x^2-y^2-3x+3y+1=x^2-(x-1)^2-3x+3x-3+1=2x-3$

Từ đây ta có : $f(x)=-g(x)$.

⊕ Với $y=1-x$ ta có các bước tính sau :

• $f(x)=x+\sqrt{x^2-2x+5}-3y-\sqrt{y^2+4}=x-3(1-x)=4x-3$

• $g(x)=x^2-y^2-3x+3y+1=x^2-(1-x)^2-3x+3-3x+1=-4x+3$

Từ đây ta có : $f(x)=-g(x)$.

Vậy qua hai bước thử ta dự đoán nếu ta lấy phương trình thứ nhất cộng với phương trình thứ hai trong hệ vế theo vế ta sẽ có được nhân tử chung $(x-1)^2-y^2$.

Cụ thể ta sẽ có phép biến đổi sau :

$$x+\sqrt{x^2-2x+5}+x^2-y^2-3x+3y+1=3y+\sqrt{y^2+4}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+\sqrt{(x-1)^2+4}-y^2-\sqrt{y^2+4}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-y^2+\sqrt{(x-1)^2+4}-\sqrt{y^2+4}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-y^2+\frac{(x-1)^2-y^2}{\sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{y^2+4}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x-1)^2-y^2\right]\left(1+\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{y^2+4}}\right)=0.$$

Và tới đây, ta thấy nhận định của chúng ta đã đúng và phép bắt nhân tử chung cũng thực hiện được mà không cần đánh giá gì thêm về dấu của biểu thức trong ngoặc. Và xem như hệ đã được giải quyết.

Lời giải :

Lấy $(1)+(2)$ vế theo vế ta có phương trình :

$$x+\sqrt{x^2-2x+5}+x^2-y^2-3x+3y+1=3y+\sqrt{y^2+4}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+\sqrt{(x-1)^2+4}-y^2-\sqrt{y^2+4}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - y^2 + \sqrt{(x-1)^2+4} - \sqrt{y^2+4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - y^2 + \frac{(x-1)^2 - y^2}{\sqrt{(x-1)^2+4} + \sqrt{y^2+4}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x-1)^2 + y^2\right]\underbrace{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+4} + \sqrt{y^2+4}}\right)}_{T} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = y^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x-1 \\ y = 1-x \end{array}\right.$$

vì $T > 0$.

⊕ Với $y = x-1$ thay vào (2) ta có : $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$.

⊕ Với $y = 1-x$ thay vào (2) ta có : $-4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x, y) = \left\{\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)\right\}$.

Bình luận : Bài toán này có rất nhiều lời giải là thế $3y = y^2 + 3x - 1 - x^2$ vào phương trình thứ nhất và tạo ra nhân tử như trong lời giải. Điều đó là chính xác, nhưng chúng tôi thiết nghỉ phép thế này có được là do rèn luyện nhưng với đa số học sinh thì sẽ hỏi tại sao lại chọn phép thế đó ? Lối phân tích trên có lẻ là con đường tự nhiên nhất dẫn đến phép thế đó. Hy vọng sẽ trợ giúp cho các bạn một lối tư duy logic nhất để có được sự trải nghiệm với những bài toán hệ.

Ví dụ 17:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\left(4x^2 + y\right)x = 4 - 2y^2(2 + 15y) (1) \\ \left(3y + 4x^2\right)\sqrt{y} = \dfrac{10 + \sqrt{2x + 3y + 4}}{\sqrt{y}} (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Cấu trúc hệ này thật khó phán đoán để làm gì từ hai phương trình trong hệ. Hệ chứa hai căn thức là $\sqrt{y}, \sqrt{2x+3y+4}$ nhưng thực chất là duy nhất một căn thức $\sqrt{2x+3y+4}$ nếu theo lẽ thường ẩn phụ hóa thì thật sự cũng chẳng tìm được mối liên quan nào giữa ẩn phụ và ẩn ban đầu của hệ. Thôi thì, hệ có phần đa thức nhiều hơn căn ta xem chuẩn hóa cho căn thức được thoát căn là ưu tiên của chúng ta.

Do các đại lượng x, y trong căn đều bậc nhất và có gắn với số 4 bằng phép cộng nên ta thử dự đoán $2x + 3y = 0$ để ta có $\sqrt{2x+3y+4} = 2$.

Với dự đoán này ta sẽ thực hiện các phép tính sau :

$\oplus\ f(x)=8x^3+2xy+30y^3+4y^2-4$

$$=8\left(-\frac{3y}{2}\right)^3+2\left(-\frac{3y}{2}\right)y+30y^3+4y^2-4=3y^3+y^2-4$$

$\oplus\ g(x)=3y^2+4x^2y-10-\sqrt{2x+3y+4}$

$$=3y^2+4\left(-\frac{3y}{2}\right)^2y-10-2=3\left(3y^3+y^2-4\right)$$

Từ đây ta có được: $g(x)=3f(x)$. Khi đó ta đẩy ý tưởng là lấy $(2)-3\cdot(1)$ vế theo vế.

Cụ thể ta có:

$$3y^2+4x^2y-10-\sqrt{2x+3y+4}-3\left(8x^3+2xy+30y^3+4y^2-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 24x^3+6xy+90y^3+9y^2-4x^2y+\sqrt{2x+3y+4}-2=0$$

$$\Leftrightarrow 24x^3-4x^2y++90y^3+6xy+9y^2+\sqrt{2x+3y+4}-2=0$$

$$\Leftrightarrow (2x+3y)\left(12x^2-20xy+30y^2\right)+3y(2x+3y)+\frac{2x+3y}{\sqrt{2x+3y+4}+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (2x+3y)\left(12x^2-20xy+30y^2+3y+\frac{1}{\sqrt{2x+3y+4}+2}\right)=0$$

Và tới đây việc bắt nhân tử chung đã thành công vì với điều kiện của hệ thì dấu trong ngoặc đã rõ ràng.

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} y>0 \\ 2x+3y+4\ge 0 \end{cases}$.

Lấy $(2)-3\cdot(1)$ vế theo vế ta có được phương trình :

$$3y^2+4x^2y-10-\sqrt{2x+3y+4}-3\left(8x^3+30y^2+2xy+4y^2-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 24x^3-4x^2y+90y^3+6xy+9y^2+\sqrt{2x+3y+4}-2=0$$

$$\Leftrightarrow (2x+3y)\left(12x^2-20xy+30y^2\right)+3y(2x+3y)+\frac{1}{\sqrt{2x+3y+4}+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (2x+3y)\underbrace{\left(12x^2-20xy+30y^2+3y+\frac{1}{\sqrt{2x+3y+4}+2}\right)}_{C}=0$$

$\Leftrightarrow 2x+3y=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3y}{2}$ vì $C>0$.

⊕ Với $x=-\frac{3y}{2}$ thay vào (1) ta được phương trình :

$3y^3+y^2-4=0\Leftrightarrow(y-1)\left(3y^2+4y+4\right)=0$ $y=1\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ vì $3y^2+4y+4>0$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là : $(x,y)=\left(-\frac{3}{2};1\right)$.

Bình luận: Bài hệ này có mức độ khó và phải kết hợp nhiều kỹ năng mới có thể hoàn thành hệ. Với đề bài hệ đánh lừa cảm giác hai căn thức nhưng nếu ta tinh ý sẽ thấy hệ này bản chất thật chỉ chứa một căn thức. Còn căn thức còn lại chắc là ngụ ý của tác giả dùng để khống chế sự đánh giá sau này được thuận lợi hơn và rõ ràng là qua lời giải sự xuất hiện của $\sqrt{y}$ chỉ giúp đánh giá được đơn giản hơn.

Ví dụ 18: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^4+2(3y+1)x^2+\left(5y^2+4y+11\right)x-y^2+10y+2=0(1)\\ y^3+(x-2)y+x^2+x+2=0(2)\end{cases}\quad(x,y\in\mathbb{R})$$

(Thi thử toanphothong.vn)

Phân tích : Đây là một bài hệ rất khó, bài hệ này muốn công phá nó thật sự là một vấn đề rất nan giải và đòi hỏi người giải phải hội tủ rất nhiều sự nhạy bén và kỷ thuật. Trước tiên quan sát hệ này chúng ta không thể thấy được đường lối nào cả, nhưng chúng ta ghi nhớ một điều giải hệ thật chất là kỉ năng thế "ghép và tạo" để đưa đến giải một phương trình hoặc một hệ đơn giản hơn.

Nhưng chúng ta đã biết kỷ năng thế sẽ được thực hiện thành công khi mà ta có mối quan hệ giữa x,y phải thỏa $f(x,y)=0$, trong đó $f(x,y)$ thường là dạng đường thẳng đi qua hai điểm nào đó là nghiệm của hệ hoặc một biểu thức ràng buộc để tạo một phương trình hoặc một hệ đơn giản hơn. Từ suy nghỉ này, với bài toán này chúng ta cần đoán nghiệm trước. Nghiệm này thường là các số nguyên mà ta có thể tính tới như $0;\pm1;\pm2;\pm3$.

Cụ thể trong hệ này, ta nhận thấy phương trình thứ hai trong hệ có thể thử nghiệm tốt hơn phương trình thứ nhất, mặt khác ta thử với y sẽ có lợi hơn thử x. Không khó nhận ra từ phương trình thứ hai ta biết được hệ không thể có nghiệm $(x,y)=(x;0)$.

⊕ Với $y=1$ ta có hệ trở thành : $\begin{cases}x^4+8x^2+20x+11=0\\(x+1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1$.

⊕ Với $y=-1$ ta có hệ trở thành : $\begin{cases}x^4-4x^2+12x-9=0\\x^2+3=0\end{cases}$ (hê vô nghiệm)

⊕ Với $y=2$ ta có hệ trở thành : $\begin{cases} x^4+14x^2+39x+18=0 \\ x^2+3x+6=0 \end{cases}$ (hệ vô nghiệm)

⊕ Với $y=-2$ ta có hệ trở thành : $\begin{cases} x^4-10x^2+23x-22=0 \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Vậy qua bước đoán nghiệm ta nhận thấy hệ sẽ có hai nghiệm $(x,y)=\{(-1;1);(2;-2)\}$.

Như vậy đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1;1),B(2;-2)$ là $x+y=0 \Leftrightarrow y=-x$.

Khi đó ta sẽ có các phép tính thử sau :

$$\oplus f(x)=x^4+2(3y+1)x^2+\left(5y^2+4y+11\right)x-y^2+10y+2=(x+1)^2(x-1)(x-2)$$

$$\oplus g(x)=y^3+(x-2)y+x^2+x+2=-(x+1)^2(x-2).$$

Và từ đây ta có nhận xét là: $f(x)=-(x-1)g(x)$. Và tới đây ta có thể đẩy được ý tưởng là lấy $(1)+(x-1)\cdot(2)$ vế theo vế. Tuy nhiên ta chú ý rằng do bậc của x ở phương trình thứ nhất là 4 và bậc của y ở phương trình thứ hai là 3, cộng hưởng với y = -x nên để tạo luận lợi cho tính toán ta sẽ hoán đổi giữa x,y để tạo sự cùng bậc cho x, y.

Tức là ta sẽ đổi (1) + (x – 1).(2) thành (1) – (y + 1).(2).

Cụ thể ta sẽ có:

$$x^4+2(3y+1)x^2+\left(5y^2+4y+11\right)x-y^2+10y+2-$$
$$(y+1)\left(y^3+(x-2)y+x^2+x+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^4-y^4+5x^2y+x^2+4xy^2+2xy+10x-y^3+y^2+10y=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(x^3-y^3+xy^2-yx^2+5xy-y^2+x+y+10\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x-y+2)\left(x^2-2x+y^2+3y+5\right)=0.$$

Và tới đây mọi thứ đã dần hiện rõ và ta có thể giải quyết được hệ.

Lời giải :

Nhận xét $y=-1$ không thỏa hệ nên với $y\neq 1$ ta lấy $(1)-(y+1)\cdot(2)$ vế theo vế ta có :

$$x^4+2(3y+1)x^2+\left(5y^2+4y+11\right)x-y^2+10y+2-$$
$$(y+1)\left(y^3+(x-2)y+x^2+x+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^4-y^4+5x^2y+x^2+4xy^2+2xy+10x-y^3+y^2+10y=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(x^3-y^3+xy^2-yx^2+5xy-y^2+x+y+10\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x-y+2)\left(x^2-2x+y^2+3y+5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x-y+2)\underbrace{\left((x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right)}_{P}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-x \\ y=x+2 \end{array}\right. \text{ vì } P>0.$$

⊕ Với $y=-x$ thay vào (2) ta có : $-(x+1)^2(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=1 \\ x=2 \Rightarrow y=-2 \end{array}\right.$

⊕ Với $x=y-2$ thay vào (2) ta có : $(y-1)^2(y+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=-1 \\ y=-4 \Rightarrow x=-6 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là : $(x,y)=\{(-1;1);(-6;-4);(2;-2)\}$.

Bình luận : Như đã nhận định ở phân tích, đây là một hệ rất khó và con đường đi đến lời giải như trong lời giải ở bài toán là một đoạn đường không hề bằng phẳng, nó đòi hỏi rất nhiều kỷ năng. Để chế tạo ra được hệ này tác giả phải rất tinh tế trong "ghép và tạo" các phương trình lại với nhau. Tinh tế ở chỗ đó là chọn bộ nghiệm sao cho "đẹp" để người giải còn phán đoán, còn nếu chọn bộ số quá lẻ thì thật sự là một trở ngại rất lớn cho người giải vì lúc này cần rất nhiều sự bổ trợ ở bên ngoài. Cho nên việc sáng tác là chuyện không hề khó nhưng để cho người giải nắm được đường hướng giải là cả một nghệ thuật. Loại hệ này giải bằng phương án này thường sẽ cần một linh cảm về nghiệm trong mức cho phép được. Tuy hệ trên là một hệ khó nhưng được đánh giá là một hệ rất hay và sau khi bài toán này ra đời dẫn đến một loạt bài toán được chế tác theo phương án này đồng loạt có mặt, tuy vẫn còn hạn chế ở khâu "chế nghiệm" nhưng đó cũng là một nét son mà bài toàn này mang lại.

Ví dụ 19 :

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y-2=0 \quad (1) \\ x^2+(3y+4)y-8=2(2-x-y)(1+xy) \quad (2) \end{cases} (x,y\in \mathbb{R})$

Phân tích: Với hệ này, chúng ta nhìn vào cấu trúc thấy hệ số x^2 trong hai vế phương trình giống nhau nên có lẻ ta sẽ nghỉ việc khử x^2 và ý tưởng này sẽ lập tức phá sản ngay vì chúng ta không cô lập được y theo x để thực hiện phép thế. Phương trình thứ nhất là phương trình bậc hai hai ẩn nhưng lại không có delta chính phương. Mặt khác phương trình thứ hai ta cũng sắp xếp được thành phương trình bậc hai hai ẩn nhưng cũng không có được delta chính phương. Vậy với hướng tách nhân tử trên từng phương trình cũng không giúp được

chúng ta. Vậy chỉ còn một cách cuối cùng là chúng ta sẽ "ghép và tạo" hai phương trình với nhau để thu được một phương trình tách được nhân tử.

Mặt khác do cấu tạo của hệ nên ta không thể "ghép và tạo" theo kiểu $(1)+k\cdot(2)$ như ví dụ 3 được vì tính toán sẽ rất phức tạp. Do đó ta đẩy ý tưởng đi tìm nghiệm của hệ.

Tính chất tìm nghiệm dựa trên hình thức của phương trình (1). Ta biến đổi (1) thành:

$$x^2+y^2-2x+2y-2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=4 \Rightarrow \begin{cases}|x-1|\le 2\\ |y+1|\le 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1\le x\le 3\\ -3\le y\le 1\end{cases}.$$

Vậy ta sẽ thử với các số "đẹp" sau: $0;\pm1;\pm2;\pm3$.

Không quá khó để nhận thấy được hệ không thể có nghiệm $(x,y)=(x;0)$.

⊕ Với $y=1$ ta có hệ $\begin{cases}(x-1)^2=0\\ x^2-1=2(1-x)(1+x)\end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

⊕ Với $y=-1$ ta có hệ $\begin{cases}x^2-2x-3=0\\ x^2-9=2(3-x)(1-x)\end{cases} \Leftrightarrow x=3$

Vậy từ đây ta có được hai nghiệm của phương trình là $(x,y)=\{(1;1);(3;-1)\}$.

Đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;1),B(3;-1)$ là $x+y-2=0$. Vậy mối quan hệ giữa x,y lúc này chính là $x+y-2=0 \Leftrightarrow y=2-x$. Khi đó ta sẽ thử các phép tính sau :

⊕ $f(x)=x^2+y^2-2x+2y-2=x^2+(2-x)^2-2x+2(2-x)-2=2(x^2-4x+3)$

⊕ $g(x)=x^2+(3y+4)y-8-2(2-x-y)(1+xy)$

$=x^2+(10-3x)(2-x)-8=4(x^2-4x+3)$

Vậy từ đây ta có: $2f(x)=g(x)$ và ta sẽ đẩy ý tưởng lấy $2\cdot(1)-(2)$ vế theo vế ta có được :

$$2(x^2+y^2-2x+2y-2)-(x^2+3y^2+2x+6y+4xy-2x^2y-2xy^2-12)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2-6x-2y-4xy+2x^2y+2xy^2+8=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-2)(2xy-y+x-4)=0$$

Và tới đây đường lối giải hệ này xem như đã rõ ràng. Giờ ta đi vào lời giải cho bài toán.

Lời giải :

Hệ phương trình đã cho được biến đổi lại thành hệ :

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y-2=0 & (1) \\ x^2+3y^2+2x+6y+4xy-2x^2y-2xy^2-12=0 & (2) \end{cases}$$

Lấy $2\cdot(1)-(2)$ vế theo vế ta được phương trình :

$$2\left(x^2+y^2-2x+2y-2\right)-\left(x^2+3y^2+2x+6y+4xy-2x^2y-2xy^2-12\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2-6x-2y-4xy+2x^2y+2xy^2+8=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-2)(2xy-y+x-4)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-2=0 \\ 2xy-y+x-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2-x \\ (2x-1)y=4-x \end{array}\right.$$

⊕ Với $y=2-x$ thay vào (1) ta được $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=3 \Rightarrow y=-1 \end{array}\right.$.

⊕ Với $(2x-1)y=4-x$. Nhận xét với $x=\frac{1}{2}$ không thỏa hệ.

Do đó với $x\neq\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{4-x}{2x-1}$, thay vào (1) ta được phương trình :

$$x^2+y^2-2x+2y-2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=4 \Leftrightarrow (x-1)^2+\left(\frac{4-x}{2x-1}+1\right)^2=4$$

$$\Leftrightarrow 2x^4-6x^3-x^2+8x+3=0 \Leftrightarrow \left(x^2-2x-1\right)\left(2x^2-2x-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-1=0 \\ 2x^2-2x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{2} \Rightarrow y=-1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \Rightarrow y=-1-\sqrt{2} \\ x=\frac{1+\sqrt{7}}{2} \Rightarrow y=\frac{-1+\sqrt{7}}{2} \\ x=\frac{1-\sqrt{7}}{2} \Rightarrow y=-\frac{1+\sqrt{7}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là :

$$(x,y)=\left\{\begin{array}{l} (1;1);(3;-1);\left(1+\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right);\left(1-\sqrt{2};-1-\sqrt{2}\right); \\ \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2};\frac{-1+\sqrt{7}}{2}\right);\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2};-\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right) \end{array}\right\}.$$

Bình luận : Bài toán này cũng được xây dựng dựa trên ý tưởng của ví dụ 18. Tuy nhiên nó có tính gần gũi hơn một chút. Một điểm lưu ý cũng là mẹo nhỏ đó là nếu trong hệ có cho phép một phương trình nào đó chặn được vùng nghiệm của x, y thì ta cố gắng thực hiện để kiểm soát vùng nghiệm, điều đó sẽ giúp chúng ta được

nhiều điều lợi. Chỉ trừ khi tác giả đã cố ý gài sẵn nghiệm "không đẹp" thì nó mới vô hiệu hóa. Chứ nếu bài toán mang tính cá nhân cộng hưởng với cộng đồng học sinh chứ không phải mẹo mực quá cá nhân thì ta đều kiểm soát tốt.

Ví dụ 20 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} 8x^3 - y^3 = 63(1) \\ y^2 + 2x^2 = 9 + x - 2y(2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Quan sát hệ này, ta thấy cấu trúc của hệ rất ngắn gọn. Qua cấu trúc của hệ ta nhận thấy ngay được rằng hệ này không thể sử dụng phép thế. Do đó để sử dụng ý tưởng rút nhân tử chung ta sẽ "ghép vào tạo" . Tức là $(1) + k \cdot (2)$ với ưu tiên cái nào bậc cao giữ nguyên.

Cụ thể ta sẽ có : $8x^3 - y^3 - 63 + k \cdot \left(2x^2 + y^2 + 2y - x - 9\right) = 0$ $(*)$.

Hãy để ý phương trình (*)các biến có tính phân ly nên ta có quyền hy vọng (*) được biến đổi trở thành dạng phương trình có tính đối xứng :

$(2x + a)^3 = (y + b)^3$. Như vậy ta cần chọn k, a, b sao cho :

$8x^3 + 2kx^2 - kx - y^3 + ky^2 + 2ky - 63 - 9k = (2x + a)^3 - (y + b)^3$ $(*')$.

Đồng nhất hệ số hai vế của $(*')$ ta có được : $\begin{cases} k = 6a \\ -k = 6a^2 \\ k = -3b \\ 2k = -3b^2 \\ -63 - 9k = a^3 - b^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -6 \\ a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$

Và như vậy ta sẽ đẩy ý tưởng là lấy $(1) - 6 \cdot (2)$ vế theo vế ta sẽ có :

$$8x^3 - y^3 - 63 - 6\left(2x^2 + y^2 + 2y - x - 9\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)^3 = (y + 2)^3 \Leftrightarrow 2x - 1 = y + 2 \Leftrightarrow y = 2x - 3$$

Vậy là ý tưởng giải hệ đã rõ ràng. Giờ ta đi vào lời giải cho bài hê.

Lời giải :

Hệ phương trình đã cho được viết lại thành hệ : $\begin{cases} 8x^3 - y^3 = 63(1) \\ 2x^2 + y^2 + 2y - x - 9 = 0(2) \end{cases}$

Lấy $(1) - 6 \cdot (2)$ vế theo vế ta có được phương trình :

$$8x^3 - y^3 - 63 - 6\left(2y^2 + y^2 + 2y - x - 9\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$$

$\Leftrightarrow (2x-1)^3 = (y+2)^3 \Leftrightarrow 2x-1 = y+2 \Leftrightarrow y = 2x-3$

Thế $y = 2x-3$ vào (2) ta được : $2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -4 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x,y) = \left\{(2;1);\left(-\frac{1}{2};-4\right)\right\}$.

Bình luận: Nhìn vào lời giải ta nhận thấy lời giải gọn và đẹp nhưng để đi lời giải đó chúng ta cần có một kỉ năng và rèn luyện sự quan sát nhất định. Câu hỏi vì sao lại nghỉ đưa về hằng đẳng thức đã được chúng tôi trả lời trong phần phân tích.

IV. HỆ PHƯƠNG TRÌNH GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP ẨN PHỤ HÓA

Đây là một phương pháp cũng thường dùng trong hệ phương trình. Đặc điểm nổi bật của phương pháp này chính là cần phát hiện ra ẩn phụ và xử lí mối liên quan của ẩn phụ với các đại lượng có trong hệ. Vì tính chất của ẩn phụ là phong phú nên đòi hỏi người giải phải có cái nhìn nhạy cảm và rèn luyện sự phản xạ trong từng bài toán. Việc xuất hiện của ẩn phụ cũng có hai khả năng :

⊕ *Khả năng 1: Đại lượng cần ẩn phụ xuất hiện trực tiếp trên hệ.*

⊕ *Khả năng 2 : Đại lượng cần đặt ẩn phụ có được sau khi khai triển bởi các phép biến đổi cơ bản như sử dụng hằng đẳng thức, nhân chia cho một đại lượng nào đó khác 0, tách thêm bớt.*

Chúng ta sẽ gặp các bài toán ẩn phụ trong hai lớp dạng toán quan trọng của hệ đó là :

⊕ *Hệ hữu tỷ.*

⊕ *Hệ có chứa căn thức.*

Các bài toán sử dụng phương pháp ẩn phụ hóa thường sau khi ẩn phụ xong sẽ được chuyển về các loại phương trình và hệ phương trình :

⊕ *Phương trình đẳng cấp, các phương trình tích, các phương trình quen thuộc.*

⊕ *Hệ đối xứng loại 1, loại 2, hệ đẳng cấp, hệ giải bằng phương pháp thế , hệ giải bằng phương pháp nhân tử hóa.*

Bây giờ chúng ta sẽ đi vào quan tâm hai thể loại chính mà chúng ta đã nhắc đến.

1) Ẩn phụ hóa với hệ hữu tỷ

Đối với hệ hữu tỷ để ẩn phụ hóa chúng ta thường dựa vào các đặc tính có trong hệ như sau :

- *Hệ có chứa các chứa các đại lượng mà khi ẩn phụ hóa đưa về hệ đối xưng loại 1, loại 2.*
- *Hệ chứa các đại lượng lặp lại ở cả hai phương trình trong hệ.*

- *Hệ có chứa các đại lượng* $ax+by, ax-by, ax+\frac{b}{x}, ay+\frac{b}{y}, ax+\frac{b}{y}, ay+\frac{b}{x}$.
- *Hệ có được ẩn phụ hóa sau khi thực hiện phép nhân hoặc phép chia cho một đại lượng khác 0. Thường ta hay chia hoặc nhân cho các đại lượng :* $x, y, x^2, y^2, x^3, y^3, ax^n y^m$ ...
- *Một số tính chất cần nhớ đó là :*

• $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$; $y^2+\frac{1}{y^2}=\left(y+\frac{1}{y}\right)^2-2$.

• $x^2-xy+y^2=\frac{3}{4}(x-y)^2+\frac{1}{4}(x+y)^2$;

$x^2+xy+y^2=\frac{3}{4}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x-y)^2$; $x^2+y^2=\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2}$

• $x^3+3xy^2=\frac{(x+y)^3+(x-y)^3}{2}$; $y^3+3x^2y=\frac{(x+y)^3-(x-y)^3}{2}$

• $x^4-y^4=\frac{(x^2-y^2)\left[(x+y)^2+(x-y)^2\right]}{2}$; $x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}=(x+y)\left(1+\frac{1}{xy}\right)$

$(x^2+y^2)\left(1+\frac{1}{xy}\right)^2=\left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\left(y+\frac{1}{x}\right)^2$;

$(x^3+y^3)\left(1+\frac{1}{xy}\right)^3=\left(x+\frac{1}{y}\right)^3+\left(y+\frac{1}{x}\right)^3$

• $x^2-xy+y^2=1 \Leftrightarrow \frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}=1$; $xy=k \Leftrightarrow \frac{1}{x+1}+\frac{k}{y+k}=1$

Ví dụ 1 : Giải hệ phương trình $\begin{cases}\frac{x^2+y^2+7}{x+y+1}=4\\(xy-2x-2y+4)(x+y-4)=6\end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, ngay từ cấu trúc của hệ ta dễ dàng thấy đại lượng cần ẩn phụ hóa đã xuất hiện ở phương trình thứ hai trong hệ.

Thật vậy, ta có :

$(xy-2x-2y+4)(x+y-4)=6 \Leftrightarrow (x-2)(y-2)(x-2+y-2)=6$.

Việc bây giờ của chúng ta sẽ biến đổi phương trình thứ nhất trong hệ sẽ theo hai đại lượng lặp lại có trong phương trình hai.

Phương trình thứ nhất trong hệ được viết lại :

$x^2+y^2+7=4(x+y+1)\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-4y+4-5=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=5$.

Như vậy để giải hệ này ta chỉ cần ẩn phụ : $\begin{cases}a=x-2\\ b=y-2\end{cases}$.

Ta tiến hành giải hệ như sau:

Lời giải :

Điều kiện: $x+y+1\neq 0$

Hệ phương trình đã cho được viết lại thành hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+x+7=4x+4y+4\\ \left(x(y-2)-2(y-2)\right)(x-2+y-2)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2=5\\ (x-2)(y+2)(x-2+y-2)=6\end{cases}\quad (I)$$

Đặt $\begin{cases}a=x-2\\ b=y-2\end{cases}$. Lúc đó hệ (I) trở thành :

$$\begin{cases}a^2+b^2=5\\ ab(a+b)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)^2-2ab=5\\ ab(a+b)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{36}{a^2b^2}-2ab=5\\ a+b=\dfrac{6}{ab}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a^3b^3+5a^2b^2-36=0\\ a+b=\dfrac{6}{ab}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(ab-2)\left(2a^2b^2+9ab+18\right)=0\\ a+b=\dfrac{6}{ab}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\ ab=2\end{cases}.$$

Từ đây ta suy ra a,b là nghiệm của phương trình : $X^2-3X+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}X=1\\ X=2\end{array}\right.$.

⊕ Với $\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=1\\ y-2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=4\end{cases}$.

⊕ Với $\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=2\\ y-2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=3\end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\{(3;4);(4;3)\}$.

Bình luận : Thật tế bản chất của hệ này là hệ đối xứng loại 1 nên ta hoàn toàn có thể sử dụng phương pháp giải của hệ đối xứng loại 1 để giải bài toán này, tuy nhiên hình thức của hệ của chúng ta cũng giúp chúng ta đặt ẩn phụ kiểu khác để đưa về hệ đối xứng loại 1.

Ví dụ 2 : Giải hệ phương trình $\begin{cases}6(3x-2)^2+5(y+4)^2=221\\ xy(3x-4)(y+8)=36\end{cases}\ (x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích :

Với hệ này, cơ bản từ phương trình thứ nhất trong hệ ta đã có thể nghỉ ngay đến ẩn phụ là hai đại lượng $\begin{cases} a=(3x-2)^2 \\ b=(y+4)^2 \end{cases}$.

Giờ chúng ta chỉ cần biễu diễn được các đại lượng ở phương trình thứ hai thông qua ẩn phụ mới là bài toán xem như được giải quyết.

Với phương trình thứ hai đã thực hiện biến đổi như sau :

$(3x^2-4x)(y^2+8y)=36$.

Rõ ràng ta chỉ cần nhân 3 cho hai vế phương trình vừa biến đổi và thêm bớt ta sẽ có được các đại lượng phù hợp với ẩn phụ đã đặt. Thật vậy, ta có :

$(9x^2-12x)(y^2+8y)=108 \Leftrightarrow \left[(3x-2)^2-4\right]\left[(y+4)^2-16\right]=108$.

Vậy lúc đó ta sẽ được hệ : $\begin{cases} 6a+5b=221 \\ (a-4)(b-16)=108 \end{cases}$ và hệ này hoàn toàn giải được bằng phương pháp thế.

Lời giải :

Hệ phương trình đã cho được viết lại thành hệ :

$$\begin{cases} 6(3x-2)^2+5(y+4)^2=221 \\ \left[(3x-2)^2-4\right]\left[(y+4)^2-16\right]=108 \end{cases} \quad (I)$$

Đặt $\begin{cases} a=(3x-2)^2 \\ b=(y+4)^2 \end{cases},(a,b\ge 0)$.

Lúc đó hệ (I) trở thành hệ:

$$\begin{cases} 6a+5b=221 \\ (a-4)(b-16)=108 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{221-6a}{5} \\ (a-4)\left(\dfrac{221-6a}{5}-16\right)=108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{221-6a}{5} \\ (a-4)(141-6a)=540 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{221-6a}{5} \\ 6a^2-165a+1104=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{221-6a}{5} \\ a = 16 \vee a = \dfrac{23}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 16 \\ b = 25 \end{cases} \\ \begin{cases} a = \dfrac{23}{2} \\ b = \dfrac{152}{5} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x-2 = 4 \\ y+4 = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-2 = \sqrt{\dfrac{23}{2}} \\ y+4 = \sqrt{\dfrac{152}{5}} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{4+\sqrt{46}}{3} \\ y = \dfrac{-20+2\sqrt{190}}{5} \end{cases} \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm: $(x,y) = \left\{(2;1);\left(\dfrac{4+\sqrt{46}}{3};\dfrac{-20+2\sqrt{190}}{5}\right)\right\}$.

Bình luận : Bài toán khá cơ bản chỉ cần một chút tinh ý ở phương trình thứ hai ta sẽ đặt ẩn phụ thành công.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y^2 + xy - y = \dfrac{3x}{4} \\ x^3 + 1408y^3 = 16xy^2(x+2y-2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích: Với hệ này từ phương trình thứ nhất trong hệ chúng ta có thể dễ dàng rút được x theo y và thực hiện phép thế. Nhưng do cấu tạo bậc của phương trình thứ hai là khá cao nên phép thế sẽ gây nhiều trở ngại khi tính toán.

Mặt khác cũng từ cấu tạo của hệ ta cũng dễ dang thấy $(x,y) = (0;0)$ luôn thỏa hệ. Do đó ta tính đến xét nếu $x \neq 0, y \neq 0$ thì ta sẽ có được điều gì từ hệ.

Quan sát phương trình thứ nhất ta sẽ có biến đổi sau :

$(x+2y-1)4y = 3x \Leftrightarrow (x+2y-1)\dfrac{4y}{x} = 3$.

Tới đây, ta nhận thấy phương trình thứ hai trong hệ cũng có một đại lượng gần giống với đại lượng $x+2y-1$ nên ta có quyền hy vọng bài toán sẽ giải quyết được nếu đặt $\begin{cases} a = \dfrac{4y}{x} \\ b = x+2y-1 \end{cases}$.

Với ý tưởng này ta sẽ cố gắng biến đổi phương trình hai theo ẩn phụ thử xem.

Ta có phương trình hai được viết lại là : $x^3 + 1408y^3 = 16xy^2(x+2y-1-1)$.

Nếu ta đem chia hai vế phương trình này cho $64y^3$ ta sẽ được phương trình: $\left(\dfrac{x}{4y}\right)^3 + 22 = \dfrac{x}{4y}(x+2y-1-1)$.

Và tới đây mọi thứ đã rõ ràng. Và đi vào giải quyết hệ với một chút điều chỉnh về ẩn phụ để có lợi trong tính toán.

Lời giải : Nhận xét với $(x,y)=(0;0)$ ta có hệ luôn thỏa mãn.

Xét với $x\neq 0, y\neq 0$ ta có hệ được biến đổi trở thành :

$$\begin{cases}(x+2y-1)\dfrac{4y}{x}=3\\ \left(\dfrac{x}{4y}\right)^3+22=\dfrac{x}{4y}(x+2y-1-1)\end{cases}\quad (I)$$

Đặt $\begin{cases}a=\dfrac{x}{4y}\\ b=x+2y-1\end{cases}, a\neq 0$.

Lúc đó hệ (I) được biến đổi thành hệ sau: $\begin{cases}\dfrac{b}{a}=3\\ a^3+22=a(b-1)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=3a\\ a^3+22=a(3a-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3a\\ a^3-3a^2+a+22=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3a\\ (a+2)(a^2-5a+11)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=3a\\ a=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{4y}=-2\\ x+2y-1=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-8y\\ y=\dfrac{5}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{20}{3}\\ y=\dfrac{5}{6}\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x,y)=\left\{(0;0);\left(-\dfrac{20}{3};\dfrac{5}{6}\right)\right\}$.

Bình luận : Với hệ này chỉ cần một chút quan sát và lựa chọn chia đại lượng thích hợp ta sẽ tìm được ẩn phụ. Cái hay của bài toán ẩn phụ là nếu tác giả lựa chọn biểu thức ẩn càng khéo thì sẽ “làm chặt” bài toán càng khó để phát hiện cái gì cần ẩn phụ. Tuy nhiên, tác giả luôn có một “điểm hở” nào đó để ta đi đến việc ẩn phụ được cho bài toán. Như ví dụ sau đây.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x^3y+8xy+3x^2y+12y=5\\ 6xy^2(4x^3+8x-3)+(x-1)(7x^2-13)=54y^2\end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích : Nhìn vào hệ nếu ta không khéo ta sẽ nghỉ đến phép thế. Tuy nhiên, giống ví dụ trước do cấu tạo của phương trình thứ hai trong hệ có bậc khá cao nên phép thế sẽ là không khả thi. Với phương trình thứ nhất ta để ý một chút sẽ thấy vế trái của nó có thể tiến hành tách nhân tử.

Thật vậy, ta có phép biến đổi cho phương trình thứ nhất.

$2x^3y+8xy+3x^2y+12y=5 \Leftrightarrow 2xy\left(x^2+4\right)+3y\left(x^2+4\right)=5$

$\Leftrightarrow y(2x+3)\left(x^2+4\right)=5$

Phương trình thứ hai được biến đổi trở thành phương trình :

$24x^3y^2+48x^2y^2-18xy^2+7x^3-7x^2-13x+13-54y^2=0$.

Với cấu tạo của phương trình thứ nhất khi biến đổi ta có thể nghỉ đến phương án ẩn phụ hóa có hai khả năng xảy ra : $\begin{cases} a=2x+3 \\ b=y\left(x^2+4\right) \end{cases} \vee \begin{cases} a=2xy+3y \\ b=x^2+4 \end{cases}$.

Tuy nhiên do sau khi khai triển phương trình thứ hai ta cảm nhận với việc ẩn phụ hóa $\begin{cases} a=2xy+3y \\ b=x^2+4 \end{cases}$ thì tỉ lệ biến đổi các đại lượng trong phương trình thứ hai sẽ có khả quan hơn.

Mặt khác quan sát phương trình thứ hai ta nhận thấy tổng các hệ số $24+48-18+7-7+13-13-54=0$ nên chắc chắn $x=1$ là nghiệm của phương trình thứ hai. Với nhân xét này ta sẽ tiến hành tách nhân tử phương trình thứ hai ta sẽ được :

$24x^3y^2+48x^2y^2-18xy^2-54y^2+(x-1)\left(7x^2-13\right)=0$

$\Leftrightarrow y^2\left(24x^3+48x^2-18x-54\right)+(x-1)\left(7x^2-13\right)=0$

$\Leftrightarrow y(x-1)\left(24x^2+72x+54\right)+(x-1)\left(7x^2-13\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(24x^2y^2+72xy^2+54y^2+7x^2-13\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(6\left(4x^2y^2+12xy^2+9y^2\right)+7\left(x^2+4\right)-41\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(6(2xy+3y)^2+7\left(x^2+4\right)-41\right)=0$

Và lúc này hệ phương trình đã cho sẽ được viết lại :

$$\begin{cases} (2xy+3y)\left(x^2+4\right)=5 \\ (x-1)\left[6(2xy+y)^2+7\left(x^2+4\right)-41\right]=0 \end{cases}$$

Như vậy hệ đã được giải quyết bằng ẩn phụ hóa.

Lời giải : Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ phương trình :

$$\begin{cases} (2xy+3y)\left(x^2+4\right)=5 \\ y^2\left(24x^3+48x^2-18x-54\right)+(x-1)\left(7x^2-13\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2xy+3y)(x^2+4)=5 \\ (x-1)\left[6(2xy+3y)^2+7(x^2+4)-41\right]=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2xy+3y)(x^2+4)=5 \\ \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ 6(2xy+3y)^2+7(x^2+4)-41=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ (2xy+3y)(x^2+4)=5 \end{cases} \\ \begin{cases} 6(2xy+3y)^2+7(x^2+4)-41=0 \\ (2xy+3y)(x^2+4)=5 \end{cases} \end{array}\right.$$

⊕ Với hệ phương trình : $\begin{cases} x=1 \\ (2xy+3y)(x^2+4)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{5} \end{cases}$

⊕ Với hệ phương trình : $\begin{cases} 6(2xy+3y)^2+7(x^2+4)-41=0 \\ (2xy+3y)(x^2+4)=5 \end{cases} \quad (I)$.

Đặt $\begin{cases} a=2xy+3y \\ b=x^2+4 \end{cases}, b \ge 4$.

Lúc đó hệ (I) trở thành : $\begin{cases} 6a^2+7b-41=0 \\ ab=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\frac{b^2}{25}+7b-41=0 \\ a=\frac{b}{5} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6b^2+175b-1025=0 \\ a=\frac{b}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5 \vee b=-\frac{205}{6} \\ a=\frac{b}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy+3y=1 \\ x^2+4=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2xy+3y=1 \\ x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2xy+3y=1 \\ x=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã có nghiệm là $(x,y)=\left\{(-1;1);\left(1;\frac{1}{5}\right)\right\}$.

Bình luận : Bài toán này có độ khó hơn hai ví dụ trước, để giải nó đòi hỏi sự quan sát kỉ lưỡng, kết hợp được nhiều kỉ năng cần có và lựa chọn ẩn phụ hóa phù hợp với cấu trúc của bài toán.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y\left(x^2+7\right)=x^2-1 \\ x^2y\left(x^2y+5y-9\right)=3\left(5y-3-10y^2\right) \end{cases}$ $\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Phân tích :

Với hệ này, cấu trúc đề cũng đẩy ta đến ý tưởng thế nhưng đúng là quá gian nan khi thay vào phương trình thứ hai trong hệ vì phương trình thu được sau khi thực hiện phép thế lên đến bậc 8. Và quả thật bài toán này không thể thế đơn giản vậy được.

Để hệ như vậy, ta cũng chẳng nhìn nhận được gì, do đó ta chọn phương án khai triển hết các tích có trong hệ ra.

Cụ thể ta sẽ có hệ sau : $\begin{cases} x^2y+7y+1-x^2=0 \\ x^4y^2+5x^2y^2-9x^2y+30y^2-15y+9=0 \end{cases}$

Với hệ này chúng ta nhận thấy cũng chẳng khả quan gì đến việc nhìn ra gì từ hệ. Tuy nhiên cấu trúc của phương trình thứ hai trong hệ cho ta chút linh cảm gì đó về hằng đẳng thức. Mặt khác ta nhận thấy rằng nếu $y=0$ hệ vô nghiệm, thôi thì ta chia toàn bộ phương trình thứ hai cho bậc cao nhất của y để dễ bề quan sát hơn.

Cụ thể ta sẽ có phương trình thứ hai được biến đổi thành :

$$x^4+5x^2-\frac{9x^2}{y}+30-\frac{15}{y}+\frac{9}{y^2}=0.$$

Ba đại lượng $x^4,5x^2,\frac{9}{y^2}$ rất gợi ý cho điều chúng ta linh cảm là đúng và có lẻ hằng đẳng thức ở đây sẽ có dạng $\left(x^2+a+\frac{3}{y}\right)^2$ với a là một hằng số.

Với ý tưởng này ta sẽ đột phá biến đổi phương trình hai như sau :

$$x^4+4+\frac{9}{y^2}+4x^2+\frac{6x^2}{y}+\frac{12}{y}+x^2-\frac{15x^2}{y}-\frac{27}{y}+26=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+2+\frac{3}{y}\right)^2+x^2-\frac{15x^2}{y}-\frac{27}{y}+26=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+2+\frac{3}{y}\right)^2+x^2+2+\frac{3}{y}-\frac{15x^2}{y}-\frac{30}{y}+24=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+2+\frac{3}{y}\right)^2+x^2+2+\frac{3}{y}-5\left(x^2+2\right)\frac{3}{y}+24=0$$

Và lúc này ta nhận ra được cần ẩn phụ hóa như sau : $\begin{cases} a = x^2 + 2 + \dfrac{3}{y} \\ b = \left(x^2 + 2\right)\dfrac{3}{y} \end{cases}$.

Vấn đề bây giờ ta cần biểu diễn được phương trình thứ nhất thông qua các đại lượng ẩn phụ hóa. Để được như vậy ta cần thực hiện phép biến đổi sau cho phương trình thứ nhất trong hệ.

Cụ thể ta có :

$$x^2y + 7y + 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{y} - \frac{x^2}{y} + 7 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + \frac{3}{y} - x^2 \cdot \frac{3}{y} + 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + \frac{3}{y} - \left(x^2 + 2\right)\frac{3}{y} + \frac{6}{y} + 21 = 0 \Leftrightarrow 3x^3 + 6 + \frac{9}{y} - \left(x^2 + 2\right)\frac{3}{y} + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2 + 2 + \frac{3}{y}\right) - \left(x^2 + 2\right)\frac{3}{y} + 15 = 0.$$

Và như vậy việc chọn đại lượng cần ẩn phụ đã xong. Chúng ta đi vào lời giải cho bài toán này.

Lời giải: Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ:

$$\begin{cases} x^2y + 7y + 1 - x^2 = 0 \\ x^4y^2 + 5x^2y^2 - 9x^2y + 30y^2 - 15y + 9 = 0 \end{cases}$$

Nhận thấy hệ không thể có nghiệm $(x, y) = (x; 0)$ nên với $y \neq 0$ ta biến đổi hệ thành :

$$\begin{cases} 3x^2y + 21y + 3 - 3x^2 = 0 \\ x^4y^2 + 5x^2y^2 - 9x^2y + 30y^2 - 15y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + \dfrac{3}{y} - \dfrac{3x^2}{y} + 21 = 0 \\ x^4 + 5x^2 - \dfrac{9x^2}{y} - \dfrac{15}{y} + \dfrac{9}{y^2} + 30 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6 + \dfrac{9}{y} - \dfrac{3x^2}{y} - \dfrac{6}{y} + 15 = 0 \\ x^4 + 4 + \dfrac{9}{y^2} + 4x^2 + \dfrac{6x^2}{y} + \dfrac{12}{y} + x^2 + 2 + \dfrac{3}{y} - 5\left(x^2 + 2\right)\dfrac{3}{y} + 24 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(x^2 + 2 + \dfrac{3}{y}\right) - \left(x^2 + 2\right)\dfrac{3}{y} + 15 = 0 \\ \left(x^2 + 2 + \dfrac{3}{y}\right)^2 + x^2 + 2 + \dfrac{3}{y} - 5\left(x^2 + 2\right)\dfrac{3}{y} + 24 = 0 \end{cases} \quad (I).$$

Đặt $\begin{cases} a = x^2 + 2 + \dfrac{3}{y} \\ b = \left(x^2 + 2\right)\dfrac{3}{y} \end{cases}$.

Lúc đó hệ (I) trở thành hệ :

$$\begin{cases} 3a - b + 15 = 0 \\ a^2 + a - 5b = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a + 15 \\ a^2 - 14a - 51 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a + 15 \\ a = 17 \vee a = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 17 \\ b = 66 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -3 \\ b = 6 \end{cases} \end{array} \right.$$

⊕ Với $\begin{cases} a = 17 \\ b = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 + 2\right) + \dfrac{3}{y} = 17 \\ \left(x^2 + 2\right)\dfrac{3}{y} = 66 \end{cases}$.

Suy ra $x^2 + 2, \dfrac{3}{y}$ là hai nghiệm của phương trình $X^2 - 17X + 66 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 11 \\ X = 6 \end{array} \right.$.

• Với $\begin{cases} x^2 + 2 = 11 \\ \dfrac{3}{y} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array} \right.$.

• Với $\begin{cases} x^2 + 2 = 6 \\ \dfrac{3}{y} = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = \dfrac{3}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{3}{11} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = \dfrac{3}{11} \end{cases} \end{array} \right.$.

⊕ Với $\begin{cases} a = -3 \\ b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 + 2\right) + \dfrac{3}{y} = -3 \\ \left(x^2 + 2\right)\dfrac{3}{y} = 6 \end{cases}$ (hệ vô nghiệm vì $(-3)^2 - 4 \cdot 6 < 0$).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là

$$(x, y) = \left\{ \left(3; \frac{1}{2}\right); \left(-3; \frac{1}{2}\right); \left(2; \frac{11}{3}\right); \left(-2; \frac{11}{3}\right) \right\}.$$

Bình luận: Về bản chất hệ này được xuất phát từ một hệ cơ bản nhưng vì tác giả đã chọn một đại lượng để thay thế quá khéo nên bản chất của hệ đã có sự biến đổi quá lớn. Sự biến đổi này đã làm cho hệ này trở thành một bài hệ rất khó đoán. Chú ý rằng khi từ hệ theo ẩn phụ tìm được nghiệm cho ẩn phụ a,b thì khi chuyển qua đại lượng ban đầu ta lại thu được một hệ đối xứng loại một với hai biến $x^2+2,\frac{3}{y}$.

Ví dụ 6 : Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x^2+1\right)y^4+1=2xy^2\left(y^3-+1\right)\\ xy^2\left(3xy^4-2\right)=xy^4\left(x+2y\right)+1\end{cases}\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

(Thi thử Lương Thế Vinh – Đồng Nai)

Phân tích: Với hệ này, ta nhận thấy các tích trong hệ không giúp chúng ta đánh giá được gì nên ta sẽ khai triển các tích có trong hệ ra hết để có rộng đường quan sát hệ.

Cụ thể ta có: $\begin{cases}x^2y^4+2xy^2+1+y^4-2xy^5=0\\ 3x^2y^6-2xy^2-x^2y^4-2xy^5-1=0\end{cases}$.

Quan sát cả hai phương trình lúc này trong hệ, ta có nhận xét đầu tiên là cả hai phương trình đều chứa hằng đẳng thức $(xy+1)^2$. Do đó ta tiếp tục biến đổi hệ như sau: $\begin{cases}\left(xy^2+1\right)^2+y^4-2xy^5=0\\ 3x^2y^6-2xy^5-\left(xy^2+1\right)^2=0\end{cases}$.

Với hệ này, quan sát ta nhận thấy nếu chia cả hai phương trình trong hệ cho y^4 ta sẽ có được các đại lượng trong cả hai hệ giống nhau.

Thật vậy, ta sẽ có: $\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{y^2}\right)^2+1-2xy=0\\ 3x^2y^2-2xy-\left(x+\dfrac{1}{y^2}\right)^2=0\end{cases}$.

Với hệ này, ẩn phụ hóa như sau: $\begin{cases}a=\left(x+\dfrac{1}{y^2}\right)^2\\ b=xy\end{cases}$.

Lời giải: Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ:

$$\begin{cases}x^2y^4+2xy^2+1+y^4-2xy^5=0\\ 3x^2y^6-2xy^5-2xy^2-x^2y^4-1=0\end{cases}.$$

Nhận thấy nghiệm $(x,y)=(x,0)$ không thỏa hệ nên với $y\neq 0$ ta biến đổi hệ trở thành:

$$\begin{cases}(xy^2+1)^2+y^4-2xy^5=0\\ 3x^2y^6-2xy^5-(xy^2+1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{y^2}\right)^2-2xy+1=0\\ 3x^2y^2-2xy-\left(x+\dfrac{1}{y^2}\right)^2=0\end{cases}\quad(I)$$

Đặt $\begin{cases}a=\left(x+\dfrac{1}{y^2}\right)^2\\ b=xy\end{cases}$, $a\geq 0$. Lúc đó hệ (I) trở thành hệ:

$$\begin{cases}a-2b+1=0\\ 3b^2-2b-a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2b-1\\ 3b^2-4b+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2b-1\\ b=1\vee b=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}\\ \begin{cases}a=-\dfrac{1}{3}\\ b=\dfrac{1}{3}\end{cases}\end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện ta nhận:

$$\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{y^2}\right)^2=1\\ xy=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+x^2)^2=1\\ x=\dfrac{1}{y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2+x-1=0\\ x^2+x+1=0\end{array}\right.\\ x=\dfrac{1}{y}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x-1=0\\ x=\dfrac{1}{y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\vee x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{1}{y}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\\ y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là:

$$(x;y)=\left\{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}.$$

Bình luận: Bài toán này tương đối cơ bản chỉ cần phát hiện ra hằng đẳng thức và lựa chọn chia thích hợp là sẽ có được đại lượng cần ẩn phụ.

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^4}+\dfrac{81}{(y+3)^4}=\dfrac{1}{8} \\ xy\left(x^2+4\right)+x\left(\dfrac{1}{y}-3x\right)=3\left(\dfrac{1}{y^2}+4\right) \end{cases} \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$

Phân tích: Ở hệ này, từ phương trình thứ nhất ta có thể dự đoán có lẻ bài toán hướng đến việc ẩn phụ hóa như sau: $\begin{cases} a=\dfrac{1}{x+1} \\ b=\dfrac{3}{y+3} \end{cases}$. Nhưng với phương trình thứ hai cách sắp xếp các tích như vậy không cho chúng ta nhận thấy mối liên quan nào liên quan đến ẩn phụ mà ta dự đoán. Do đó ta sẽ tiến hành khai triển toàn bộ các tích có trong phương trình thứ hai để dễ phán đoán xem dự đoán của chúng ta có đúng không?

Biến đổi phương trình thứ hai trong hệ ta có được:

$$x^3y+4xy+\frac{x}{y}-3x^2-\frac{3}{y^2}-12=0.$$

Phương trình vừa biến đổi, chúng ta nhận thấy có thể nhóm nhân tử chung nên ta sẽ tiến hành nhóm nhân tử như sau:

$$xy\left(x^2+\frac{1}{y^2}+4\right)-3\left(x^2+\frac{1}{y^2}+4\right)=0 \Leftrightarrow (xy-3)\left(x^2+\frac{1}{y^2}+4\right)=0.$$

Với phương trình tích cuối ta chỉ thu được: $xy=3$.

Áp dụng tính chất $xy=k \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{k}{y+k}=1$ ta sẽ có :

$$xy=3 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1}+\frac{3}{y+3}=1.$$

Thật vậy, ta có : $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{y+3}=1 \Leftrightarrow y+3+3x+3=xy+3x+y+3 \Leftrightarrow xy=3$.

Vậy bài toán đã được giải với việc ẩn phụ hóa như ta dự đoán.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq -3 \\ y \neq 0 \end{cases}$.

Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ phương trình :

$$\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)^4}+\dfrac{81}{(y+3)^4}=1\\ x^3y+4xy+\dfrac{x}{y}-3x^2-\dfrac{3}{y^2}-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)^4}+\dfrac{81}{(y+3)^4}=\dfrac{1}{8}\\ (xy-3)\left(x^2+\dfrac{1}{y^2}+4\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)^4}+\dfrac{81}{(y+3)^4}=\dfrac{1}{8}\\ xy=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)^4}+\dfrac{81}{(y+3)^4}=\dfrac{1}{8}\\ y+3+3(x+1)=(x+1)(y+3)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)^4}+\dfrac{81}{(y+3)^4}=\dfrac{1}{8}\\ \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{y+3}=1\end{cases}(I).$$

Đặt $\begin{cases}a=\dfrac{1}{x+1}\\ b=\dfrac{3}{y+3}\end{cases}$. Lúc đó hệ (I) trở thành :

$$\begin{cases}a^4+b^4=\dfrac{1}{8}\\ a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^4+(a-1)^4=\dfrac{1}{8}\\ b=1-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16a^4-32a^3+48a^2-32a+7=0\\ b=1-a\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2a-1)^2\left(4a^2-4a+7\right)=0\\ b=1-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-1=0\\ b=1-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

vì $4a^2-4a+7=(2a-1)^2+6>0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{3}{y+3}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=2\\ y+3=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là: $(x,y)=(1;3)$.

Bình luận: Bài toán trên nếu không biết sử dụng tính chất $xy=k$ thì sẽ rất khó giải. Vì với phép thế x theo y hoặc ngược lại sẽ cho lời giải rất khó khăn. Các bạn cần chú ý và ghi nhớ vì rõ ràng với bài toán nếu áp dụng được tính chất chỉ ra sẽ cho được lời giải rất gọn gàng và đẹp.

Ví dụ 8 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+xy=4y-1 \\ x+y=\dfrac{y}{x^2+1}+2 \end{cases} \quad (x,y\in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, ta nhận thấy cả hai phương trình trong hệ đều chứa đại lượng x^2+1 và $x+y$. Tuy nhiên đại lượng x^2+1 gắn với đại lượng y qua hình dạng $\dfrac{y}{x^2+1}$, còn đại lượng $x+y$ ở phương trình thứ nhất lại gắn với đại lượng y thông qua hình dạng $y(x+y)$ nên ta nghỉ đến chia hai vế phương trình thứ nhất cho y.

Lúc đó ta sẽ có hệ phương trình đã cho tương đương với hệ : $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+x+y=4 \\ x+y-\dfrac{y}{x^2+1}=2 \end{cases}$.

Và tới đây hình hài đặt ẩn phụ đã quá rõ ràng nên ta đi tiến hành giải hệ.

Lời giải : Nhận thấy $(x,y)=(x;0)$ không thỏa hệ.

Do đó với $y\neq 0$ ta đưa hệ phương trình về hệ : $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+x+y=4 \\ x+y-\dfrac{y}{x^2+1}=2 \end{cases} \quad (I)$

Đặt $\begin{cases} a=\dfrac{x^2+1}{y} \\ b=x+y \end{cases}$.

Lúc đó hệ (I) trở thành: $\begin{cases} a+b=4 \\ b-\dfrac{1}{a}=2 \\ a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ 4-a-\dfrac{1}{a}=2 \\ a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ a^2-2a+1=0 \\ a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}=1 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=3-x \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ y=3-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \vee x=-2 \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases} \end{array} \right.$$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x,y)=\{(1;2);(-2;5)\}$.

Bình luận : Bài toán này khá cơ bản và phép đặt ẩn phụ đã có trước trong hệ.

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y(1+3x^3y)=-2x^6 \\ 1+(10y+1)x^3=-3(3y^2+y+2)x^6 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, quan sát hai phương trình trong hệ ta nhận thấy được ngay rằng nếu chia cả hai vế của hai phương trình cho x^6 ta sẽ được các đại lượng giống nhau đó là $\frac{1}{x^3};y$.

Do đó ta tiến hành biến đổi hệ như sau : $\begin{cases} \frac{y}{x^3}\left(\frac{1}{x^3}+3y\right)=-2 \\ \frac{1}{x^6}+\frac{10y}{x^3}+\frac{1}{x^3}+9y^2+3y+6=0 \end{cases}$.

Để cho hệ được dễ nhìn hơn đặt $u=\frac{1}{x^3}$ để tiến hành biến đổi hệ về hệ sau :

$$\begin{cases} yu(u+3y)=-2 \\ u^2+10yu+u+9y^2+3y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yu(u+3y)=-2 \\ u^2+6yu+9y^2+4yu+u+3y+6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} yu(u+3y)=2 \\ (u+3y)^2+u+3y+4yu+6=0 \end{cases} (*).$$

Không khó để nhận thấy hệ $(*)$ với hai biến $u+3y, yu$ đã biết cách giải.

Do đó ta tiến hành giải hệ như sau .

Lời giải :

Nhận thấy hệ không thể có nghiệm $(x;y)=(0;y)$. Do đó với $x\neq 0$, ta biến đổi hệ thành :

$$\begin{cases} \frac{y}{x^3}\left(\frac{1}{x^3}+3y\right)=-2 \\ \frac{1}{x^6}+\frac{10y}{x^3}+\frac{1}{x^3}+9y^2+3y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yu(u+3y)=-2 \\ u^2+6yu+u+9y^2+3y+6+4yu=0 \end{cases}$$

với $u=\frac{1}{x^3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} yu(u+3y)=-2 \\ u^2+6yu+9y^2+u+3y+4yu+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yu(u+3y)=-2 \\ (u+3y)^2+u+3y+4yu+6=0 \end{cases} (I)$$

Đặt $\begin{cases} a = u + 3y \\ b = yu \end{cases}$.

Lúc đó hệ (I) trở thành hệ :

$$\begin{cases} ab = -2 \\ a^2 + a + 4b + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{2}{a} \\ a^2 + a - \dfrac{8}{a} + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{2}{a} \\ a^3 + a^2 + 6a - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{2}{a} \\ (a-1)\left((a+1)^2 + 7\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + 3y = 1 \\ yu = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 - 3y \\ (1-3y)y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 - 3y \\ 3y^2 - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + 3y = 1 \\ y = 1 \vee y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = -2 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 3 \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{1}{x^3} = -2 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{x^3} = 3 \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y) = \left\{\left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}};1\right);\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}};-\dfrac{2}{3}\right)\right\}$.

Bình luận: Việc phát hiện ra ẩn phụ của bài toán không quá khó. Tuy nhiên, đây là một dạng hệ rất thường gặp.

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases} -2\left(x^2 + y^2\right)^2 (x + y) = 25xy \\ 4\left(x^4 + y^4\right)\left(x^3 + y^3\right) = 119x^2y^2 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích :

Không quá khó để nhận định đây là hệ đối xứng loại 1. Tuy nhiên nếu áp dụng cách giải của hệ đối xứng loại 1 vào hệ này thì ta phải xử lí phương trình đại số bậc khá cao và tính toán sẽ rất vất vả. Do đó ta cần phải biến đổi hệ này sau cho có thể ẩn phụ hóa để giảm bậc của phương trình xuống.

Không khó để nhận định được rằng hệ này luôn có nghiệm $(x,y) = (0;0)$.

Với $xy \neq 0$ ta biến đổi hệ về hệ sau :

$$\begin{cases}\dfrac{\left(x^2+y^2\right)^2}{xy}(x+y)=-\dfrac{25}{2}\\ \left(\dfrac{x^4+y^4}{x^2y^2}\right)\left(x^3+y^3\right)=\dfrac{119}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)\left(x^2+y^2\right)(x+y)=-\dfrac{25}{2}\\ \left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)\left(x^3+y^3\right)=\dfrac{119}{4}\end{cases}$$

Với hệ mới ta nhận thấy các đại lượng x^2+y^2, x^3+y^3 có thể biểu diễn theo $x+y$, còn đại lượng $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}$ thì có thể biểu diễn theo đại lượng $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ nên ta sẽ ẩn phụ hóa $\begin{cases}a=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\\ b=x+y\end{cases}$.

Khi đó ta sẽ có :

$\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}=\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2-2=a^2-2$, $x^2+y^2=b^2-2xy, x^3+y^3=b^3-3bxy$.

Và giờ ta cần biểu diễn được xy theo hai ẩn a,b nữa là xem như phép đặt ẩn phụ thành công.

Điều này lại không khó vì từ

$$\begin{cases}a=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}\\ x^2+y^2=b^2-2xy\end{cases}\Rightarrow xy\cdot a=b^2-2xy\Leftrightarrow xy=\dfrac{b^2}{a+2}.$$

Kết hợp với các bước phân tích này ta sẽ đưa hệ về hệ sau :

$$\begin{cases}a\left(b^2-\dfrac{2b^2}{a+2}\right)b=-\dfrac{25}{2}\\ \left(a^2-2\right)\left(b^3-\dfrac{3b^2}{a+2}\right)=\dfrac{119}{4}\end{cases}.$$

Hệ này khá cơ bản chỉ cần sử dụng phép thế. Vậy xem như bài toán được giải quyết.

Lời giải : Nhận xét (x ; y) = (0 ; 0) luôn thỏa hệ.

Xét $xy\neq 0$ ta biến đổi hệ đã cho trở thành hệ sau :

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)\left(x^2+y^2\right)(x+y)=-\dfrac{25}{2}\\ \left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)\left(x^3+y^3\right)=\dfrac{119}{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)\left[(x+y)^2-2xy\right](x+y)=-\dfrac{25}{2} \\ \left[\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2-2\right]\left[(x+y)^3-3xy(x+y)\right]=\dfrac{119}{4} \end{cases} \quad (I)$$

Đặt $\begin{cases} a=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \\ b=x+y \end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases} a=\dfrac{x^2+y^2}{xy} \\ b^2=x^2+y^2+2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy\cdot a=b^2-2xy \\ b^2-2xy=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow xy=\dfrac{b^2}{a+2}$.

Lúc đó hệ (I) trở thành:

$$\begin{cases} a\left(b^2-\dfrac{2b^2}{a+2}\right)b=-\dfrac{25}{2} \\ \left(a^2-2\right)\left(b^3-\dfrac{3b^3}{a+2}\right)=\dfrac{119}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2b^3=-25(a+2) \\ 4b^3\left(a^2-2\right)(a-1)=119(a+2) \end{cases}$$

Nhân chéo hai vế của hai phương trình cho nhau ta được phương trình:

$$119a^2b^3(a+2)=-50(a+2)\left(a^2-2\right)(a-1) \Leftrightarrow 119a^2=-50\left(a^2-2\right)(a-1)$$

$$\Leftrightarrow 50a^3+69a^2-100a+100=0 \Leftrightarrow (2a+5)\left(25a^2-28a+20\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2a+5=0 \Leftrightarrow a=-\frac{5}{2} \Rightarrow b=1 \text{ vì } 25a^2-28a+20>0$$

Với $\begin{cases} a=-\dfrac{5}{2} \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=-\dfrac{5}{2} \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+2y^2=-5xy \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-2xy)=-5xy \\ x+y=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-x)=-2 \\ y=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \\ y=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm: $(x,y)=\{(0;0);(-1;2);(2;-1)\}$.

Bình luận: Bài toán này về bản chất thì không khó. Nhưng nếu không tinh tế và máy móc thì sẽ trở thành bài hệ khó với những phép tính đại số rất khó chịu. Thông qua bài hệ này, chúng tôi muốn nhắn gửi đến các bạn đối với một hệ càng quen thuộc ta càng phải tinh tế suy nghỉ xem việc nào có lợi nhất cho bài toán.

Ví dụ 11: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^2=\dfrac{25}{2} \\ 10-x-y=\dfrac{3}{y}+\dfrac{1}{x} \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích:

Với hệ này, nhìn nhận từ tính chất chúng tôi đã lưu ý trước chúng ta nhận thấy phương trình thứ nhất trong hệ được biểu diễn dưới dạng phương trình: $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^2=\dfrac{25}{2}$.

Thật vậy ta có :

$$\left(x^2+y^2\right)\left(1+\frac{1}{xy}\right)^2=\left(x^2+y^2\right)\left(1+\frac{2}{xy}+\frac{1}{x^2y^2}\right)$$

$$=x^2+2\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}+y^2+2\frac{y}{x}+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\left(y+\frac{1}{x}\right)^2$$

Và như vậy, có khả năng hệ này sẽ giải quyết được nếu ẩn phụ hóa: $\begin{cases} a=x+\dfrac{1}{y} \\ b=y+\dfrac{1}{x} \end{cases}$.

Việc bây giờ chúng ta sẽ cố gắng biến đổi phương trình thứ hai theo hai ẩn phụ đó. Cấu trúc của phương trình thứ hai để như vậy cũng chẳng giúp cho được gì, thôi thi ta khai triển quy đồng hết ra xem sao ?

Cụ thể ta có :

$$10-3x-y=\frac{3}{y}+\frac{1}{x}\Leftrightarrow xy(10-3x-y)=3x+y\Leftrightarrow 3x^2y+xy^2+3x+y=10xy$$

$$\Leftrightarrow 3x+y+\frac{3}{y}+\frac{1}{x}=10\Leftrightarrow 3\left(x+\frac{1}{y}\right)+y+\frac{1}{x}=10.$$

Và như vậy việc ẩn phụ hóa đã xong và giờ ta đi giải quyết hệ.

Lời giải :

Điều kiện : $xy\neq 0$.

Hệ phương trình đã cho được viết lại thành hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^2=\dfrac{25}{2} \\ 3x^2y+3x+xy^2+y=10xy \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^2=\dfrac{25}{2} \\ 3x+\dfrac{3}{y}+y+\dfrac{1}{x}=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^2=\dfrac{25}{2} \\ 3\left(x+\dfrac{1}{y}\right)+y+\dfrac{1}{x}=10 \end{cases} \quad (I)$$

Đặt $\begin{cases} a=x+\dfrac{1}{y} \\ b=y+\dfrac{1}{x} \end{cases}$.

Lúc đó hệ (I) trở thành hệ sau : $\begin{cases} a^2+b^2=\dfrac{25}{2} \\ 3a+b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+(10-3a)^2=\dfrac{25}{2} \\ b=10-3a \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10a^2-60a+\dfrac{175}{2}=0 \\ b=10-3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5}{2} \vee a=\dfrac{7}{2} \\ b=10-3a \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\dfrac{5}{2} \\ b=\dfrac{5}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a=\dfrac{7}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. .$$

$\oplus$ Với $\begin{cases} a=\dfrac{5}{2} \\ b=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{2} \\ y+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy+2=5y \\ 2xy+2=5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ 2x^2-5x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

$\oplus$ Với $\begin{cases} a=\dfrac{7}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{2} \\ y+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy+2=7y \\ 2xy+2=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7y \\ 14y^2+7y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{-7+\sqrt{161}}{28} \\ y=\dfrac{7-\sqrt{161}}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{-7-\sqrt{161}}{28} \\ y=\dfrac{7+\sqrt{161}}{4} \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là:

$$(x,y)=\left\{(2;2);\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{-7+\sqrt{161}}{28};\frac{7-\sqrt{161}}{4}\right);\left(\frac{-7-\sqrt{161}}{28};\frac{7+\sqrt{161}}{4}\right)\right\}.$$

Bình luận: Bài toán này nếu nhớ được tính chất thì sẽ phát hiện ẩn phụ nhanh, còn nếu không thì ta cứ khai triển ra cũng sẽ thấy được điều đó nhưng sẽ khó phán đoán hơn nếu biết tính chất của biểu thức đặc biệt đó.

Ví dụ 12: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y\left(x^2+2x+2\right)=x\left(y^2+6\right) \\ (y-1)\left(x^2+2x+7\right)=(x+1)\left(y^2+1\right) \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích :

Với hệ này, ngay từ hệ ta quan sát được trong cả hai phương trình đều chứa đại lượng $x+1$, còn biến y không có gì đặc biệt nên ta sẽ cố định biến y như trong đề bài và chọn ẩn phụ hóa đại lượng $t=x+1$.

Biến đổi hệ đã cho thành hệ :

$$\begin{cases} y\left((x+1)^2+1\right)=x\left(y^2+6\right) \\ (y-1)\left((x+1)^2+6\right)=(x+1)\left(y^2+1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)\left(y^2+6\right)=y\left(t^2+1\right) \\ (y-1)\left(t^2+6\right)=t\left(y^2+1\right) \end{cases}$$

Với hệ cuối cùng ta nhận thấy hệ sẽ luôn đúng nếu $t=y$ vì bản chất của hệ chính là hệ đối xứng loại 2. Do đó ta tiến hành phương pháp cơ bản của loại hệ này để bắt nhân tử chung $t-y$ bằng cách lấy hai phương trình trừ nhau vế theo vế ta có :

$$(t-1)\left(y^2+6\right)-(y-1)\left(t^2+6\right)=y\left(t^2+1\right)-t\left(y^2+1\right).$$

$$\Leftrightarrow (t-y)(t+y-2ty+7)=0$$

Nhìn vào tích biến đổi cuối cùng, ta nghỉ tiếp đến một phương án cũng thường dùng trong hệ đối xứng loại 2, đó là cộng vế theo vế hai phương trình với nhau. Thực hiện phép cộng này ta có phương trình :

$$(t-1)\left(y^2+6\right)+(y-1)\left(t^2+6\right)=y\left(t^2+1\right)+t\left(y^2+1\right)\Leftrightarrow\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Với các bước phân tích ta nhận định rằng từ hệ đã ẩn phụ hóa ta sẽ tách được hai hệ mới sau :

$$\begin{cases} t-y=0 \\ (y-1)\left(t^2+6\right)=t\left(y^2+1\right) \end{cases}(I)\vee\begin{cases} t+y-2ty+7=0 \\ \left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{2} \end{cases}(II).$$

Nhận xét hệ (I) rất đơn giản, hệ (II) đối xứng loại 1. Vậy xem như ta đã tìm được hướng giải quyết cho hệ ban đầu.

Lời giải : Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành :

$$\begin{cases} y\left((x+1)^2+1\right)=x\left(y^2+6\right) \\ (y-1)\left((x+1)^2+6\right)=(x+1)\left(y^2+1\right) \end{cases}.$$

Đặt $t=x+1$, hệ trở thành : $\begin{cases} (t-1)\left(y^2+6\right)=y\left(t^2+1\right)(1) \\ (y-1)\left(t^2+6\right)=t\left(y^2+1\right)(2) \end{cases}.$

Lấy $(1)-(2)$ vế theo vế và thu gọn ta có được phương trình :

$(t-y)(t+y-2ty+7)=0$.

Lấy $(1)+(2)$ vế theo vế và thu gọn ta có được phương trình :

$$\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

⊕ Với $t=y$ thay vào (2) ta có phương trình:

$$t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2=y \\ t=3=y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1=2 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1=3 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right..$$

⊕ Kết hợp $t+y-2ty+7=0$ và $\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} t+y-2ty+7=0 \\ \left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+y-2ty+7=0 \\ t^2+y^2-5(t+y)+12=0 \end{cases} \text{(III)}$$

Đặt $\begin{cases} S=t+y \\ P=ty \end{cases}, S^2-4P\geq 0$.

Lúc đó hệ (III) trở thành $\begin{cases} S-2P+7=0 \\ S^2-5S-2P=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2P=S+7 \\ S^2-6S+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S=1 \\ P=4 \end{cases} \\ \begin{cases} S=5 \\ P=6 \end{cases} \end{array}\right..$

Đối chiếu điều kiện ta nhận :

$$\begin{cases}S=5\\P=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t+y=5\\ty=6\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t=3\\y=2\end{cases}\\\begin{cases}t=2\\y=3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1=3\\y=2\end{cases}\\\begin{cases}x+1=2\\y=3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}\\\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là : $(x,y)=\{(1;2);(2;3);(2;2);(1;3)\}$.

Bình luận: Tuy phép ẩn phụ hóa trong bài toán này ngay lúc đầu không được nét lắm. Nhưng nhìn toàn diện hệ này, thì là một hệ rất hay vì đã thu trong nó cả hai loại hệ cơ bản. Một hệ có tính kiểm tra kiến thức cơ bản khá tốt.

Ví dụ 13: Giải hệ phương trình $\begin{cases}(2x-3y)(10-7x-12y)=2\\(5x^2+45y^2-6)(2x-3y)^2=-1\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Cấu trúc bài hệ quá ngắn gọn, thông tin bài hệ cho chúng ta cũng ngắn gọn như cái đề của bài toán, đó chính là cả hai phương trình đều chứa $2x-3y$. Thôi thì ta tìm cách tách các đại lượng còn lại theo đại lượng này thử xem. Trước khi tách, chúng ta cần chắn chắn định vị rằng các đại lượng đó không thể tách hết được theo đại lượng mà ta đã thấy (tức là còn dư một điều gì đó !)

Ở phương trình thứ nhất trong hệ đại lượng $2x-3y$ chỉ là bậc nhất nên ta sẽ tách: $10-7x-12y=10-2(2x-3y)-3(x+6y)$.

Vậy sau khi tách xong đại lượng $2x-3y$ ở phương trình thứ nhất ta thấy còn dư đại lượng $x+6y$.

Với phương trình thứ hai trong hệ đại lượng $2x-3y$ là bậc 2 nên ta sẽ tách :

$$5x^2+45y^2-6=x^2+12xy+36y^2+4x^2-12xy+9y^2-6$$
$$=(x+6y)^2+(2x-3y)^2-6$$

Vậy qua hai lần tách ta nhận thấy trong hệ chứa hai đại lượng $x+6y, 2x-3y$.

Do đó ta viết lại hệ như sau : $\begin{cases}(2x-3y)\big(10-2(2x-3y)-3(x+6y)\big)=2\\\big((x+6y)^2+(2x-3y)^2-6\big)(2x-3y)^2=-1\end{cases}$.

Tới đây ta có thể ẩn phụ hóa

$\begin{cases}a=x+6y\\b=2x-3y\end{cases}$ để biến đổi hệ thành : $\begin{cases}a(10-2a-3b)=2\\(a^2+b^2-6)b^2=-1\end{cases}$.

Hệ này vẫn giải được bằng phép thế, tuy nhiên ta sẽ thu được phương trình bậc 6 và tính toán vẫn rắc rối. Tuy nhiên nếu ta biến đổi hệ trở thành hệ sau thì sẽ có chuyển biến rõ ràng. Thật vậy, ta có :

$$\begin{cases}(2x-3y)(10-2(2x-3y)-3(x+6y))=2\\((x+6y)^2+(2x-3y)^2-6)(2x-3y)^2=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3(x+6y)+2\left(2x-3y+\dfrac{1}{2x-3y}\right)=10\\(x+6y)^2+(2x-3y)^2+\dfrac{1}{(2x-3y)^2}=6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3(x+6y)+2\left(2x-3y+\dfrac{1}{2x-3y}\right)=10\\(x+6y)^2+\left(2x-3y+\dfrac{1}{2x-3y}\right)^2=8\end{cases}.$$

Rõ ràng với hệ cuối với phép ẩn phụ : $\begin{cases}a=x+6y\\b=2x-3y+\dfrac{1}{2x-3y}\end{cases}$ sẽ cho hệ

$\begin{cases}3a+2b=10\\a^2+b^2=8\end{cases}$ và không có gì tốt hơn được nữa !.

Vậy ta đi vào lời giải cho bài toán.

Lời giải : Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ

$$\begin{cases}(2x-3y)(10-2(2x-3y)-3(x+6y))=1\\((x+6y)^2+(2x-3y)^2-6)(2x-3y)^2=-1\end{cases}(*).$$

Nhận xét với $2x-3y=0$ không thỏa hệ nên với $2x-3y\neq 0$ ta biến đổi $(*)$ thành hệ :

$$\begin{cases}3(x+6y)+2\left(2x-3y+\dfrac{1}{2x-3y}\right)=10\\(x+6y)^2+(2x-3y)^2+\dfrac{1}{(2x-3y)^2}=6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3(x+6y)+2\left(2x-3y+\dfrac{1}{2x-3y}\right)=10\\(x+6y)^2+\left(2x-3y+\dfrac{1}{2x-3y}\right)^2=8\end{cases}(I).$$

Đặt $\begin{cases} a = x + 6y \\ b = 2x - 3y + \dfrac{1}{2x - 3y} \end{cases}, |b| \ge 2$. Lúc đó hệ (*) trở thành hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 3a + 2b = 10 \\ a^2 + b^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{10 - 3a}{2} \\ 13a^2 - 60a + 68 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{10 - 3a}{2} \\ a = 2 \vee a = \dfrac{34}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a = \dfrac{34}{13} \\ b = \dfrac{14}{13} \end{cases} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta nhận:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 6y = 2 \\ 2x - 3y + \dfrac{1}{2x - 3y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 6y \\ (2x - 3y - 1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 6y = 2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{5} \\ y = \dfrac{1}{5} \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $(x, y) = \left(\dfrac{4}{5}; \dfrac{1}{5}\right)$.

Bình luận : Đây là một dạng hệ khá quen thuộc, tuy nhiên đã được biến tấu che đậy khá nhiều. Tuy vậy, bài toán vẫn có điểm hở để chúng ta nhận ra vấn đề để tháo gỡ toàn bộ hệ. Bài toán trên còn có thể được giải bằng phép thế như sau :

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta rút được : $\dfrac{2}{2x - 3y} = 10 - 7x - 12y$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta sẽ có được phương trình :

$$4\left(5x^2 + 45y^2 - 6\right) = -(7x + 12y - 10)^2$$

$$\Leftrightarrow 69x^2 + 324y^2 + 168xy - 140x - 240y + 76 = 0.$$

Kết hợp với phương trình thứ nhất trong hệ ta sẽ được hệ phương trình :

$$\begin{cases} 14x^2 - 36y^2 + 3xy - 20x + 30y + 2 = 0 \\ 69x^2 + 324y^2 + 168xy - 140x - 240y + 76 = 0 \end{cases}$$

Đây là hệ tổng quát bậc hai hai ẩn mà chúng tôi đã trình bày phương pháp giải. Các bạn hãy thử giải lại xem nhé! Và hầu hết các bài toán thuộc thể loại hệ này đều có thể đưa về hệ bậc hai dạng tổng quát.

Ví dụ 14 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{4}{(x+2y+1)^2} - \dfrac{8}{(x+y+2)^3} = 3 \\ x(x+3) + y(2y+5) = -3xy \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Phân tích :

Với hệ này, phương trình thứ nhất gợi ý ngay được ẩn phụ nhưng ta cần xét đến hệ số của tử có trong phân số không đi "đôi" được với số mũ của đại lượng dưới mẫu nên có thể bài toán nhắm đến ẩn phụ hóa hai thành phần sau : $\begin{cases} a = x + y + 2 \\ b = x + 2y + 1 \end{cases}$.

Quan sát phương trình thứ hai trong hệ khi khai triển có dạng bậc hai hai ẩn nên ta xét tới trường hợp có thể tách nhân tử liên quan đến ẩn phụ không ?

Cụ thể ta có : $x(x+3) + y(2y+5) = -3xy \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 + 3x + 5y + 3xy = 0$.

Thật không may là phương trình này không có delta chính phương. Vậy bây giờ có lẻ con đường từ ẩn phụ hóa ta tìm ra mối quan hệ giữa x, y với a, b thế vào là con đường tự nhiên nhất. Tuy vậy, ta vẫn cảm thấy nếu nhìn vào đại lượng hai ẩn phụ ta thấy tích của chúng có các hệ số của x^2, y^2, x, y, xy rất giống với biểu thức bậc hai kia. Vậy tại sao ta không thử một phép thử lấy tích số của chúng xem sao ?

Ta thử phép tính sau : $(x+2y+1)(x+y+2) = x^2 + 2y^2 + 3x + 5y + 3xy + 2$.

Và như vậy ứng với phép thử ta sẽ có sự biến đổi cho phương trình thứ hai như sau :

$$x^2 + 2y^2 + 3x + 5y + 3xy = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 + 3x + 5y + 3xy + 2 = 2$$

$$\Leftrightarrow (x+2y+1)(x+y+2) = 2.$$

Tới đây hệ đã rõ quá rõ ràng về việc ẩn phụ hóa. Do đó ta đi vào giải quyết bài toán.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x + y + 2 \neq 0 \\ x + 2y + 1 \neq 0 \end{cases}$.

Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{2}{(x+2y+1)^2} - \dfrac{8}{(x+y+2)^3} = 3 \\ x^2 + 2y^2 + 3xy + 3x + 5y + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{(x+2y+1)^2} - \dfrac{8}{(x+y+2)^3} = 3 \\ (x+y+2)(x+2y+1) = 2 \end{cases} \quad (I)$$

Đặt $\begin{cases} a = x + 2y + 1 \\ b = x + y + 1 \end{cases}$, $a, b \neq 0$. Lúc đó hệ (I) trở thành hệ :

$$\begin{cases}\dfrac{4}{b^2}-\dfrac{8}{a^3}=3\\ ab=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-\dfrac{8}{a^3}=3\\ b=\dfrac{2}{a}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^5-3a^3-8=0\\ b=\dfrac{2}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-2)\left(a^4+2a^3+a^2+2a+4\right)=0\\ b=\dfrac{2}{a}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a-2)\underbrace{\left(a^2\left(a^2+2a+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}(a+2)^2+2\right)}_{P}=0\\ b=\dfrac{2}{a}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y+1=2\\ x+y+1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}\text{ vì } P>0,\forall a\neq 0.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là (x;y) = (-1;1).

Bình luận : Với bài toán này, như chúng tôi đã phân tích sau khi ẩn phụ hóa xong thì ta có thể giải hệ sau : $\begin{cases}a=x+2y+1\\ b=x+y+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2b-a-1\\ y=a-b\end{cases}$, rồi thay vào phương trình thứ hai trong hệ khai triển và thu gọn ta cũng sẽ được $ab=2$. Cách này tuy tư nhiên nhưng mặt hạn chế của nó là phải tính toán khá nhiều. Mặt khác các bạn lưu ý khi tác giả nào đó muốn chế bài toán theo kiểu này và tạo bậc cao như thế, thì do yếu tố tính đến sau khi thế phải giải phương trình bậc cao nên có khả năng ở phương trình thứ hai là dạng tổng bậc nhất cho a,b ở dạng $ma+nb+c=0$, nếu ở dạng này thì khá đơn giản để tách. Còn nếu muốn sử dụng $ab=k$ thì tác giả buộc phải ghép chúng lại với nhau bằng tích khi đó chúng ta chỉ cần để ý tới các hệ số có trong phương trình thứ hai liên kết với tích hai ẩn phụ ta sẽ tìm ra kết quả. Hạn chế của loại hệ này là sẽ tạo bậc khá cao nên hoặc tác giả ngụ ý đưa về hệ đối xứng quen thuộc thì với hai suy nghỉ tư duy trên, chúng ta vẫn giải quyết tốt. Còn nếu tác giả muốn đưa về phương bậc cao thì cần hạn chế cách xây dựng ở phương trình hai. Do đó nếu gặp loại toán nào tương tự như bài hệ này thì ta cứ theo hai chiều tư duy đã chỉ ra để giải quyết như vậy vẫn cho lời giải tự nhiên và gọn.

Ví dụ 15: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}9xy^3-24y^2+\left(27x^2+40\right)y+3x-16=0\,(1)\\ y^2+(9x-10)y+3(x+3)=0\,(2)\end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{R})$$

(Thi thử toanphothong.vn)

Phân tích :

Với hệ này, nhìn vào hình thức của hệ chúng ta chưa thấy được gì hướng đi của bài toán cả. Tuy phương trình thứ hai trong hệ là một phương trình bậc hai hai ẩn nhưng kiểm tra ta biết được phương trình này không có delta chính phương. Với phương trình thứ nhất của hệ ta vẫn có thể xem đó là phương trình bậc hai theo biến x coi y là tham số và thật không may phương trình này cũng không có delta chính phương.

Vì vậy, ta tiến tới suy nghĩ khai triển hết các tích trong cả hai phương trình để quan sát xem thế nào ?

Lúc đó ta có hệ : $\begin{cases} 9xy^3 - 24y^2 + 27x^2y + 40y + 3x - 16 = 0 \\ y^2 + 9xy - 10y + 3x + 9 = 0 \end{cases}$

Quan sát hệ này ta nhận thấy cả hai phương trình có liên quan đến đại lượng $y^2 + 3x$ nên suy nghĩ đầu tiên ta đưa hệ về hệ sau :

$$\begin{cases} 9xy\left(y^2 + 3x\right) - 24y^2 + 40y + 3x - 16 = 0 \\ y^2 + 3x + 9xy - 10y + 9 = 0 \end{cases}.$$

Ở bước tách thứ nhất ta thấy phương trình thứ nhất trong hệ vẫn có thể có thể nhóm tiếp thêm đại lượng $y^2 + 3x$ bằng cách thêm bớt cho y^2.Do đó ta tiến hành tách tiếp như sau :

$$\begin{cases} 9xy\left(y^2 + 3x\right) + y^2 + 3x - 25y^2 + 40y - 16 = 0 \\ y^2 + 3x + 9xy - 10y + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(y^2 + 3x\right)(9xy + 1) - (5y - 4)^2 = 0 \\ y^2 + 3x + 9xy - 10y + 9 = 0 \end{cases}.$$

Tới phép biến đổi này ta lại nhận thấy cả hai phương trình trong hệ đều chứa ba đại lượng chung đó là $y^2 + 3x; 9xy + 1, 5y - 4$.

Thật vậy, ta biến đổi tiếp hệ ta sẽ có : $\begin{cases} \left(y^2 + 3x\right)(9xy + 1) = (5y - 4)^2 \\ y^2 + 3x + 9xy + 1 - 2(5y - 4) = 0 \end{cases}$. Và tới hệ này nếu ta xem ẩn phụ hóa là $\begin{cases} a = y^2 + 3x \\ b = 9xy + 1 \end{cases}$ ta sẽ được hệ đối xứng loại 1 với hai ẩn a, b và xem $5y - 4$ là tham số hoặc có thể ẩn phụ hóa luôn $\begin{cases} a = y^2 + 3x \\ b = 9xy + 1 \\ c = 5y - 4 \end{cases}$.

Cách tiếp cận thứ hai là ta thấy cả hai phương trình trong hệ đều chứa $3x$ nên ta nghỉ tới phép rút thế hoặc trừ vế theo vế hai phương trình cho nhau ta sẽ có phương trình :

$$9xy^3 - 24y^2 + 27x^2y + 40y - y^2 - 9xy + 10y - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9xy\left(y^2 + 3x\right) - 9xy - 25y^2 + 50y - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9xy\left(y^2 + 3x - 1\right) = 25\left(y - 1\right)^2.$$

Mặt khác với phương trình thứ hai ta sẽ có : $y^2 + 3x - 1 + 9xy = 10\left(y - 1\right)$.

Và lúc này ta sẽ có hệ : $\begin{cases} 9xy\left(y^2 + 3x - 1\right) = 25\left(y - 1\right)^2 \\ y^2 + 3x - 1 + 9xy = 10\left(y - 1\right) \end{cases}$. Và ta có thể ẩn phụ hóa: $\begin{cases} a = 9xy \\ b = y^2 + 3x - 1 \end{cases}$ và xem $y - 1$ là tham số hoặc có thể ẩn phụ hóa luôn

$$\begin{cases} a = 9xy \\ b = y^2 + 3x - 1. \\ c = y - 1 \end{cases}$$

Ngoài ẩn phụ hóa thì trong cả hai trường hợp ta vẫn có thể giải bằng phương thế nhân thêm đại lượng và rút thế. Thật vậy :

⊕ Trường hợp 1 : $\begin{cases} \left(y^2 + 3x\right)\left(9xy + 1\right) = \left(5y - 4\right)^2 \\ y^2 + 3x + 9xy + 1 = 2\left(5y - 4\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(y^2 + 3x\right)\left(9xy + 1\right) = \left(5y - 4\right)^2 \\ \left(y^2 + 3x + 9xy + 1\right)\left(9xy + 1\right) = 2\left(5y - 4\right)\left(9xy + 1\right) \end{cases}$$

Từ đây ta suy ra : $\left(9xy + 1\right)^2 - 2\left(5y - 4\right)\left(9xy + 1\right) + \left(5y - 4\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow 9xy + 1 = 5y - 4 \Leftrightarrow xy = \frac{5\left(y - 1\right)}{9}.$$

Và thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta sẽ được phương trình theo biến y.

⊕ Trường hợp 2: $\begin{cases} 9xy\left(y^2 + 3x - 1\right) = 25\left(y - 1\right)^2 \\ y^2 + 3x - 1 + 9xy = 10\left(y - 1\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9xy\left(y^2 + 3x + 1\right) = 25\left(y - 1\right)^2 \\ \left(y^2 + 3x - 1 + 9xy\right)9xy = 90\left(y - 1\right)xy \end{cases}$$

Từ đây ta suy ra :

$$25(y-1)^2-90(y-1)xy+81x^2y^2=0 \Leftrightarrow 5(y-1)=9xy \Leftrightarrow xy=\frac{5(y-1)}{9}.$$

Và ta cũng thế như trường hợp 1.

Vậy là qua các bước phân tích các bạn đã thấy rõ bài toán có nhiều cách tiếp cận khá nhau. Sau đây, chúng tôi sẽ trình bày lời giải ở một cách tiếp cận dễ hiểu nhất . Còn cách khác các bạn tự thực hành giúp chúng tôi vì khác về bản chất ẩn phụ nhưng giải là như sau .

Lời giải :

Lấy $(1)-(2)$ vế theo vế ta có phương trình :

$$9xy\left(y^2+3x\right)-9xy-25(y-1)^2=0 \Leftrightarrow 9xy\left(y^2+3x-1\right)=25(y-1)^2.$$

Lúc đó ta sẽ có được hệ phương trình : $\begin{cases} 9xy\left(y^2+3x-1\right)=25(y-1)^2 \\ y^2+3x+9xy=10(y-1) \end{cases}$ (I)

⊕ Cách 1: Đặt $\begin{cases} a=9xy \\ b=y^2+3x-1 \\ c=y-1 \end{cases}$. Lúc đó hệ (I) trở thành : $\begin{cases} ab=25c^2 \\ a+b=10c \end{cases}$.

Suy ra a,b là nghiệm của phương trình :

$$X^2-10cX+25c^2=0 \Leftrightarrow (X-5c)^2=0 \Leftrightarrow X=5c.$$

Lúc đó ta sẽ có hệ :

$$\begin{cases} 9xy=5(y-1) \\ y^2+3x-1=5(y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5(y-1)}{9y} \\ y^2+\dfrac{5(y-1)}{3y}+4-5y=0 \end{cases}$$ ($y=0$ không thỏa hệ).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5y-5}{9y} \\ 9y^3-45y^2+51y-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5y-9}{9y} \\ (y-1)\left(3y^2-12y+5\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5y-5}{9y} \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ 3y^2-12y+5=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5y-5}{9y} \\ y=1 \vee y=\dfrac{6-\sqrt{21}}{3} \vee y=\dfrac{6+21}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{9} \\ y=\dfrac{6+\sqrt{21}}{9} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{9} \\ y=\dfrac{6-\sqrt{21}}{9} \end{cases}.$$

⊕ Cách 2 : Từ hệ $\begin{cases} 9xy\left(y^2+3x-1\right)=25(y-1) \\ y^2+3x-1+9xy=10(y-1) \end{cases}$.

Với $x=0 \Rightarrow y=1$ là một nghiệm của hệ.

Với $y=0$ không thỏa hệ.

Với $x \neq 0, y \neq 0$ ta có biến đổi hệ về hệ: $\begin{cases} 9xy\left(y^2+3x-1\right)=25(y-1) \\ \left(y^2+3x-1+9xy\right)9xy=90xy(y-1) \end{cases}$.

Từ đây ta suy ra được phương trình :

$$25(y-1)^2-90xy(y-1)+81x^2y^2=0 \Leftrightarrow \left[5(y-1)-9xy\right]^2=0$$

$$\Leftrightarrow 5(y-1)=9xy \Leftrightarrow x=\frac{5y-5}{9y}.$$

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$$9y^3-45y^2+51y-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=0 \\ y=\dfrac{6+\sqrt{21}}{3} \Rightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{9} \\ y=\dfrac{6-\sqrt{21}}{3} \Rightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{9} \end{array}\right..$$

Qua hai cách giải ta có nghiệm của hệ phương trình đã cho là :

$$(x,y)=\left\{(0;1);\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{9};\frac{6+\sqrt{21}}{9}\right);\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{3};\frac{6-\sqrt{21}}{9}\right)\right\}.$$

Bình luận : Bài toán này chính chúng tôi là tác giả của nó. Bài toán này ra nhằm mục đích kiểm tra kỷ năng phán đoán nhân từ của học sinh và thông qua đó hướng đến các phép giải cơ bản. Khi bài toán này ra đời có nhiều ý kiến hỏi về cách tạo ra hệ này. Chúng tôi cũng xin đưa đến các bạn nguồn gốc ra đời của nó được chúng tôi thực hiện "ghép và tạo" đơn giản theo ý tưởng tổng quát sau đây.

\+ **Bước 1 :** Tạo bốn đa thức :

$f(x,y), g(x,y), h(x,y), k(x,y)$ sao cho $\begin{cases} f(x,y)+g(x,y)=h(x,y) \\ f(x,y)\cdot g(x,y)=k(x,y) \end{cases}$.

+ **Bước 2 :**

Ghép $\left[f(x,y)+g(x,y)-\alpha\cdot h(x,y)\right]+\beta\left[f(x,y)\cdot g(x,y)-\mu\cdot k(x,y)\right]=0$

$\Leftrightarrow F(x,y)=0$.

+ **Bước 3 :**

Sau đó chúng ta ghép lại ta được hệ phương trình : $\begin{cases}F(x,y)=0\\ f(x,y)\cdot g(x,y)=k(x,y)\end{cases}$.

Trong quá trình tạo đa thức cần "ghép và tạo" ta sẽ điều chỉnh điều kiện của hệ đối xứng loại 1 và nghiệm của hệ sao cho phù hợp. Và cố gắng chọn đa thức sao cho hình thức phương trình có chỗ "để thở" về mặt hình thức và đường hướng đi ngược lại lời giải của bài toán đối với người giải được thực hiện tốt nhất có thể. Sự lắt léo khó chịu sẽ tăng lên nếu chúng ta chọn các đa thức và hệ số có tính "làm khó" sẽ tạo ra nhiều hệ thú vị. Và điểm thú vị xoay quanh vấn đề này còn nằm ở chỗ chưa chắc đa thức ban đầu ta chọn là hướng đi duy nhất. Đây chính là điểm thu hút của bài toán.

Ví dụ 16 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3+x^3y^3+y^3=17(1)\\ 3x\left(y^3-5\right)(x+1)-2\left(y^3+1\right)\left(x^3-1\right)=18(4-5x)(2)\end{cases}\quad(x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích :

Với hệ này, ta dễ dàng nhận thấy phương trình thứ nhất đối xứng với biến x,y. Còn phương trình thứ hai thì không có được sự đối xứng như vậy. Hình thức các tích của phương trình thứ hai trong hệ cũng không cho chúng ta được nhận định được gì nên ta sẽ tiến hành khai triển hết ra xem thế nào.

Cụ thể ta sẽ có hệ được biến đổi thành :

$$\begin{cases}x^3+x^3y^3+y^3-7=0(1)\\ -2x^3-2x^3y^3-2y^3+3x^2y^3+3xy^3-15x^2+75x-74=0(2)\end{cases}$$

Ta thấy phương trình thứ hai có sự cô lập của hai biến x,xy nên ta sẽ đẩy ý tưởng kết hợp hai phương trình lại để tìm sự đối xứng và phân ly bắt nhân tử chung.

Tức là ta cần "ghép và tạo" như sau :

$$\left(-2x^3-2x^3y^3-2y^3+3x^2y^3+3xy^3-15x^2+75x-74\right)+$$
$$k\cdot\left(x^3+x^3y^3+y^3-17\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -2x^3-2x^3y^3-2y^3+3x^2y^3+3xy^3-15x^2+75x-$$
$$74+kx^3+kx^3y^3+ky^3-17k=0$$

$\Leftrightarrow (-2+k)x^3 - 15x^2 + 75x - 74 - 17k + y^3\left((-2+k)x^3 + 3x^2 + 3x + k - 2\right) = 0 \ (*)$

Từ $(*)$ ta có quyền hy vọng $(*)$ được viết dưới dạng : $y^3(ax+b)^3 = (dx+e)^3$

Tức là :

$(-2+k)x^3 - 15x^2 + 75x - 74 - 17k + y^3\left((-2+k)x^3 + 3x^2 + 3x + k - 2\right)$

$= \underbrace{(dx+e)^3 - y^3(ax+b)^3}_{T} \quad (i)$

Với $T = d^3x^3 + 3d^2ex^2 + 3de^2x + e^3 - y^3\left(a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3\right)$.

Đồng nhất hệ số hai vế của (i) ta có : $\begin{cases} -2+k = d^3 \\ 3d^2e = -15 \\ 3de^2 = 75 \\ e^3 = -74 - 17k \\ a^3 = -k+2 \\ 3a^2b = -3 \\ 3ab^2 = -3 \\ b^3 = -k+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ a = -1 \\ b = -1 \\ d = 1 \\ e = -5 \end{cases}$.

Vậy lấy $(2) + 3\cdot(1)$ vế theo vế ta có phương trình :

$y^3(x+1)^3 = (5-x)^3 \Leftrightarrow y(x+1) = 5 - x \Leftrightarrow xy + x + y = 5$.

Do đó hệ đã cho trở thành hệ : $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 7 \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$.

Hệ này là hệ đối xứng loại 1 đã biết cách giải.

Lời giải :

Hệ đã cho được biến đổi thành hệ :

$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 - 17 = 0 (1) \\ -2x^3 - 2x^3y^3 - 2y^3 + 3x^2y^3 + 3xy^3 - 15x^2 + 75x - 74 = 0 (2) \end{cases}$.

Lấy $(2) + 3\cdot(1)$ vế theo vế ta sẽ có phương trình :

$x^3 - 15x^2 + 75x - 125 + y^3 + x^3y^3 + 3x^2y^3 + 3xy^3 = 0 \Leftrightarrow y^3(x+1)^3 = (5-x)^3$

$\Leftrightarrow y(x+1) = 5 - x \Leftrightarrow xy + x + y = 5 \ (3)$.

Kết hợp (3) và (1) ta được hệ :

$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ xy + x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 - 3xy(x+y) + x^3y^3 = 17 \\ xy + x + y = 5 \end{cases} \quad (I)$$

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}, S^2 - 4P \geq 0$. Lúc đó hệ (I) trở thành hệ : $\begin{cases} S^3 - 3SP + P^3 = 17 \\ S + P = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^3 - 3S(5-S) + (5-S)^3 = 17 \\ P = 5 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 5S + 6 = 0 \\ P = 5 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 3 \vee S = 2 \\ P = 5 - S \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S = 2 \\ P = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nhận :

$$\begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là : $(x, y) = \{(1;2);(2;1)\}$.

Bình luận: Bài toán này gốc gác của nó là một bài toán cơ bản, nhưng qua việc "ghép và tạo" hệ đơn giản đã sinh ra một hệ rất khó đoán ẩn phụ. Một biến tấu rất khó chịu nhưng lại hấp dẫn. Với phân tích trên sẽ giúp các bạn tìm được lời giải cho một số bài toán tạo hệ như vậy và đó có lẻ là con đường tư duy tự nhiên cho loại bài toán này!

Ví dụ 17 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 - 2x = y^4 - y \\ (x^2 - y^2)^3 = 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

(Chọn đội tuyển quốc gia ĐHSP Hà Nội)

Phân tích : Quan sát hệ này, chúng ta nhận thấy trong hệ chứa các hằng đẳng thức $x^4 - y^4, x^2 - y^2$. Các hằng đẳng thức này đều liên quan đến hai đại lượng $x + y, x - y$ nên ta sẽ suy nghĩ đặt ẩn phụ hóa như sau :

$$\begin{cases} a = x + y \\ b = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = a + b \\ y = \dfrac{a - b}{2} \\ ab = x^2 - y^2 \\ x^4 - y^4 = ab\left(\dfrac{a^2 + b^2}{2}\right) \end{cases}$$

Và như vậy xem như hệ sẽ trở thành : $\begin{cases} ab\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)-(a+b)+\dfrac{a-b}{2}=0 \\ a^3b^3=3 \end{cases}$. Hệ này hoàn toàn có thể giả tốt nhờ phép thế hằng số theo biến. Do đó ta đi vào lời giải cho bài toán như sau.

Lời giải :

Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ : $\begin{cases} 2\left(x^4-y^4\right)=4x-2y \\ \left(x^2-y^2\right)^3=3 \end{cases}$ (I).

Đặt $\begin{cases} a=x+y \\ b=x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=a+b \\ 2y=a-b \\ x^2-y^2=ab \\ 2\left(x^4-y^4\right)=ab\left(a^2+b^2\right) \end{cases}$.

Lúc đó hệ (I) trở thành: $\begin{cases} ab\left(a^2+b^2\right)=2(a+b)-a+b \\ a^3b^3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab\left(a^2+b^2\right)=a+3b \\ a^3b^3=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3b+ab^3=a+a^3b^4 \\ a^3b^3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(a^2b+b^3-a^2b^4-1\right)=0 \\ a^3b^3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(b^3-1\right)\left(1-a^2b\right)=0 \\ a^3b^3=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \vee b=1 \vee a^2b=1 \\ a^3b^3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a^3b^3=3 \end{cases} \vee \begin{cases} b=1 \\ a^3b^3=3 \end{cases} \vee \begin{cases} a^2b=1 \\ a^3b^3=3 \end{cases}$

⊕ Với $\begin{cases} a=0 \\ a^3b^3=3 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

⊕ Với $\begin{cases} b=1 \\ a^3b^3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=\sqrt[3]{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=\sqrt[3]{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt[3]{3}}{2} \\ y=\dfrac{-1+\sqrt[3]{3}}{2} \end{cases}$.

⊕ Với $\begin{cases} a^2b=1 \\ a^3b^3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2b=1 \\ ab^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{a^2} \\ a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ b=\sqrt[3]{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ x-y=\sqrt[3]{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}} \\ y=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là

$$(x,y)=\left\{\left(\frac{1+\sqrt[3]{3}}{2};\frac{-1+\sqrt[3]{3}}{2}\right);\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}};-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\right\}.$$

Bình luận : Bài toán này tuy đơn giản nhưng nếu không phát hiện ra cách đặt tổng hiệu của hai đại lượng x,y thì sẽ khó giải quyết. Phương pháp này cũng rất thường được sử dụng trong giải hệ bằng phương pháp ẩn phụ.

Ví dụ 18: Giải hệ phương trình $\begin{cases}6x^2y+2y^3+35=0\\5\left(x^2+y^2\right)+2xy+5x+13y=0\end{cases}\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Phân tích : Hệ này thường được giải dưới dạng "ghép và tạo" tức là chọn k để tạo ra một phương trình có nhân tử. Cách đó khá gọn và cho lời giải đẹp mắt nhưng để được điều đó phải qua một quá trình đòi hỏi đầy kinh nghiệm. Chúng tôi sẽ đi lời giải này bằng cách đặt ẩn phụ cho gần gũi hơn với đa số học sinh và kết hợp với cách "ghép và tạo" đơn giản hơn .

Câu hỏi là dựa vào đâu để nghỉ đến đặt ẩn phụ? Câu trả lời là ở phương trình thứ nhất ta có :

$$6x^2y+2y^3+35=0\Leftrightarrow 2\left(y^3+3x^2y\right)+35=0.$$

Ở tính chất chúng tôi đã nêu ra ta sẽ có : $y^3+3x^2y=\frac{(x+y)^3-(x-y)^3}{2}$, kết hợp với hình thức của phương trình thứ hai ta hoàn toàn có thể ẩn phụ hóa : $\begin{cases}a=x+y\\b=x-y\end{cases}$.

Khi đó ta sẽ có : $\begin{cases}x^2+y^2=\frac{a^2+b^2}{2}\\xy=\frac{a^2-b^2}{4}\\x=\frac{a+b}{2}\\y=\frac{a-b}{2}\end{cases}$.

Và ta sẽ đưa hệ đã cho về hệ : $\begin{cases}a^3-b^3+35=0\\5\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)+\frac{a^2-b^2}{2}+5\left(\frac{a+b}{2}\right)+13\left(\frac{a-b}{2}\right)=0\end{cases}$

. Hệ này gần giống ví dụ 18 chúng tôi đã phân tích ở phương pháp cộng trừ, nhân chéo. Do đó ta đi vào lời giải cho hệ.

Lời giải : Hệ phương trình đã cho được viết lại thành hệ:

$$\begin{cases} 2\left(y^3+3x^2y\right)+35=0 \\ 5\left(x^2+y^2\right)+2xy+5x+13y=0 \end{cases} (*)$$

Đặt $\begin{cases} a=x+y \\ b=x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{a^2+b^2}{2} \\ xy=\dfrac{a^2-b^2}{4} \\ x=\dfrac{a+b}{2} \\ y=\dfrac{a-b}{2} \\ y^3+3x^2y=\dfrac{a^3-b^3}{2} \end{cases}$.

Khi đó ta có hệ (*)trở thành hệ phương trình :

$$\begin{cases} a^3-b^3+35=0 \\ 5\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)+\dfrac{a^2-b^2}{2}+5\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+13\left(\dfrac{a-b}{2}\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3-b^3+35=0(1) \\ 3a^2+2b^2+9a-4b=0(2) \end{cases} (i).$$

Lấy $(1)+3\cdot(2)$ vế theo vế ta sẽ có được phương trình :

$a^3-b^3+35+9a^2+6b^2+27a-12b=0 \Leftrightarrow (a+3)^3=(b-2)^3 \Leftrightarrow a=b-5$.

Thế vào (2) ta có :

$3(b-5)^2+2b^2+5b-45=0 \Leftrightarrow b^2-5b+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \Rightarrow a=-3 \\ b=3 \Rightarrow a=-2 \end{array}\right.$.

⊕ Với $\begin{cases} a=-3 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-3 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$.

⊕ Với $\begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x,y)=\left\{\left(-\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right);\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right)\right\}$.

Bình luận : Hướng giải trong bài toán tuy hơi dài vì cần ẩn phụ và sử dụng nhân hệ số để "ghép và tạo" nhưng đó là con đường tư duy tự nhiên hơn nếu ngay từ đầu chúng ta chọn nhân hệ số để "ghép và tạo". Vì khi làm trực tiếp 'ghép và tạo" sẽ cần những kỷ năng phán đoán khá là "tinh quái" về nghiệm trước để tạo ra một phương trình có đúng ngay nghiệm cần tìm đó là phương trình :

$$(2y+5)\left(3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2\right)=0.$$

Ví dụ 19: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3+(2y-x)(1+6xy)=\dfrac{6}{x+2y-1}+8y^3 \\ \left(x^2-4y^2\right)^2-2(x+2y+1)=(x-2y)^2\left(1-\dfrac{12}{(x-2y)^3}\right) \end{cases} (x,y\in\square)$$

Phân tích :

Quan sát hệ ta dễ nhận thấy, tuy hình thức khá rối nhưng phép đặt ẩn phụ hóa lại cực kì rõ ràng. Đó là ta sẽ ẩn phụ hai đại lượng sau : $a=x+2y, b=x-2y$.

Do đó chúng tôi sẽ không phân tích sau vào ví dụ này mà sẽ đi giải trực tiếp hệ.

Lời giải :

Điều kiện : $\begin{cases} x+2y\neq 1 \\ x-2y\neq 0 \end{cases}$.

Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} (x-2y)\left((x-2y)^2-1\right)=\dfrac{6}{x+2y-1} \\ \left((x-2y)(x+2y)\right)^2-2(x+2y)-(x-2y)^2-2=\dfrac{12}{x-2y} \end{cases} (I)$$

Đặt $\begin{cases} a=x+2y \\ b=x-2y \end{cases}, (a\neq 1, b\neq 0)$. Lúc đó hệ (I) trở thành hệ phương trình :

$$\begin{cases} b\left(b^2-1\right)=\dfrac{6}{a-1} \\ b^2v^2-2a-b^2-2=\dfrac{12}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)\left(b^3-b\right)=6(1) \\ b^3a^2-2ab-b^3-2b=12(1) \end{cases} (II)$$

Không khó nhận thấy rằng hệ này sẽ không có nghiệm $(a,b)=\{(a,1);(a,-1)\}$.

Do đó với $b \neq \pm 1$ từ (1) ta có : $a = \dfrac{6}{b^3 - b} + 1$. Thay vào (2) ta có phương trình : $b^3\left(\dfrac{b^3 - b + 6}{b^3 - b}\right)^2 - 2\left(\dfrac{b^3 - b + 6}{b^3 - b}\right)b - b^3 - 2b = 12$

$$\Leftrightarrow b^3\left(b^3 - b + 6\right)^2 - 2b\left(b^3 - b + 6\right)\left(b^3 - b\right) - b^3\left(b^3 - b\right)^2 - 2b\left(b^3 - b\right)^2 = 12\left(b^3 - b\right)^2$$

$$\Leftrightarrow b^3(b-2)(b+2)\left(b^2 + 2\right) = 0 \Leftrightarrow (b-2)(b+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2 \Rightarrow a = 2 \\ b = -2 \Rightarrow a = 0 \end{array}\right.$$

⊕ Với $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$.

⊕ Với $\begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \left\{(2;0);\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

Bình luận : Bài toán không khó nhận ra ẩn phụ hóa, cái hơi sợ sợ là phép thế tạo phương trình bậc khá cao, nhưng do tính " co rút" của phương trình bậc cao này ta bắt được nhân tử khá nhanh.

Ví dụ 20: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (3x - 2y)^6 + (2x - 3y)^6 = 1 \\ (x + y)\left(19x^2 - 37xy + 19y^2\right) = 1 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với cấu tạo bậc khá cao của phương trình thứ nhất ta quyết định đặt ẩn phụ hóa như sau :

$\begin{cases} a = 3x - 2y \\ b = 3y - 2x \end{cases}$. Khi đó ta sẽ có : $\begin{cases} x + y = a + b \\ 19x^2 - 37xy + 19y^2 = a^2 - ab + b^2 \end{cases}$.

Lúc đó hệ phương trình đã cho trở thành hệ :

$$\begin{cases} a^6 + b^6 = 1 \\ (a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^6 + b^6 = 1 \\ a^3 + b^3 = 1 \end{cases}.$$

Hệ này giải khá đơn giản.

Lời giải :

Đặt $\begin{cases} a = 3x - 2y \\ b = 3y - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = a + b \\ 19x^2 - 37xy + 19y^2 = a^2 - ab + b^2 \end{cases}$.

Lúc đó hệ phương trình đã cho trở thành hệ :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^6+b^6=1 \\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^6+b^6=1 \\ a^3+b^3=1 \end{cases}.$$

Từ : $a^6+b^6=1 \Rightarrow a,b \in [-1;1]$. Mặt khác ta có : $\begin{cases} a^3=1-b^3 \ge 0 \\ b^3=1-a^3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow a,b \in [0;1]$.

Lấy hai phương trình trừ nhau vế theo vế ta có :

$$a^3(a^3-1)+b^3(b^3-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a(a^3-1)=0 \\ b(b^3-1)=0 \end{cases}.$$

Vậy kết hợp phương trình thứ nhất trong hệ lại ta sẽ có :

$$\begin{cases} a^6+b^6=1 \\ a(a^3-1)=0 \\ b(b^3-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x-2y=0 \\ 3y-2x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-2y=1 \\ 3y-2x=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{2}{5} \\ y=\dfrac{3}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{3}{5} \\ y=\dfrac{2}{5} \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x,y)=\left\{\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right);\left(\frac{3}{5};\frac{2}{5}\right)\right\}$.

Bình luận: Bài toán sau khi ẩn phụ hóa sẽ chuyển về hệ đối xứng loại 1 nhưng lại không chọn giải quyết bằng phương pháp của loại hệ đối xứng loại 1 được vì bậc khá cao nên chắc sẽ có những biến đổi đại số khá rối. Lời giải trong bài được dựa trên lối giải tổng quát của một loại hệ tổng quát sau đây mà ta cũng hay gặp: $\begin{cases} x^{2m}+y^{2m}=1 \\ x^{2n+1}+y^{2n+1}=1 \end{cases} \left(m,n \in \mathbb{N}^*\right)$ và hệ trong ví dụ là một biến tấu của hệ tổng quát.

2) Ẩn phụ hóa với hệ chứa căn thức.

Đối với hệ chứa căn thức thường chúng ta sẽ gặp các sự biến tấu sau để ẩn phụ hóa.

- *Ẩn phụ hóa có ngay trên hệ (trên một phương trình hoặc cả hai phương trình).*
- *Ẩn phụ hóa có được sau một phép biến đổi như nâng lũy thừa, chia hoặc nhân một đại lượng nào đó khác 0.*

Về cách nhìn chung cơ bản là như vậy, nhưng do sự biến tấu ẩn phụ rất phong phú nên cách tốt nhất nó chính là rèn luyện cảm giác sự liên quan đến đại lượng cần ẩn phụ và các đại lượng còn lại trong hệ.

Mục đích chung trong việc ẩn phụ hóa là khử căn thức. Ta thường có hai cách ẩn phụ hóa như sau :

- *Đặt một ẩn phụ dạng* $a=\sqrt{f(x)}$ *biến đổi đưa về phương trình hoặc về hệ phương trình đã biết cách giải.*
- *Đặt hai ẩn phụ ở hai dạng* $\begin{cases} a=\sqrt{f(x)} \\ b=\sqrt{g(x)} \end{cases} \vee \begin{cases} a=\sqrt{f(x)} \\ b=g(x) \end{cases}$ *để xử lí trên một phương trình hoặc toàn hệ để từ đó đưa về các phương trình hoặc hệ đã biết cách giải.*

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+2\sqrt{5x^2-y^2}=5 \\ \sqrt{21x^2+4\left(x+1-y^2\right)}-4(x+2)\sqrt{5x^2-y^2}=-19 \end{cases} (x,y\in \mathbb{R})$$

Phân tích : Quan sát hệ này, chúng ta dễ dàng nhận thấy đầu tiên là cả hai phương trình trong hệ đều chứa chung một đại lượng $\sqrt{5x^2-y^2}$. Tuy nhiên, nếu quan sát thêm chút nữa ta lại để ý thấy cả hai phương trình trong hệ cũng chứa chung đại lượng $x+2$.

Bây giờ vấn đề còn lại là ta sẽ biến đổi đại lượng $21x^2+4\left(x+1-y^2\right)$ theo hai đại lượng chung mà ta nhận ra được đó là $x+2, 5x^2-y^2$.

Muốn vậy, ta sẽ đi xác định hai số m,n sao cho

$21x^2+4(x+1)-4y^2=m(x+2)^2+n\left(5x^2-y^2\right)$.

Ta có : $21x^2+4x+4y^2+4=(m+5n)x^2+4mx+ny^2+4m$. Đồng nhất hai vế phương trình này ta sẽ tìm được $m=1,n=4$.

Vậy ta sẽ có : $21x^2+4(x+1)-4y^2=(x+2)^2+4\left(5x^2-y^2\right)$. Vậy hệ sẽ giải với phép đặt $\begin{cases} a=x+2 \\ b=\sqrt{5x^2+y^2} \end{cases}$.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} 5x^2-y^2\ge 0 \\ 21x^2+4\left(x+1-y^2\right)\ge 0 \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ :

$$\begin{cases} x+2+2\sqrt{5x^2-y^2}=7 \\ \sqrt{(x+2)^2+4\left(5x^2-y^2\right)}-4(x+2)\sqrt{5x^2-y^2}=-19 \end{cases} (1)$$

Đặt $\begin{cases} a = x+2 \\ b = \sqrt{5x^2 - y^2} \end{cases}$, $a \le 7, b \ge 0$.

Lúc đó hệ (1) trở thành hệ : $\begin{cases} a + 2b = 7 \\ \sqrt{a^2+4b^2} - 4ab = -19 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + 4ab + 4b^2 = 49 \\ \sqrt{a^2+4b^2} - 4ab = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4ab = a^2 + 4b^2 - 49 \\ a^2 + 4b^2 + \sqrt{a^2+4b^2} - 30 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4ab = a^2 + 4b^2 - 49 \\ \sqrt{a^2+4b^2} = 5 \end{cases} \text{ vì } \sqrt{a^2+4b^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = 6 \\ a^2 + 4b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{6}{b} \\ 4b^4 - 25b^2 + 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{6}{b} \\ b^2 = 4 \vee b^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 4 \\ b = \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

⊕ Với $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 3 \\ \sqrt{5x^2 - y^2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 5 - y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \end{array} \right.$

⊕ Với $\begin{cases} a = 4 \\ b = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 4 \\ \sqrt{5x^2 - y^2} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y^2 = \dfrac{71}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{\sqrt{71}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = -\dfrac{\sqrt{71}}{2} \end{cases} \end{array} \right.$.

Đối chiếu điều kiện và thử lại ta có nghiệm của hệ là

$$(x, y) = \left\{ (1;1); (1;-1); \left(2; \frac{\sqrt{71}}{2} \right); \left(2; -\frac{\sqrt{71}}{2} \right) \right\}.$$

Bình luận : Hệ phát hiện ra ẩn phụ khá đơn giản, nếu không nhận xét ra thêm nhân tử chung của cả hai phương trình là $x+2$ thì ta vẫn giải hệ rất tốt với một ẩn phụ cho căn thức. Phần còn lại là giải hệ bằng phương pháp thế hệ quả khá đơn giản.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{2x+y+3}+\sqrt{x-y+5}=5 \\ \sqrt{8x+4y+17}+\sqrt{3x+4}=3-4x-2y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này chứa tất cả là bốn căn thức. Tuy nhiên, ta quan sát được ở phương trình thứ hai trong hệ hai đại lượng $8x+4y+17, 3-4x-2y$ có hệ số đứng trước x, y liên quan đến đại lượng $2x+y+3$. Mặt khác giữa hai đại lượng $2x+y+3, x-y+5$ có dấu của y trái dấu và tổng hệ số của x ở hai lượng này là 3 nên $3x+4$ cũng liên quan đến hai đại lượng đó. Với suy nghỉ này ta sẽ ẩn phụ hóa hai căn thức ở phương trình thứ nhất.

Cụ thể ta có : $\begin{cases} a=\sqrt{2x+y+3} \\ b=\sqrt{x-y+5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=2x+y+3 \\ b^2=x-y+5 \end{cases} \Rightarrow 3x=a^2+b^2-8$.

Mặt khác ta lại có :

$8x+4y+17=4(2x+y+3)+5$; $3-4x-2y=9-2(2x+y+3)$.

Vậy là hệ hoàn toàn có thể giải quyết theo hai ẩn phụ mới là a, b.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} 2x+y+3\ge 0 \\ x-y+5\ge 0 \\ x\ge -\dfrac{4}{3} \\ 3-4x-2y\ge 0 \end{cases}$.

Hệ phương trình đã cho được viết lại là :

$$\begin{cases} 2\sqrt{2x+y+3}+\sqrt{x-y+5}=5 \\ \sqrt{4(2x+y+3)+5}+\sqrt{3x+4}=3-4x-2y \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{2x+y+3} \\ b=\sqrt{x-y+5} \end{cases}, a, b\ge 0$. Ta có : $3x=a^2+b^2-8 \Rightarrow 3x+4=a^2+b^2-4$.

Lúc đó $(*)$ trở thành hệ :

$$\begin{cases} 2a+b=5 \\ \sqrt{4a^2+5}+\sqrt{a^2+b^2-4}=9-2a^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=5-2a^2 \\ \sqrt{4a^2+5}+\sqrt{a^2+(5-2a)^2-4}+2a^2-9=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=5-2a \\ \sqrt{4a^2+5}+\sqrt{5a^2-10x+21}+2a^2-9=0 \quad (1) \end{cases}$$

Xét (1), ta có $(1) \Leftrightarrow \sqrt{4a^2+5}-3+\sqrt{5a^2-10x+21}-4+2\left(a^2-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{4\left(a^2-1\right)}{\sqrt{4a^2+5}+3}+\frac{5(a-1)^2}{\sqrt{5x^2+10a+21}+4}+2(a-1)(a+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)\underbrace{\left(\frac{4(a+1)}{\sqrt{4a^2+5}+3}+\frac{13a+3+2(a+1)\sqrt{5a^2-10x+21}}{\sqrt{5a^2-10a+21}+4}\right)}_{C}=0$$

$\Leftrightarrow a=1 \Rightarrow b=3$ vì $C>0, \forall a \geq 0$.

Vậy ta có: $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+y+3}=1 \\ \sqrt{x-y+5}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=-2 \\ x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=-\dfrac{10}{3} \end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{10}{3}\right)$.

Bình luận : Bài toán tuy chứa nhiều căn thức nhưng nếu tinh ý phân tích các hệ số theo chuẩn đại lượng nào đó ta vẫn tìm được ẩn phụ phù hợp và đưa đến giải một hệ cơ bản. Nguồn gốc của bài toán là xuất phát một phương trình vô tỷ nào đó được chọn sẵn và bằng phép thay thế ta sẽ được một hệ đẹp. Và việc còn lại là chúng ta sẽ rút thế và đi ngược lại để tìm kiếm phương trình vô tỷ ban đầu đã được che giấu.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x\left(5x+3\sqrt{x^2-y}\right)=3y+8 \\ 2(2x-1)\sqrt{x^2-y}-2(y+1)=5x(1-x) \end{cases} \quad (x,y \in \mathbb{R})$$

Phân tích : Bài toán này, quan sát hệ chúng ta chỉ thấy hệ có một căn thức, đại lượng trong căn chứa y và ngoài căn cũng chứa y nên ta sẽ nghỉ ngay đến phép ẩn phụ hóa căn thức và phép thế.

Đặt $t=\sqrt{x^2-y} \Rightarrow y=x^2-t^2$. Và thế vào hệ ta sẽ có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x(5x+3t)=3\left(x^2-t^2\right)+8 \\ 2(2x-1)t-2\left(x^2-t^2+1\right)+5x^2-5x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+3xt+3t^2=8 \\ 3x^2+4xt+2t^2-5x-2t-2=0 \end{cases}$$

Hệ cuối là hệ bậc hai tổng quát đã biết cách giải. Giờ ta đi vào giải hệ .

Lời giải :

Điều kiện : $x^2-y \geq 0$.

Đặt $t=\sqrt{x^2-y}, t\ge 0$. Ta có : $y=x^2-t^2$.

Thay vào hệ ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(5x+3t)=3\left(x^2-t^2\right)+8 \\ 2(2x-1)t-2\left(x^2-t^2+1\right)+5x^2-5x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+3xt+3t^2=8(1) \\ 3x^2+4xt+2t^2-5x-2t-2=0(2) \end{cases}$$

Lấy $(1)-2\cdot(2)$ vế theo vế ta được phương trình :

$$t^2-(4-5x)t+4x^2-10x+4=0 \Leftrightarrow (t+x-2)(t+4x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2-x \\ t=2-4x \end{array}\right.$$

Với $t=2-x$ thay vào (1) ta có phương trình :

$$x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow t=-1 \\ x=2 \Rightarrow t=0 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện của t ta có : $\begin{cases} x=2 \\ t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \sqrt{x^2-y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$.

Với $t=2-4x$ thay vào (1) ta có phương trình :

$$19x^2-21x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow t=-2 \\ x=\dfrac{2}{19} \Rightarrow t=\dfrac{30}{19} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện của t ta có: $\begin{cases} x=\dfrac{2}{19} \\ t=\dfrac{30}{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{19} \\ \sqrt{x^2-y}=\dfrac{30}{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{19} \\ y=-\dfrac{896}{361} \end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện của hệ ta có nghiệm của hệ là: $(x,y)=\left\{(2;4);\left(\dfrac{2}{9};-\dfrac{896}{361}\right)\right\}$.

Bình luận: Với bài toán có một căn thức lặp lại ở cả hai phương trình trong hệ thông thường ta sẽ lựa chọn phép ẩn phụ hóa và sử dụng phép thế. Bài toán chúng ta vừa nghiên cứu xong là một loại hệ như vậy và ta đưa về hệ phương trình bậc hai tổng quát quen thuộc, hệ này ta có thể lựa chọn nhiều cách tiếp cận như chúng tôi đã đề cập ở các phần trước. Nguồn gốc của bài toán này chắc chắn bắt nguồn từ một hệ bậc hai có trước rồi sau đó người ta sử dụng phép thay thế.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2+2x-1=\sqrt{1+x}+2\sqrt{1+y} \\ (y-x)(y+1)-1=\left(2-y^2\right)\sqrt{x+1} \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

Phân tích: Với hệ này ta quan sát thấy trong hệ cả hai phương trình đều liên quan đến hai đại lượng đó là $\sqrt{1+x}, \sqrt{1+y}$ nên ta có thể ẩn phụ hóa:

$$\begin{cases} a=\sqrt{1+x} \\ b=\sqrt{1+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a^2-1 \\ y=b^2-1 \end{cases}.$$

Khi đó ta sẽ có hệ phương trình mới: $\begin{cases} \left(b^2-1\right)^2+2\left(a^2-1\right)=1+a+2b \\ \left(b^2-a^2\right)b^2+\left(b^4-2b-1\right)a=1 \end{cases}$.

Với hệ mới ta để ý đến phương trình thứ hai trong hệ là một phương trình bậc hai theo biến b^2 nên ta có quyền hy vọng bắt nhân tử từ phương trình này.

Cụ thể ta sẽ có :

$$\left(b^2-a^2\right)b^2+\left(b^4-2b-1\right)a=1 \Leftrightarrow (1+a)b^4-\left(a^2+2a\right)b^2-(a+1)=0.$$

Ta có $\Delta_{b^2}=\left(a^2+2a\right)^2+4(a+1)^2=\left(a^2+2a+2\right)^2$. Điều này đã chứng tỏ được phương trình thứ hai trong hệ mới tách được nhân tử và như thế hệ hoàn toàn được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x \ge -1 \\ y \ge -1 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x+1} \\ b=\sqrt{y+1} \end{cases}, (a, b \ge 0)$. Ta có : $\begin{cases} x=a^2-1 \\ y=b^2-1 \end{cases}$. Khi đó hệ phương trình đã cho trở thành :

$$\begin{cases} \left(b^2-1\right)^2+2\left(a^2-1\right)=1+a+2b \\ \left(b^2-a^2\right)b^2+\left(b^4-2b-1\right)a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(b^2-1\right)^2+2\left(a^2-1\right)=1+a+2b (1) \\ (1+a)b^4-\left(a^2+2a\right)b^2-(a+1)=0 (2) \end{cases}.$$

Từ (2) ta có $\Delta_{b^2}=\left(a^2+2a\right)^2+4(a+1)^2=\left(a^2+2a+2\right)^2$.

Do đó ta có $(2) \Leftrightarrow \left(b^2-a-1\right)\left(ab^2+b^2+1\right)=0 \Leftrightarrow b^2=a+1$ vì $ab^2+b^2+1>0$.

Thay vào $b^2=a+1$ vào (1) ta có:

$$3a^2-a-3=2\sqrt{a+1} \Leftrightarrow 3\left(a^2-a-1\right)+2\left(a-\sqrt{a+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(a^2-a-1\right)+2\left(\frac{a^2-a-1}{a+\sqrt{a+1}}\right)=0 \Leftrightarrow \left(a^2-a-1\right)\left(3+\frac{2}{a+\sqrt{a+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ a = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có : $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow b^2 = \dfrac{3+2\sqrt{5}}{2}$.

Vậy ta sẽ có : $\begin{cases} a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y+1 = \dfrac{3+2\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ y+1 = \dfrac{3+2\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện của hệ ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bình luận: Đây là một cách đặt ẩn phụ thường gặp trong hệ chứa căn thức và không khó phán đoán. Xuất phát điểm của nó là dựa trên một phương trình tách được nhân tử và sử dụng phép thế để tạo ra điều kiện ràng buộc trong hê.

Ví dụ 5:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2(3x-5y)\sqrt{x^2-y^2} = 3(5x-3y-3) \\ \left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}-1\right)^3 = 8+(x-y-2)^2 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này ta nhận xét thấy xuất hiện các đại lượng $x+y, x-y, x^2-y^2$ nên ta nghĩ đến phép đặt ẩn phụ như sau:

$$\begin{cases} a = \sqrt{x+y} \\ b = \sqrt{x-y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = x+y \\ b^2 = x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a^2+b^2}{2} \\ y = \dfrac{a^2-b^2}{2} \end{cases}.$$

Khi đó ta sẽ có phương trình thứ nhất trong hệ trở thành :

$$2\left(3\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) - 5\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)\right)ab = 3\left(5\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) - 3\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right) - 3\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(4b^2-a^2\right)ab = 3\left(a^2+4b^2+3\right) \Leftrightarrow 8ab^3-2a^3b-3a^2-12b^2-9=0$$

$$\Leftrightarrow 8ab^3+4a^2b^2+6ab-2a^3b-4a^2b^2-3a^2-6ab-12b^2-9=0$$

$$\Leftrightarrow 2ab\left(2ab+4b^2+3\right) - a^2\left(2ab+4b^2+3\right) - 3\left(2ab+4b^2+3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2ab+4b^2+3\right)\left(2ab-a^2-3\right) = 0.$$

Vậy tới đây ta chỉ còn thực hiện phép thế vào phương trình thứ hai trong hệ. Vậy xem như hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ x-y\ge 0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x+y} \\ b=\sqrt{x-y} \end{cases}$, $(a,b\ge 0)$. Từ phép đặt ta có : $\begin{cases} x=\dfrac{a^2+b^2}{2} \\ y=\dfrac{a^2-b^2}{2} \end{cases}$.

Lúc đó hệ phương trình đã cho trở thành hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2\left(3\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)-5\left(\dfrac{a^2-b^2}{2}\right)\right)ab=3\left(5\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)-3\left(\dfrac{a^2-b^2}{2}\right)-3\right) \\ (a+b-1)^3=8+(b-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(4b^2-a^2\right)ab=3\left(a^2+4b^2+3\right) \\ (a+b-1)^3=8+(b-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8ab^3-2a^3b-3a^2-12b^2-9=0 \\ (a+b-1)^3=8+(b-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8ab^3+4a^2b^2+6ab-2a^3b-4a^2b^2-3a^2-6ab-12b^2-9=0 \\ (a+b-1)^3=8+(b-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab\left(2ab+4b^2+3\right)-a^2\left(2ab+4b^2+3\right)-3\left(2ab+4b^2+3\right)=0 \\ (a+b-1)^3=8+(b-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(2ab+4b^2+3\right)\left(2ab-a^2-3\right)=0 \\ (a+b-1)^3=8+(b-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab-a^2-3=0 \\ (a+b-1)^3=8+(b-2)^2 \end{cases} \text{ vì } 2ab+b^2+3>0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{a^2+3}{2a} \\ \left(a-1+\dfrac{a^2+3}{2a}\right)^3=8+\left(\dfrac{a^2+3}{2a}-2\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{a^2+3}{2a} \\ \left(3a^2-2a+3\right)^3=64a^3+2a\left(a^2-4a+3\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{a^2+3}{2a} \\ 27a^6-56a^5+133a^4-224a^2+165a^2-72a+27=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{a^2+3}{2a} \\ (a-1)^2\left(27a^4-2a^3+102a^2-18a+27\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{a^2+3}{2a} \\ (a-1)^2\left(26a^4+\left(a^2-a\right)^2+(9a-1)^2+19a^2+26\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{a^2+3}{2a} \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \text{ vì } 26a^4+\left(a^2-a\right)^2+(9a-1)^2+19a^2+26>0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y}=1 \\ \sqrt{x-y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

Bình luận : Bài toán nhận ra ẩn phụ không khó, chú ý rằng cách đặt ẩn phụ kiểu "tổng, hiệu" thế này cũng thường được sử dụng trong bài toán hệ căn thức. Độ khó của hệ ta đang xét là khâu kiểm soát tính toán và khai triển hằng đẳng thức hợp lí.

Ví dụ 6:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3y^2+37x-107}-\sqrt{3x^2-y-5}=\sqrt{5}-\sqrt{3} \\ \left(2x^2+x+4\right)\sqrt{x-y+3}-x-2y=6\left(x^2+4\right) \end{cases} (x,y\in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, chúng ta nhận thấy hệ chứa ba căn thức nhưng hai căn thức ở phương trình thứ nhất có ẩn phụ hóa cũng không giúp chúng ta được gì. Căn thức ở phương trình thứ hai nếu chúng ta ẩn phụ hóa nó thì khả năng biểu diễn biến x hoặc biến y theo ẩn phụ mới và biến cũ sẽ có tác dụng hơn vì lúc đó nó chuyển về phương trình đa thức quen thuộc có thể nhắm đến được cách phân tích nhân tử. Đối với bài toán vì trong phương trình thứ hai có chứa duy nhất y nên ta sẽ rút y theo biến x và ẩn phụ mới. Cụ thể ta có :

Đặt $t=\sqrt{x-y+3} \Rightarrow y=x-t^2+3$. Khi đó phương trình thứ hai trong hệ sẽ được viết lại thành phương trình sau :

$$\left(2x^2+x+4\right)t-x-2\left(x-t^2+3\right)=6x^2+24$$

$$\Leftrightarrow 2t^2+\left(2x^2+x+4\right)t-3\left(2x^2+x+10\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow (t-3)\left(2x^2+x+t+10\right)=0 \Leftrightarrow t=3.$$

Và như vậy ta đã có cơ sở để thực hiện phép thế giải phương trình thứ nhất trong hệ.

Tuy nhiên, nếu với góc nhìn sâu hơn và đủ tinh tê hơn thì chúng ta nhận thấy trước căn thức là một tam thức bậc hai theo biến x và vế còn lại cũng có bậc

hai theo biến x nên ta thử hy vọng xem rằng nếu ta đặt ẩn phụ hóa như sau : $\begin{cases} a = \sqrt{x-y+3} \\ b = 2x^2 + x \end{cases}$ thì có giải quyết được phương trình thứ hai.

Điều này đã quá rõ ràng ở bước đặt đầu tiên cho một phương trình rất rõ ràng giữa hai ẩn phụ a, b.

Vậy, tới đây ta có hai đướng giải quyết cho bài toán để có được phép thế, và như thế hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} 3y^2 + 37x - 35 \ge 0 \\ 3x^2 - y - 5 \ge 0 \\ x - y + 3 \ge 0 \end{cases}$.

Đặt $t = \sqrt{x-y+3}, t \ge 0$, Ta có : $y = x - t^2 + 3$. Lúc đó phương trình thứ hai trong hệ được viết lại :

$$\left(2x^2 + x + 4\right)t - x - 2\left(x - t^2 + 3\right) = 6x^2 + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 + \left(2x^2 + x + 4\right)t - 3\left(2x^2 + x + 10\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)\left(2x^2 + x + t + 10\right) = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-y+3} = 3 \Leftrightarrow y = x - 6 \text{ vì}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + x + 10 > 0 \\ t \ge 0 \end{cases}.$$

Thay $y = x - 6$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$\sqrt{3(y-6)^2 + 37x - 107} - \sqrt{3x^2 - x + 6 - 5} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 + x + 1} - \sqrt{3x^2 - x + 1} = \sqrt{5} - \sqrt{3} \ (1).$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{3x^2 + x + 1} - \sqrt{3x^2 - x + 1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có :

$$f'(x) = \frac{6x+1}{2\sqrt{3x^2 + x + 1}} - \frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2 - x + 1}} = \frac{3\left(x + \frac{1}{6}\right)}{\sqrt{3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12}}} - \frac{3\left(x - \frac{1}{6}\right)}{\sqrt{3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12}}}$$

Lại xét hàm số $g(t) = \dfrac{3t}{\sqrt{3t^2 + \frac{11}{12}}}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Ta có :

$$g'(t) = \frac{11}{4\left(3t^2 + \frac{11}{12}\right)\sqrt{3t^2 + \frac{11}{12}}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Do đó hàm số $g(t)$ đồng biến $\forall t \in \mathbb{R}$.

Mặt khác ta có: $x + \frac{1}{6} > x - \frac{1}{6}$ nên $g\left(x + \frac{1}{6}\right) > g\left(x - \frac{1}{6}\right)$.

Từ đây ta có $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến $\forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x) = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ có tối đa một nghiệm. Mà $f(1) = \sqrt{5} - \sqrt{3}$. Do đó $x = 1$ là nghiệm duy nhất của (1). Suy ra $y = -5$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (1; -5)$.

Bình luận: Với hệ này, việc đặt ẩn phụ bắt nhân tử là một phép đặt quen thuộc qua các ví dụ trên , độ khó của hệ này nằm ở giải phương trình tìm nghiệm. Cấu trúc giải phương trình này chúng tôi sử dụng phương pháp "hàm số lồng hàm số đại diện" it thấy để giải một phương trình vô tỷ.

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)^2 + 4\left(y - \sqrt{y(x-1)}\right) = 1 \\ 2(3+2y)\sqrt{x+1} - 2(2x-1)\sqrt{y} = 9 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, một lần nữa ta quan sát được trong hệ trong hệ chứa ba căn $\sqrt{y}, \sqrt{x-1}$ và $\sqrt{x+1}$. Tuy nhiên do cấu trúc phương trình thứ nhất trong hệ đẩy ta đi đến ý tưởng đặt ẩn phụ hóa như sau : $\begin{cases} a = \sqrt{x-1} \\ b = \sqrt{y} \end{cases}$. Khi đó ta có phương trình thứ nhất được biến đổi như sau :

$$\left(a^2 - b^2 + 1\right)^2 + 4\left(b^2 - ab\right) = 1 \Leftrightarrow \left(a^2 - b^2\right)^2 + 2\left(a^2 - b^2\right) - 4b(a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - b = 0 \\ (a+b)^2 + 2 = 0 \end{array}\right.$$

Và như vậy ta đã có thể thực hiện phép thế để giải phương trình thứ hai.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} y(x-1) \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x-1} \\ b = \sqrt{y} \end{cases}$, $a, b \ge 0$. Từ đây ta có : $x - y = a^2 - b^2 + 1$.

Lúc đó phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi như sau :

$$\left(a^2 - b^2 + 1\right)^2 + 4\left(b^2 - ab\right) = 1 \Leftrightarrow \left(a^2 - b^2\right)^2 + 2\left(a^2 - b^2\right) - 4b(a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)\left((a+b)(a-b)^2 + 2(a-b) - 4b\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)\left((a+b)^2(a-b) + 2(a-b)\right) = 0$$

$\Leftrightarrow (a-b)^2\left((a+b)^2+2\right)=0 \Leftrightarrow a=b$ vì $(a+b)^2+2>0$.

Phương trình thứ hai được biến đổi thành phương trình :

$2\left(3+2b^2\right)\sqrt{a^2+2}-2b\left(2a^2+1\right)=9\ (*)$

Thay $a=b$ vào phương trình (*) ta có phương trình :

$$2\left(3+2a^2\right)\sqrt{a^2+2}=4a^3+2a+9 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+2}-(a+1)=\frac{4a^3+2a+9}{4a^2+6}-(a+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-2a}{\sqrt{a^2+2}+a+1}=-\frac{(2a-1)(2a+3)}{4a^2+6} \Leftrightarrow (2a-1)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+2}+a+1}-\frac{2a+3}{4a^2+6}=0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{2} \\ 2a^2-5a+3=(2a+3)\sqrt{a^2+2} \end{array}\right. (*)$$

Xét phương trình :

$$2a^2-5a+3=(2a+3)\sqrt{a^2+2} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ 2a^2-5a+3\ge 0 \\ \left(2a^2-5a+3\right)^2=(2a+3)^2\left(a^2+2\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<a\le 1 \vee a\ge \dfrac{3}{2} \\ 32a^3-20a^2+54a+9=0 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(a)=32a^3-20a^2+54a+9$, $\forall a\in(0;1]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Ta có : $f'(a)=96a^2-40a+54=96\left(a-\frac{5}{24}\right)^2+\frac{299}{6}>0,\ \forall a\in(0;1]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Vậy hàm số $f(a)$ là hàm số đồng biến trên hai khoảng $(0;1]$ và $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Mặt khác ta lại có :

$\oplus \forall a\in(0;1] \Rightarrow 9<f(a)\le 75$ nên $f(a)=0$ vô nghiệm $\forall a\in(0;1]$.

$\oplus \forall a\in\left[\frac{3}{2};+\infty\right) \Rightarrow f(a)\ge 153$ nên $f(a)=0$ vô nghiệm $\forall a\in\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Vậy phương trình $2a^2-5a+3=(2a+3)\sqrt{a^2+2}$ vô nghiệm.

Do đó từ $(*) \Leftrightarrow a=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5}{4} \Rightarrow y=\frac{1}{4}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left(\frac{5}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Bình luận : Bài toán vẫn là phát hiện ẩn phụ và khéo léo chọn được ẩn phụ phù hợp để có những triển khai có lợi nhất.

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{9x+\dfrac{y}{x}}+2\sqrt{y+\dfrac{2x}{y}}=4\\ \left(\dfrac{2x}{y^2}-1\right)\left(\dfrac{y}{x^2}-9\right)=18\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với cấu trúc hệ này, ta nhận thấy ngay ẩn phụ đã xuất hiện ngay từ phương trình thứ nhất trong hệ. Cụ thể ta sẽ đặt : $\begin{cases}a=\sqrt{9x+\dfrac{y}{x}}\\ b=\sqrt{y+\dfrac{2x}{y}}\end{cases}$. Tuy nhiên vấn đề bây giờ là ta cần biểu diễn phương trình thứ hai phải liên quan đến ẩn phụ. Vì với phép đặt như vậy ta không thể làm gì để thế xuống phương trình thứ hai cho ra một biểu thức liên quan đến ẩn phụ.

Ta nhận thấy các đại lượng trong tích ở vế trái phương trình thứ hai có gì đó ngược ngược với biểu thức trong hai căn mà ta ẩn phụ hóa. Vậy phải chăng đây là một kết quả đã được biến đổi từ một điều "thuận" của ẩn phụ? Để tìm hiểu ta sẽ đi ngược lại vấn đề là phá cấu trúc tích đó để sắp xếp lại.

Cụ thể ta có phương trình thứ hai được viết lại thành phương trình :

$$(2x-y^2)(y-9x^2)=18x^2y^2 \Leftrightarrow 18x^3+y^3+9x^2y^2=2xy$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2}{y}+\frac{y^2}{2x}+\frac{9}{2}xy=1 \Leftrightarrow \frac{9x^2}{y}+\frac{9}{2}xy+\frac{y^2}{2x}+\frac{y}{2x}\cdot\frac{2x}{y}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}x\left(y+\frac{2x}{y}\right)+\frac{y}{2x}\left(y+\frac{2x}{y}\right)=2 \Leftrightarrow \left(y+\frac{2x}{y}\right)\left(9x+\frac{y}{x}\right)=4.$$

Và tới đây mọi thứ đã hoàn toàn. Ta sẽ đi vào lời giải cho bài hệ.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}xy\neq 0\\ 9x+\dfrac{y}{x}\geq 0\\ y+\dfrac{2x}{y}\geq 0\end{cases}$.

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{9x+\dfrac{y}{x}}\\ b=\sqrt{y+\dfrac{2x}{y}}\end{cases},(a,b\geq 0)$.

Phương trình thứ hai trong hệ được biến đổi lại thành phương trình :

$$\left(2x-y^2\right)\left(y-9x^2\right)=18x^2y^2 \Leftrightarrow 18x^3+y^3+9x^2y^2=2xy$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2}{y}+\frac{y^2}{2x}+\frac{9}{2}xy=1 \Leftrightarrow \frac{9x^2}{y}+\frac{9}{2}xy+\frac{y^2}{2x}+\frac{y}{2x}\cdot\frac{2x}{y}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}x\left(y+\frac{2x}{y}\right)+\frac{y}{2x}\left(y+\frac{2x}{y}\right)=2 \Leftrightarrow \left(9x+\frac{y}{x}\right)\left(y+\frac{2x}{y}\right)=4$$

Vậy hệ phương trình đã cho được viết lại thành hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} a+2b=4 \\ ab=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4-2b \\ (2-b)b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4-2b \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{9x+\dfrac{y}{x}}=2 \\ \sqrt{y+\dfrac{2x}{y}}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2+y=4x \\ y^2+2x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4x-9x^2 \\ \left(4x-9x^2\right)^2=2x-9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4x-9x^2 \\ x\left(x-\dfrac{1}{9}\right)\left(9x^2-7x+2\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4x-9x^2 \\ x=0 \vee x=\dfrac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1}{9} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right. .$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)$.

Bình luận : Đây là một bài rất hay , đẹp về hình thức và độc đáo về chọn đại lượng cần đặt ẩn phụ. Đặc biệt là con số 1 ở phương trình thứ 2, nó mang một 'tính chất đầy ma thuật" nếu không gỡ được nó thì khó lòng đi được hết đoạn đường giải bài toán. Tác giả của bài hệ này, thật tinh tế và có những tính toán hết sức là thú vị.

Ví dụ 9:

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{17-4x^2}+\sqrt{19-9y^2}=10-2x-3y \\ x\sqrt{13-4x^2}+y\sqrt{9-16y^2}=3 \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, chúng ta nhận xét trên từng phương trình chẳng cho chúng ta mối liên quan nào cả. Tuy nhiên để ý cả hai phương trình trong hệ ta nhận xét thấy một điều khá đặc biệt. Để nhìn rõ điều đó ta biến đổi hệ thành :

$$\begin{cases} 2x+\sqrt{17-4x^2}+3y+\sqrt{19-9y^2}=10 \\ x\sqrt{13-4x^2}+y\sqrt{9-16y^2}=3 \end{cases}.$$

Điều đặc biệt ở đây là nếu trên phương trình thứ nhất có dạng $a+b$ thì dưới phương trình thứ hai lại có dạng ab và đặc biệt sự liên kết giữa $2x, 4x^2$ và $4y, 16y^2$ nó gợi cho chúng ta sắp xếp một điều gì đó liên quan đến $a+b$ để từ đó có ab. Như vậy ta sẽ đẩy ý tưởng của bài toán là ẩn phụ hóa như sau :

$$\begin{cases} a = 2x + \sqrt{17-4x^2} \\ b = 3y + \sqrt{19-9y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4x\sqrt{17-4x^2} + 17 \\ b^2 = 6y\sqrt{19-9y^2} + 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{17-4x^2} = \dfrac{a^2-17}{4} \\ y\sqrt{19-9y^2} = \dfrac{b^2-19}{6} \end{cases}$$

Và như vậy hệ ban đầu trở thành một hệ đơn giản sau : $\begin{cases} a+b=10 \\ \dfrac{a^2-17}{4} + \dfrac{b^2-19}{6} = 3 \end{cases}$.

Vậy hệ hoàn toàn được giải quyết.

Lời giải :

Điều kiện : $\begin{cases} 17-4x^2 \ge 0 \\ 19-9y^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{17}}{2} \le x \le \dfrac{\sqrt{17}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{19}}{4} \le y \le \dfrac{\sqrt{19}}{4} \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} a = 2x + \sqrt{17-4x^2} \\ b = 3y + \sqrt{19-9y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{17-x^2} = \dfrac{a^2-17}{4} \\ y\sqrt{19-9y^2} = \dfrac{b^2-19}{6} \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ :

$$\begin{cases} a+b=10 \\ \dfrac{a^2-17}{4} + \dfrac{b^2-19}{6} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=10 \\ 3a^2+2b^2=125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10-b \\ 5b^2-60b+175=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=3 \\ b=7 \end{cases} \\ \begin{cases} a=5 \\ b=5 \end{cases} \end{array} \right.$$

⊕ Với

$$\begin{cases} a=3 \\ b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\sqrt{17-4x^2}=3 \\ 3y+\sqrt{19-9y^2}=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17-4x^2=(3-2x)^2 \\ 19-9y^2=(7-3y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x-2=0 \\ 9y^2-21y+30=0 \end{cases}$$

(hệ vô nghiệm)

⊕ Với

$$\begin{cases} a=5 \\ b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\sqrt{17-4x^2}=5 \\ 3y+\sqrt{19-9y^2}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17-4x^2=(5-2x)^2 \\ 19-9y^2=(5-3y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+2=0 \\ 3y^2-5y+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = \dfrac{9}{2} \\ y = \dfrac{5+\sqrt{13}}{6} \vee y = \dfrac{5-\sqrt{13}}{6} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện của hệ ta có nghiệm của hệ là:

$$(x,y) = \left\{\left(2;\frac{5+\sqrt{13}}{6}\right);\left(2;\frac{5-\sqrt{13}}{6}\right);\left(\frac{1}{2};\frac{5+\sqrt{13}}{6}\right);\left(\frac{1}{2};\frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)\right\}.$$

Bình luận: Bài toán này tác giả đã đề xuất một cách đặt ẩn phụ dựa trên một vài đặc điểm của ẩn phụ trong phương trình vô tỷ để giải quyết chéo trên hệ. Phép đặt có được là một kỷ thuật thường gặp trong tích phân đó là phép thế Euler. Hình dáng đặt ẩn phụ này rất ít gặp nhưng cũng là một ý tưởng hay và sau này có một số tác giả sủ dụng "phép thế Euler" để chế tác một số bài toán khác. Tuy nhiên, trở ngại của phép thế này trong hệ chứa căn thức đó là trên một phương trình nếu dùng phép thế này thì đòi hỏi kỷ năng biến đổi đại số khá rắc rối để đưa về một tích rồi từ đó xoay ngược lại bằng kỷ năng liên hiệp, bình phương cho ra được mối quan hệ. Với chúng tôi phép thế Euler ứng dụng trong bài toán này thì rất hay

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(y+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{y^2+1}+x\right)=1 \\ 2\left(8x^2-7y+1\right)-2(1-3y)\sqrt{5x+y+2}=(x+1)\sqrt{3x+y+3} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Phân tích : Với hệ này quan sát trong hệ chứa tới bốn căn thức, tuy nhiên cả bốn căn thức này chẳng có liên quan gì đến nhau. Do đó ta cần đẩy ý tưởng ẩn phụ hóa trên một phương trình trong hệ rồi sử dụng phép thế. Hãy chú ý tới phương trình thứ nhất trong hệ các biểu thức có gì đó rất quen thuộc nhưng lại rất lạ mắt. Về sự quen thuộc là cấu trúc của vế trái có nét gì đó liên quan đến liên hiệp hoặc hàm số như một số bài toán chúng ta nghiên cứu, nhưng cái lạ ở đây là ta không thể áp dụng các phương án quen thuộc để giải quyết vì tính sắp xếp các biến bị đan chéo nên việc ghép liên hiệp hay đưa về hàm số là không thể. Nhưng ta sẽ cố gắng biến đổi sự lạ mắt này về sự quen thuộc thông qua phép đặt ẩn phụ hóa sau đây :

$$\text{Đặt : } \begin{cases} a = x+\sqrt{x^2+1} \\ b = y+\sqrt{y^2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a^2-1}{2a} \\ y = \dfrac{b^2-1}{2b} \\ \sqrt{x^2+1} = \dfrac{a^2+1}{a} \\ \sqrt{y^2+1} = \dfrac{b^2+1}{b} \end{cases}$$

Khi đó phương trình thứ nhất trong hệ trở thành phương trình sau :

$$\left(\frac{a^2+1}{2a}+\frac{b^2-1}{2b}\right)\left(\frac{b^2+1}{2b}+\frac{a^2-1}{2a}\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ab=1 \\ ab(a+b)^2+(a-b)^2=0 \end{array}\right.$$

Từ đây ta có : $ab=1 \Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1\ (*)$

Hệ thức $(*)$ hết sức quen thuộc mà ta đề cập ở các phần trước nên đến đây ta xem như phép thế đã có và hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} 5x+y+2\ge 0 \\ 3x+y+3\ge 0 \end{cases}$

Do $\sqrt{x^2+1}+x>0, \sqrt{y^2+1}+y>0$.

Đặt : $\begin{cases} a=x+\sqrt{x^2+1} \\ b=y+\sqrt{y^2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a^2-1}{2a} \\ y=\dfrac{b^2-1}{2b} \\ \sqrt{x^2+1}=\dfrac{a^2+1}{a} \\ \sqrt{y^2+1}=\dfrac{b^2+1}{b} \end{cases}$, $a,b>0$

Với phép đặt này, từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$$\left(\frac{a^2+1}{2a}+\frac{b^2-1}{2b}\right)\left(\frac{b^2+1}{2b}+\frac{a^2-1}{2a}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2b+b+ab^2-a\right)\left(ab^2+a+a^2b-b\right)=2ab$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ab=1 \\ ab(a+b)^2+(a-b)^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow ab=1 \text{ vì } ab(a+b)^2+(a-b)^2>0, \forall a,b>0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1\ (1).$$

Vì $\sqrt{y^2+1}-y>|y|-y\ge 0 \Rightarrow \sqrt{y^2+1}-y>0$ nên ta có (1) trở thành :

$$x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y \Leftrightarrow x+y+\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}=0$$

$$\Leftrightarrow x+y+\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}=0 \Leftrightarrow (x+y)\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x+\sqrt{y^2+1}+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow y=-x \text{ vì } \frac{\sqrt{x^2+1}+x+\sqrt{y^2+1}+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}>0.$$

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$2\left(8x^2+7x+1\right)-2\left(3x+1\right)\sqrt{4x+2}=\left(x+1\right)\sqrt{2x+3}\ \left(x\ge -\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(8x^2+7x+1\right)=\left(x+1\right)\sqrt{2x+3}+\left(2x+1+4x+1\right)\sqrt{4x+2}$$

$$\Leftrightarrow 12\left(8x^2+7x+1\right)-6\left(x+1\right)\sqrt{2x+3}-6\left(2x+1\right)\sqrt{4x+2}-6\left(4x+1\right)\sqrt{4x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow 34x^2+5x+11+3\left(x+1\right)\sqrt{2x+3}\left(\sqrt{2x+3}-2\right)+3\left(2x+1\right)\left(\sqrt{4x+2}-2\right)+$$
$$2\left(4x+1\right)\left(4x+4-3\sqrt{4x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(17x+11\right)\left(2x-1\right)+$$
$$\frac{3\left(x+1\right)\left(2x-1\right)\sqrt{2x+3}}{\sqrt{2x+3}+2}+\frac{6\left(2x+1\right)\sqrt{4x+2}\left(2x-1\right)}{\sqrt{4x+2}+2}+\frac{2\left(4x+1\right)^2\left(2x-1\right)}{3\sqrt{4x+2}+4x+4}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x-1\right)\underbrace{\left(17x+11+\frac{3\left(x+1\right)\sqrt{2x+3}}{\sqrt{2x+3}+2}+\frac{6\left(2x+1\right)\sqrt{4x+2}}{\sqrt{4x+2}+2}+\frac{2\left(4x+1\right)^2}{3\sqrt{4x+2}+4x+4}\right)}_{T}=0$$

$$\Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=-\frac{1}{2}\ \text{ vì }\ T>0,\forall x\ge -\frac{1}{2}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $\left(x,y\right)=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Bình luận : Đây là một bài hệ rất khó, hình ảnh đặt ẩn phụ trong bài toán là một biến tấu của phép đặt Euler đã nhắc ở ví dụ trên. Nhược điểm của các đặt này, là xử lí khá rắc rối, ưu điểm là phép đặt ẩn phụ này còn mới lạ so với những kiểu ẩn phụ thông thường ta hay gặp. Mặt khác độ khó của bài toán còn nằm ở cách giải phương trình thứ hai, nếu ta không khéo léo thì sẽ dẫn đến những biến đổi hết sức khó khăn.

Ví dụ 11: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(4-x-y\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x^2+4xy}+\sqrt{2x}\right)=4\sqrt{2x}\\ 2\left(\sqrt{2x\left(2xy+2x+4y+x^2\right)}+4xy\right)=29x-6x^2-2\end{cases}\quad\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$$

Phân tích : Với hệ phương trình đang xét, cấu trúc của hệ thật khó để nhìn nhận điều gì được ngay, mà ta cần phán đoán trên từng phương trình trong hệ.

Với phương trình thứ nhất ta nhận thấy $\sqrt{2x}$ chứa cả hai vế của phương trình nên ta sẽ đẩy ý tưởng chia cho hai vế phương trình cho $\sqrt{2x}$, khi đó ta sẽ được phương trình : $\left(4-x-y\right)\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x}}+\sqrt{2y+x}+1\right)=4$.

Đã gọn gàng hơn và thấp thoáng được ý đồ chọn ẩn thay thế trong bài hệ này có lẻ sẽ liên quan đến đại lượng $\sqrt{\frac{x+2}{2x}}+\sqrt{2y+x}$.

Giờ ta quan sát phương trình thứ hai ta để ý thấy

$2xy+2x+4y+x^2=(x+2)(2y+x)$ có liên quan đến đại lượng mà ta sẽ nghỉ đến phép ẩn phụ. Vậy ta sẽ biến đổi gọn lại phương trình thứ hai như sau

$2\sqrt{2x(x+2)(2y+x)}+8xy+6x^2+2=29x$.

Phương trình này lại thấp thoáng hằng đẳng thức vì xuất hiện $2ab$ nên ta sẽ tách tiếp như sau :

$$x+2+2x(2y+x)+2\sqrt{2x(x+2)(2y+x)}+4x(y+x)=30x$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x(2y+x)}\right)^2+2x(y+x)=30x$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x(2y+x)}}{\sqrt{2x}}\right)^2+x+y=15$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x}}+\sqrt{2y+x}\right)^2+2(x+y)=15.$$

Tới đây kết hợp với phương trình thứ nhất ta sẽ có được phép ẩn phụ hóa là

$$\begin{cases}a=x+y\\ b=\sqrt{\frac{x+2}{2x}}+\sqrt{2y+x}\end{cases}.$$

Và như vậy hệ hoàn toàn được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}x\ge 0\\ 2y+x\ge 0\end{cases}$.

Nhận xét hệ không thể có nghiệm $(x,y)=(0;y)$ nên ta chỉ xét với $x>0$.

Hệ phương trình đã cho được viết lại thành hệ :

$$\begin{cases}(4-x-y)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x(2y+x)}+\sqrt{2x}\right)=4\sqrt{2x}\\ x+2+2x(2y+x)+2\sqrt{2x(x+2)(2y+x)}+4x(x+y)=30x^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(4-x-y)\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x}}+\sqrt{2y+x}+1\right)=4\\ \left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x(2y+x)}\right)^2+4x(y+x)=30x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(4-(x+y)\right)\left(\sqrt{\dfrac{x+2}{2x}}+\sqrt{2y+x}+1\right)=4\\ \left(\sqrt{\dfrac{x+2}{2x}}+\sqrt{2y+x}\right)^2+2(x+y)=15\end{cases}\quad(*)$$

Đặt $\begin{cases}a=x+y\\ b=\sqrt{\dfrac{x+2}{2x}}+\sqrt{2y+x}\end{cases}$, $b>0$. Lúc đó hệ phương trình $(*)$ trở thành hệ phương trình :

$$\begin{cases}(4-a)(b+1)=4\\ b^2+2a=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(4-\dfrac{15-b^2}{2}\right)(b+1)=4\\ a=\dfrac{15-b^2}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^3+b^2-7b-15=0\\ a=\dfrac{15-b^2}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(b-3)(b^2+4b+5)=0\\ a=\dfrac{15-b^2}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=3\\ \sqrt{\dfrac{x+2}{2x}}+\sqrt{2y+x}=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=3-x\\ \sqrt{\dfrac{x+2}{2x}}+\sqrt{6-x}=3\\ 0<x\le 6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=3-x\\ 1-\sqrt{\dfrac{x+2}{2x}}+2-\sqrt{6-x}=0\\ 0<x\le 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3-x\\ \dfrac{x-2}{2x\left(\sqrt{\dfrac{x+2}{2x}}+1\right)}+\dfrac{x-2}{2+\sqrt{6-x}}=0\\ 0<x\le 6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=3-x\\ (x-2)\left(\dfrac{1}{2x\left(\sqrt{\dfrac{x+2}{2x}}+1\right)}+\dfrac{1}{2+\sqrt{6-x}}\right)=0\\ 0<x\le 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(2;1)$.

Bình luận : Bài hệ được xuất phát từ một hệ cơ bản và chọn đại lượng để thực hiện phép thế. Một kỷ năng cũng thường gặp trong giải hệ là phát hiện đại lượng để chia phù hợp.

Ví dụ 12:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+2y+2\sqrt{4x+y}=1 \\ \sqrt{46-16y(x+y)-6y}+4\sqrt{4x+y}=8-4y \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích: Nhận xét đầu tiên là hệ này có hai phương trình đều chứa đại lượng $\sqrt{4x+y}$ nên bước đầu tiên ta sẽ mạnh dạn thực hiện phép thế để khử bớt căn ở phương trình thứ hai trong hệ và tiếp tục đó là sử dụng phép lũy thừa để phá căn thức bởi vì biểu thức $46-16y(x+y)-6y$ chẳng cho ta được mối liên kết nào cả.

Cụ thể từ phương trình thứ nhất trong hệ ta sẽ có : $2\sqrt{4x+y}=1-x-2y$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta sẽ có được phương trình :

$\sqrt{46-16y(x+y)-6y}=6+2x \Rightarrow 46-16xy-16y^2-6y=36+24x+4x^2$

$\Leftrightarrow 4x^2+16xy+16y^2+24x+6y-10=0 \Leftrightarrow 4(x+2y)^2+6(4x+y)-10=0$

Và tời đây chúng ta nhận thấy được hệ này hoàn toàn giải quyết với phép đặt :

$\begin{cases} a=x+2y \\ b=\sqrt{4x+y} \end{cases}$.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} 4x+y \geq 0 \\ 46-16y(x+y)-6y \geq 0 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có : $2\sqrt{4x+y}=1-x-2y$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$\sqrt{46-16y(x+y)-6y}=6+2x \Rightarrow 46-16xy-16y^2-6y=36+24x+4x^2$

$\Leftrightarrow 4x^2+16xy+16y^2+24x+6y-10=0 \Leftrightarrow 4(x+2y)^2+6(4x+y)-10=0$.

Từ đây ta có hệ phương trình đã cho được viết lại:

$\begin{cases} x+2y+2\sqrt{4x+y}=1 \\ 4(x+2y)^2+6(4x+y)-10=0 \end{cases} (*)$.

Đặt $\begin{cases} a=x+2y \\ b=\sqrt{4x+y} \end{cases}, b \geq 0$.

Lúc đó hệ $(*)$ được viết lại thành hệ :

$\begin{cases} a+2b=1 \\ 4a^2+6b^2-10=0 \end{cases}$

$\begin{cases} a=1-2b \\ 4(1-2b)^2+6b^2-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-2b \\ 11b^2-8b-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-2b \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=-1 \\ \sqrt{4x+y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=-1 \\ 4x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{7} \\ y=-\dfrac{5}{7} \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện và thử lại ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left(\dfrac{3}{7};-\dfrac{5}{7}\right)$.

Bình luận : Bài toán này lần đầu tiên xuất hiện trong một đề thi thử của diễn đàn math.vn. Đề xuất của bài toán là kỷ năng thế và ẩn phụ hóa. Một kỷ năng cũng thường được dùng trong bài toán hệ chứa căn thức và sau này có rất nhiều bài toán dựa trên ý tưởng này mà biến tấu rất nhiều bài toán hay.

Ví dụ 13: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{2+x+y}+3\sqrt{5x-4y}=7 \\ 4\sqrt{3-6x+3y}+5\sqrt{x+y+2}=10 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Bài toán liên quan đến 3 căn thức, theo suy nghỉ tự nhiên, ta có thể ẩn phụ hóa với hai căn thức nào đó. Chẳng hạn ở đây ta sẽ đặt ẩn phụ

$$\begin{cases} a=\sqrt{x+y+2} \\ b=\sqrt{5x-4y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=x+y+2 \\ b^2=5x-4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4a^2+b^2-8}{9} \\ y=\dfrac{5a^2-b^2-10}{9} \end{cases}.$$

Lúc này hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ :

$$\begin{cases} 2a+3b=7 \\ 4\sqrt{3-a^2-b^2-\dfrac{26}{3}}+5a=10 \end{cases}$$

Về cơ bản hệ này vẫn giải tốt bằng phép thế. Tuy nhiên, ở đây chúng tôi xin đề cập đến một cách nhìn khác cho hệ đặc biệt này. Hệ này các bạn hãy để ý tới tổng của ba đại lượng trong căn, ta sẽ có :

$x+y+2+5x-4y+3-6x+3y=5$.

Vậy ta sẽ có $\left(\sqrt{5x-4y}\right)^2+\left(\sqrt{x+y+2}\right)^2+\left(\sqrt{3-6x+3y}\right)^2=5$ nên ta sẽ đề xuất cách đặt ẩn phụ sau : $\begin{cases} a=\sqrt{5x-4y} \\ b=\sqrt{x+y+2} \\ c=\sqrt{3-6x+3y} \end{cases}$, $a,b,c\ge 0$. Từ đây ta sẽ có hệ :

$\begin{cases} 3a+2b=7 \\ 5b+4c=10 \\ a^2+b^2+c^2=5 \end{cases}$ và hệ này cũng giải được bằng phép thế.

Lời giải : Điều kiện: $\begin{cases}5x-4y\ge 0\\ x+y+2\ge 0\\ 3-6x+3y\ge 0\end{cases}$.

Đặt : $\begin{cases}a=\sqrt{5x-4y}\\ b=\sqrt{x+y+2}\\ c=\sqrt{3-6x+3y}\end{cases}$ $,(a,b,c\ge 0)$. Khi đó hệ phương trình đã cho trở thành hệ phương trình :

$$\begin{cases}3a+2b=7\\ 5b+4c=10\\ a^2+b^2+c^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{7-2b}{3}\\ c=\dfrac{10-5b}{4}\\ \left(\dfrac{7-2b}{3}\right)^2+b^2+\left(\dfrac{10-5b}{4}\right)^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{7-2b}{3}\\ c=\dfrac{10-5b}{4}\\ b=2\vee b=\dfrac{482}{433}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\\ c=0\end{cases}\vee\begin{cases}a=\dfrac{689}{433}\\ b=\dfrac{482}{433}\\ c=\dfrac{480}{433}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{5x-4y}=1\\ \sqrt{x+y+2}=2\\ \sqrt{3-6x+3y}=0\end{cases}\vee\begin{cases}\sqrt{5x-4y}=\dfrac{689}{433}\\ \sqrt{x+y+2}=\dfrac{482}{433}\\ \sqrt{3-6x+3y}=\dfrac{480}{433}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5x-4y=1\\ x+y+2=4\\ 3-6x+3y=0\end{cases}\vee\begin{cases}5x-4y=\left(\dfrac{689}{433}\right)^2\\ x+y+2=\left(\dfrac{482}{433}\right)^2\\ 3-6x+3y=\left(\dfrac{480}{433}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x=-\dfrac{131999}{187489}\\ y=-\dfrac{131999}{187489}\end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là :

$$(x,y)=\left\{(1;1);\left(-\frac{131999}{187489};-\frac{131999}{187489}\right)\right\}.$$

Bình luận: Bài toán trên tác giả là em Lê Bình Phương, bài toán được tác giả giải theo phương án đặt hai ẩn phụ, đó cũng là xuất phát tự nhiên. Nhưng khi tác giả sáng tác không biết cố ý hay vô tình mà tác giả lại để cho tổng ba đại lượng trong căn thức cộng lại bằng hằng số. Dù cố ý hay vô tình thì bài toán trên cũng gợi mở ra cho chúng ta nhiều khi một chút khác biệt sẽ tạo ra được một cá tính hay và sẽ đưa ta đến con đường ra kết quả bằng một hướng đi khác "cũ nhưng lại mới ". Nhược điểm của bài đó là tác giả khống chế nghiệm chưa tốt. Tuy nhiên, chúng tôi vẫn tôn trọng ý tưởng gửi gắm của tác giả.

Ví dụ 14: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\left(\sqrt{2x}+\sqrt{y}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(\sqrt{y}+\sqrt{2(y-x)}\right)^2}=\dfrac{1}{y+2\sqrt{x(1-x)}} \\ y^2-x^2+\dfrac{1}{x}=2\left(y-3+\left(2+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{2y}\right) \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích : Với phương trình thứ hai trong hệ, ta không thể làm gì được với nó. Ở phương trình thứ nhất trong hệ ta nhận thấy tuy phương trình chứa nhiều căn thức và có một điểm đặc biệt các đại lượng trong căn thức chỉ chứa x, y đều ở bậc 1, nên ta thử đẩy ý tưởng đặt $x = ty$ để khử bớt đại lượng đã cho trên phương trình này.

Cụ thể lúc đó phương trình thứ nhất sẽ được viết lại là :

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2ty}+\sqrt{y}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{y}+\sqrt{2(y-yt)}\right)^2}=\frac{1}{y+2\sqrt{yt(1-yt)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(1+\sqrt{2t}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\sqrt{2-2t}\right)^2}=\frac{1}{1+\sqrt{2t(2-2t)}}$$

Và tới đây ta lại ẩn phụ hóa như sau : $\begin{cases} a=\sqrt{2t} \\ b=\sqrt{2-2t} \end{cases}$, ta lại có phương trình được biến đổi như sau :

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}=\frac{1}{1+ab} \Leftrightarrow \frac{(1+b)^2+(1+a)^2}{(1+a)^2(1+b)^2}=\frac{1}{1+ab}$$

$$\Leftrightarrow (1+ab)\left((1+a)^2+(1+b)^2\right)=(1+a)^2(1+b)^2$$

$$(1+ab)\left(2+2a+2b+a^2+b^2\right)-(1+ab+a+b)^2=0$$

$$\Leftrightarrow 2(1+ab)+2(a+b)(1+ab)+\left(a^2+b^2\right)(1+ab)-$$

$$(1+ab)^2-2(a+b)(1+ab)-(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow ab\left(a^2+b^2\right)+2+2ab-1-2ab-a^2b^2-a^2-2ab-b^2+a^2+b^2=0$$

$$\Leftrightarrow ab\left(a^2+b^2-2ab\right)+a^2b^2-2ab+1=0 \Leftrightarrow (a-b)^2ab+(ab-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1 \Leftrightarrow \sqrt{2t}=\sqrt{2-2t}=1 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}y \Leftrightarrow y=2x.$$

Vậy là ta đã tìm được mối quan hệ thế vào phương trình thứ hai giữa hai biến và như thế hệ hoàn toàn được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y - x \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ 15 + x + 4y(1-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y \geq 0 \\ y \geq x \\ 15 + x + 4y(1-x) \geq 0 \end{cases}$.

Nhận xét hệ không thể có nghiệm $(x,y) = (0;0)$. Do đó ta chỉ cần xét $0 < x \leq 1, y > 0$.

Đặt $x = ty, t > 0$. Lúc đó phương trình thứ nhất trong hệ được viết lại là :

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2ty} + \sqrt{y}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sqrt{y} + \sqrt{2(y - yt)}\right)^2} = \frac{1}{y + 2\sqrt{yt(1-yt)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(1 + \sqrt{2t}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \sqrt{2-2t}\right)^2} = \frac{1}{1 + \sqrt{2t(2-2t)}} \ (*).$$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{2t} \\ b = \sqrt{2-2t} \end{cases}, a > 0, b \geq 0$. Lúc đó ta có $(*)$ trở thành phương trình :

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} = \frac{1}{1+ab} \Leftrightarrow \frac{(1+b)^2 + (1+a)^2}{(1+a)^2(1+b)^2} = \frac{1}{1+ab}$$

$$\Leftrightarrow (1+ab)\left((1+a)^2 + (1+b)^2\right) = (1+a)^2(1+b)^2$$

$$(1+ab)\left(2 + 2a + 2b + a^2 + b^2\right) - (1 + ab + a + b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1+ab) + 2(a+b)(1+ab) + \left(a^2 + b^2\right)(1+ab) -$$

$$(1+ab)^2 - 2(a+b)(1+ab) - (a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow ab\left(a^2 + b^2\right) + 2 + 2ab - 1 - 2ab - a^2b^2 - a^2 - 2ab - b^2 + a^2 + b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow ab\left(a^2 + b^2 - 2ab\right) + a^2b^2 - 2ab + 1 = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 ab + (ab-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2t} = \sqrt{2-2t} = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y \Leftrightarrow y = 2x.$$

Thế $y = 2x$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$3x^2 + \frac{1}{x} = 2\left(2x - 3 + \left(2 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x}\right) \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 6 + \frac{1}{x} = 2\left(2 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2 - 2x + 1\right) + x\left(2 + \frac{1}{x}\right) + \left(2 + \frac{1}{x}\right) - 2\left(2 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-2x+1\right)+\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(x+1-2\sqrt{x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-2x+1\right)+\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x^2+2x+1-4x}{x+1+2\sqrt{x}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-2x+1\right)+\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x^2-2x+1}{x+1+2\sqrt{x}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(3+\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x+1+2\sqrt{x}}\right)\right)=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=2$$

vì $3+\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x+1+2\sqrt{x}}\right)>0$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(1;2)$.

Bình luận: Bài toán này ở phương trình thứ nhất nếu tinh mắt và khá sẽ nhận thấy được phương trình đó được bắt nguồn từ một bất đẳng thức cơ bản. Tuy nhiên, qua bài toán này chúng tôi muốn gửi gắm đến các bạn nếu trên một phương trình vô tỉ mà các đại lượng trong căn thức thuần nhất, hoặc đẳng cấp chúng ta có thể đặt ẩn phụ để rút bớt ẩn ban đầu. Sau đó có thể tiến hành đặt ẩn phụ lần nữa hoặc có thể biến đổi tương đương hoặc có thể xử lí như một phương trình vô tỷ bình thường để tìm mối quan hệ đó. Như vậy, về tổng quan về đặt ẩn phụ cho căn thức chúng tôi đã cố gắng minh họa hầu hết các kiểu đặt thường gặp và phân tích các biến tấu của nó. Hy vọng sẽ giúp các bạn có cái nhìn tốt hơn cho các hệ loại này.

V. HỆ PHƯƠNG TRÌNH GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ.

Để giải hệ phương trình bằng phương pháp hàm số, trước tiên ta cần biết đến cơ sở lý thuyết để giải bằng phương pháp này qua các định lý sau :

1) *Định lý 1: Nếu hàm số* $f(x)$ *xác định trên một tập* K *(có thể là một khoảng hoặc nữa khoảng hoặc một đoạn) và hàm số* $f(x)$ *luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) thì phương trình* $f(x)=0$ *nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất trên tập* K.

2) *Định lý 2: Nếu hàm số* $f(x)$ *xác định trên tập* K *(có thể là một khoảng hoặc nữa khoảng hoặc một đoạn) và hàm số* $f(x)$ *luôn đồng biến (hoặc nghịch biến). Khi đó với mọi* a,b *thuộc tập* K *thỏa mãn* $f(a)=f(b)$ *khi và chỉ khi* $a=b$.

Chú ý : Trong quá trình xử lý bài toán hệ bằng phương pháp hàm số ta thường gặp một lớp bài toán $f(a)=f(b)$ *trong đó hàm số đại diện là* $f(t)$ *luôn tăng hoặc luôn giảm trên một tập* $D=D_1\cup D_2$ *thì ta nên cẩn thận kết luận* $f(a)=f(b)\Leftrightarrow a=b$. *Vì ta chỉ có được điều này khi và chỉ khi* a,b *cùng dấu, nếu ta có* a,b *khác dấu thì kết luận* $f(a)=f(b)\Leftrightarrow a=b$ *là một kết luận sai.*

Các bài toán giải bằng phương pháp hàm số thường được chia thành hai lớp toán chính :

⊕ *Xử lý một phương trình trong hệ về dạng* $f(a)=f(b)$ *trên một tập xác định* K *đã biết trước và chọn hàm số đại diện* $f(t)$ *trên một tập* K_1 *tương ứng và khẳng định tính đơn điệu của* $f(t)$ *thỏa mãn một trong hai định lý trên.*

⊕ *Xử lý một phương trình trong hệ về dạng* $f(a)=f(b)$ *trên một tập xác định* K *mà ta chưa biết mà cần phải đi xây dựng trên một phương trình còn lại hoặc từ điều kiện. Sau đó ta cũng chọn hàm đại diện* $f(t)$ *trên một tập xác định* K_1 *tương ứng và khẳng định tính đơn điệu của* $f(t)$ *thỏa mãn hai định lý trên* ***hoặc*** *ta sẽ khảo sát từng hàm số* $f(a), f(b)$ *trên tập xác định tương ứng với từng hàm số và đưa ra kết luận.*

⊗ *Một số đặc điểm để có thể ứng dụng phương pháp này vào giải hệ.*

- *Có một phương trình trong hệ có thể cô lập được hai biến về một định dạng phương trình có tính đối xứng.*
- *Hệ đối xứng loại 2 nhưng nếu sử dụng phương pháp đã biết sẽ gây khó khăn.*
- *Có một phương trình trong hệ có thể cô lập được hai biến nhưng không đưa được về dạng đối xứng mà bốn định dạng hay gặp là* $f(a)+f(b)=k, f(a)\cdot f(b)=k$, $f(a)+g(b)=k$, $f(a)=k$ *với* k *là hằng số và* a *thuộc tập xác định* K_1, *b thuộc một tập xác định* K_2.

Sau đây ta sẽ khảo sát các bài toán về thể loại này.

* *Loại 1: Xét hàm số đại diện trên tập xác định đã biết trước.*

Trong đề mục loại 1 chúng ta thường sử dụng các phương pháp sau:

- *Nhìn trực diện trên một phương trình tách được phương trình có thể xét hàm.*
- *Cộng, trừ theo vế hai phương trình trong hệ để có được phương trình xét hàm.*
- *Chia hoặc nhân cho một đại lượng nào đó khác 0 (kể cả liên hiệp)*
- *Sử dụng phép thế từ một phương trình trong hệ vào phương trình còn lại để tìm phương trình có thể xét hàm số đại diện.*

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 13x-4y+8=y^3-x^3+3\left(y^2-2x^2\right) \\ x^2(x-2)(y+1)=5(1-2y) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, nhận thấy phương trình thứ nhất trong hệ hai biến x, y có thể cô lập được nên khả năng biến đổi về phương trình định dạng đối xứng để xử lý hàm số là rất cao nên ta sẽ ưu tiên biến đổi phương trình thứ nhất về phương trình sau :

$x^3+6x^2+13x+8=y^3+3y^2+4y$

$\Leftrightarrow (x+1)^3+3(x+1)^2+4(x+1)=y^3+3y^2+4y$.

Và tới đây ta biến đổi được về phương trình định dạng đối xứng nên ta tiến hành xét hàm số dại diện :

$f(t)=t^3+3t^2+4t, \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=3t^2+6t+4=3(t+1)^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Và như vậy ta sẽ có $f(x+1)=f(y)\Leftrightarrow y=x+1$.

Từ đây ta đã có mối quan hệ giữa x,y để tiến hành phép thế và giải quyết trọn vẹn hệ phương trình.

Lời giải : Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta biến đổi được về phương trình :

$$x^3+6x^2+13x+8=y^3+3y^2+4y$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3+3(x+1)^2+4(x+1)=y^3+3y^2+4y\ (1).$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t^2+4t,\forall t\in\mathbb{R}$.

Ta có : $f'(t)=3t^2+6t+4=3(t+1)^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó ta có hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (1) ta có : $f(x+1)=f(y)\Leftrightarrow y=x+1$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$x^2(x-2)(x+2)+5(2x+1)=0\Leftrightarrow x^4-(2x+5)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x+5)(x^2-2x-5)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{6}\Rightarrow y=2+\sqrt{6}\\ x=1-\sqrt{6}\Rightarrow y=2-\sqrt{6}\end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x,y)=\left\{\left(1+\sqrt{6};2+\sqrt{6}\right);\left(1-\sqrt{6};2-\sqrt{6}\right)\right\}$.

Bình luận : Bài toán trên là dạng mà chúng tôi đã đề cập trong phần nhân tử hóa dựa trên tính đối xứng, giờ chúng tôi đưa ra một phương án khác để giải nó đó chính là hàm số. Điều này cũng có nghĩa rằng các bài toán dựa trên tính đối xứng hoàn toàn có thể giải bằng phương pháp hàm số như chúng tôi đã nói ở phần trước. Việc tách được phương trình để xét hàm số, phần trước chúng tôi đã phân tích nên chúng tôi không đi sâu vào nữa. Và không nghi ngờ gì nữa bài toán trên được giải bằng hàm số dựa trên tập xác định K đã biết trước.

Ví dụ 2:

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x^2+3y^2)x^3+(2x-3y^4)y^4=(y^4+2)y^6\\ \sqrt{4x+5}+2\sqrt{y^2+3}=7\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ phương trình này, ta nhận thấy phương trình thứ hai tuy đơn giản nhưng ta không thể tìm được mối quan hệ giữa x,y có lợi nhất cho ta sử dụng phép thế. Còn phương trình thứ nhất, tuy hình thức khá rối nhưng không khó nhận ra phương trình cho phép ta cô lập được hai biến x,y nên khả năng xử lý hàm số là rất cao.

Cụ thể ta có phương trình thứ nhất được biến đổi lại như sau :

$$x^5+3x^3y^2+2xy^4-3y^8=y^{10}+2y^6\Leftrightarrow x^5+3x^3y^2+2xy^4=y^{10}+3y^8+2y^6.$$

Ở phương trình cuối ta nhận thấy rằng bậc cao nhất của x là 5 và bậc cao nhất của y^{10}. Tuy nhiên ta quan sát thấy bậc ba của biến x lại gắn với bậc hai của biến y, bậc một của biến x gắn với bậc bốn của biến y nên ta đẩy ý tưởng chia hai vế phương trình cho y^5 để gắn kết về bậc của hai phương trình với nhau. Cụ thể thực hiện phép chia y^5 ta sẽ có phương trình :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5+3\left(\frac{x}{y}\right)^3+2\left(\frac{x}{y}\right)=y^5+3y^3+2y.$$

Phương trình đã có định dạng hàm số đại diện $f(t)=t^5+3t^3+2, \forall t\in\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=5t^4+9t^2+2>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$ nên hàm $f(t)$ đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$. Từ đây ta sẽ xây dựng được mối quan hệ giữa hai biến x, y và như thế hệ hoàn toàn được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $x\ge -\frac{5}{4}$.

Phương trình thứ nhất được biến đổi lại thành phương trình :

$x^5+3x^3y^2+2xy^4=y^{10}+3y^8+2y^6 \ (1)$

Xét $y=0 \Rightarrow x=0$ không thỏa hệ phương trình.

Với $y\ne 0$ ta chia hai vế (1) cho y^5 ta được phương trình :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5+3\left(\frac{x}{y}\right)^3+2\left(\frac{x}{y}\right)=y^5+3y^3+2y \ (2)$$

Xét hàm số $f(t)=t^5+3t^3+2t$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

Ta có : $f'(t)=5t^4+9t^2+2>0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó từ $(2)\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(y)\Leftrightarrow x=y^2$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$\sqrt{4x+5}+2\sqrt{x+3}=7\Leftrightarrow 4x+5+4x+12+4\sqrt{4x^2+17x+15}=49$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+17x+15}=8-2x\Leftrightarrow \begin{cases}8-2x\ge 0\\ 4x^2+17x+15=64-32x+4x^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 4\\ 49x=49\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Đối chiếu điều kiện ta có $x=1\Rightarrow y=\pm 1$. Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x,y)=\{(1;1);(1;-1)\}$.

* Cách khác : Ta có : $\sqrt{4x+5}+2\sqrt{x+3}=7\Leftrightarrow \sqrt{4x+5}-3+2\left(\sqrt{x+3}-2\right)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-1)}{\sqrt{4x+5}+3}+\frac{2(x-1)}{\sqrt{x+3}+2}=0 \Leftrightarrow (x-1)\underbrace{\left(\frac{4}{\sqrt{4x+5}}+\frac{2}{\sqrt{x+3}+2}\right)}_{C}=0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=\pm 1 \text{ vì } C>0, \forall x \ge -\frac{5}{4}.$$

Và như vậy ta cũng có nghiệm của hệ là $(x,y)=\{(1;1);(1;-1)\}$.

Bình luận : Việc xét trường hợp để thực hiện phép chia tìm hàm số đại diện trên một miền nghiệm cho biết trước cũng là trường hợp thường gặp với thể loại hệ này. Còn cách giải phương trình tìm nghiệm là một phương trình quá cơ bản, ở đây chúng tôi giải hai cách đó là phương pháp cơ bản và liên hiệp.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x+3}-\sqrt{2y+3}=4(y-x)\\ x=\sqrt[5]{x(1-y^3)+15(y^2+1)-29}\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, rõ ràng chúng ta không cần suy nghỉ gì nhiều vì cấu trúc “cô lập và đối xứng” đã có ở phương trình thứ nhất trong hệ. Do đó ta sẽ tiến hành tách như sau :

$\sqrt{2x+3}-\sqrt{2y+3}=4y-4x \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}+4x=\sqrt{2y+3}+4y$.

Ta xét hàm số $f(t)=\sqrt{2t+3}+4t, \forall t\ge -\frac{3}{2}$.

Ta có : $f'(t)=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}+4>0, \forall t>-\frac{3}{2}$.

Từ điều này ta đã có thể xây dựng mối quan hệ cho x,y. Như vậy hệ hoàn toàn được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}x\ge -\frac{3}{2}\\ y\ge -\frac{3}{2}\end{cases}$

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$\sqrt{2x+3}+4x=\sqrt{2y+3}+4y \ (1)$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{2t+3}+4t, \forall t\ge -\frac{3}{2}$.

Ta có : $f'(t)=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}+4>0, \forall t>-\frac{3}{2}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right)$, do đó từ

$(1)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$x=\sqrt[5]{x\left(1-x^3\right)+15\left(x^2+1\right)-29}\Leftrightarrow x^5+x^4-15x^2-x-14=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2-1\right)\left(x^2+3x+7\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-2=0\\x^2-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=-1\\x=1\Rightarrow y=1\\x=2\Rightarrow y=2\end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\{(-1;-1);(1;1);(2;2)\}$.

Bình luận : Bài toán vẫn là bài toán xét hàm số đại diện trên một tập xác định đã có trước của bài toán mà không cần suy thêm tập xác định nữa. Việc phát hiện ra hàm số đại diện và giải hệ này không hề khó.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+5}=\sqrt{y-1}+\sqrt{y-3}+\sqrt{y-5}\\x^2+y^2+x+y=80\end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích : Với hệ này ta nhận thấy phương trình thứ hai trong hệ tuy là một phương trình bậc hai ẩn ẩn quen thuộc nhưng ta không tìm được delta chính phương nên ta sẽ dồn chú ý vào phương trình thứ nhất trong hệ. Phương trình này đã cô lập hai biến và không khó để nhận thấy chúng có mối liên quan đến nhau về cấu trúc trên phương trình, tức là bên phải các đại lượng còn lại sẽ quan đến $y-5$ và bên trái các đại lượng còn lại sẽ liên quan $x+1$ thông qua các số $2,4$

Cụ thể ta sẽ có:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)+2}+\sqrt{(x+1)+4}=\sqrt{y-5}+\sqrt{(y-5)+2}+\sqrt{(y-5)+4}.$$

Và tới đây ta đã có được định dạng của hàm số đại diện :

$f(t)=\sqrt{t}+\sqrt{t+2}+\sqrt{t+4},\forall t\ge 0$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}+\dfrac{1}{2\sqrt{t+2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{t+4}}>0,\forall t>0$.

Và như thế hàm số $f(t)$ luôn tăng trên $[0;+\infty)$

Như thế ta đã tìm được mối quan hệ giữa x,y và hệ đã hoàn toàn được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện: $\begin{cases}x\ge -1\\y\ge 5\end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1+2}+\sqrt{x+1+4}=\sqrt{y-5}+\sqrt{y-5+2}+\sqrt{y-5+4}\ (1).$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t}+\sqrt{t+2}+\sqrt{t+4},\forall t\ge 0$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}+\dfrac{1}{\sqrt{t+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{t+4}}\right)>0,\forall t>0$.

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Do đó từ $(1)\Leftrightarrow f(x+1)=f(y-5)\Leftrightarrow y=x+6$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có được phương trình :

$$x^2+7x-19=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-7+5\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-7-5\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có $x=\dfrac{-7+5\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y=\dfrac{7+5\sqrt{5}}{2}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x,y)=\left(\dfrac{-7+5\sqrt{5}}{2};\dfrac{7+5\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bình luận : Bài toán không khó để nhận ra hàm số đại diện và đây là bài toán khá cơ bản có nhiều đường hướng giải khác như liên hiệp.

Ví dụ 5 :

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-y^2+2(x-2y)=3+2\left(\sqrt{y+3}-\sqrt{x+2}\right) \\ \sqrt{x+1}+6\sqrt{y-1}=17-7x+6y \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, ta nhận thấy cả hai phương trình trong hệ đều có thể cô lập được hai vế x,y. Tuy nhiên ở phương trình sự cô lập này lại không mang cho ta định dạng đối xứng được, còn phương trình thứ nhất tuy rắc rối nhưng các đại lượng x,y khi cô lập đều có tính đối xứng và đồng bậc. Do đó khả năng xét hàm số ở phương trình thứ nhất rất cao.

Cụ thể ta sẽ có phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình :

$$x^2+2x-y^2-4y=3+2\sqrt{y+3}-2\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1+2\sqrt{x+2}=y^2+4y+4+2\sqrt{y+3}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+2\sqrt{(x+1)+1}=(y+2)^2+2\sqrt{(y+2)+1}.$$

Tới đây ta chỉ cần xét hàm số $f(t)=t^2+2\sqrt{t+1}, t\ge 0$, ta có

$$f'(t)=2t+\frac{1}{\sqrt{t+1}}>0, \forall t\ge 0.$$

Vậy hệ đã có mối liên hệ giữa x,y và hoàn toàn được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x\ge -1 \\ y\ge 1\end{cases}$.

Phương trình thứ nhất đã cho được biến đổi lại thành phương trình :

$$x^2+2x-y^2-4y=3+2\sqrt{y+3}-2\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1+2\sqrt{x+2}=y^2+4y+4+2\sqrt{y+3}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+2\sqrt{(x+1)+1}=(y+2)^2+2\sqrt{(y+2)+1}\ (1).$$

Xét hàm số $f(t)=t^2+2\sqrt{t+1}, t\ge 0$. Ta có $f'(t)=2t+\dfrac{1}{\sqrt{t+1}}>0, \forall t\ge 0$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[0;+\infty)$. Do đó từ

$(1) \Leftrightarrow f(x+1) = f(y+2) \Leftrightarrow y = x-1$.

Mặt khác $y \ge 1 \Leftrightarrow x-1 \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 2$

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$\sqrt{x+1} + 6\sqrt{x-2} = 11 - x \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - 2 + 6\left(\sqrt{x-2} - 1\right) + x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{6(x-3)}{\sqrt{x-2}+1} + x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{6}{\sqrt{x-2}+1} + 1\right)}_{P} = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Vì $x \ge 2 \Rightarrow P > 0$. Với $x = 3 \Rightarrow y = 2$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y) = (3;2)$.

Bình luận : Bài hệ tuy đơn giản nhưng nếu máy móc quá thì sẽ đi lệch hướng. Một lần nữa ta đã thấy sự hiệu quả của phương pháp hàm số cho lời giải thật ngắn gọn và đẹp.

Ví dụ 6 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^7 + 2x^5 + 6x - 9 + \sqrt{5x+4} = 3y \\ y^7 + 2y^5 + 6y - 9 + \sqrt{5y+4} = 3x \end{cases} \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$

Phân tích : Với hệ này, chúng ta nhận thấy được hệ đang xét là hệ đối xứng loại 2 nên ta sẽ ưu tiên ngay một công cụ mạnh trong việc bắt nhân tử của loại hệ này là trừ vế theo vế hai phương trong hệ cho nhau, ta sẽ được phương trình :

$$x^7 + 2x^5 + 6x + \sqrt{5x+4} - y^7 - 2y^5 - 6y - \sqrt{5y+4} = 3y - 3x$$

$$\Leftrightarrow x^7 + 2x^5 + 9x + \sqrt{5x+4} = y^7 + 2y^5 + 9y + \sqrt{5y+4}$$

Phương trình cuối cùng ta thu được rõ ràng có tính đối xứng hai biến đã cô lập nê ta tính đến xét hàm số đại diện sau :

Ta xét hàm số : $f(t) = t^7 + 2t^5 + 9t + \sqrt{5t+4}, t \ge -\frac{4}{5}$.

Ta có : $f'(t) = 7t^6 + 10t^4 + \frac{5}{2\sqrt{5t+4}} + 9 > 0, t > -\frac{5}{4}$.

Và tới đây ta đã có được kết luận cho mối quan hệ giữa x, y và hệ đã hoàn toàn được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x \ge -\frac{5}{4} \\ y \ge -\frac{5}{4} \end{cases}$.

Lấy hai phương trình trong hệ trừ vế theo vế ta có được phương trình :

$$x^7 + 2x^5 + 6x + \sqrt{5x+4} - y^7 - 2y^5 - 6y - \sqrt{5y+4} = 3y - 3x$$

$\Leftrightarrow x^7+2x^5+9x+\sqrt{5x+4}=y^7+2y^5+9y+\sqrt{5y+4}\ (1)$.

Ta xét hàm số $f(t)=t^7+2t^5+9t+\sqrt{5t+4},\forall t\ge -\frac{4}{5}$.

Ta có $f'(t)=7t^6+10t^4+\frac{5}{2\sqrt{5t+4}}+9>0,t>-\frac{4}{5}$.

Do đó hàm số $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\left[-\frac{4}{5};+\infty\right)$.

Do đó từ $(1)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Thế vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có phương trình :

$x^7+2x^5+3x+\sqrt{5x+4}-9=0\ (2)$.

Xét hàm số $f(x)=x^7+2x^5+3x+\sqrt{5x+4}-9,\forall x\ge -\frac{4}{5}$.

Ta có $f'(x)=7x^6+10x^4+\frac{5}{2\sqrt{5x+4}}+3>0,\forall x>-\frac{4}{5}$. Do đó hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\left[-\frac{4}{5};+\infty\right)$ nên phương trình $f(x)=0$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Mà $f(1)=0\Leftrightarrow x=1$ là nghiệm duy nhất của $f(x)=0$. Suy ra $y=1$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(1;1)$.

Bình luận : Bài toán kết hợp giữa sự quen thuộc và cho một lời giải khá mới so với phương pháp thường dùng của hệ này, cách xử lý phương trình cuối cùng để tìm nghiệm chúng ta cũng xử lý bằng hàm số và sử dụng định lý đã nhắc đến ở lý thuyết để khẳng định nghiệm của phương trình.

Ví dụ 7 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\left(x^2-7x+14\right)=5y^2-23y+32 \\ x^2+8y^2=y^3+28y-23 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này ta dễ dàng nhận thấy cả hai phương trình trong hệ đều có thể cô lập hai biến x,y. Do đó ta sẽ biến đổi lại hệ cho dễ nhìn hơn.

Cụ thể ta có : $\begin{cases} x^3-7x^2+14x-32-5y^2+23y=0 \\ x^2+8y^2=y^3+28y-23 \end{cases}$, giờ hệ đã cho ta hình thức dễ nhìn hơn.

Tuy vậy, trên mỗi phương trình ta nhận thấy dù các biến có thể cô lập nhưng đối với phương trình thứ nhất bậc cao nhất của x là 3, bậc cao nhất của y là 2 nên về bậc chúng không tương đồng nên phương trình này không thể đưa được về dạng phương trình đối xứng để xét hàm. Tương tự như vậy với phương trình thứ hai ta cũng có bậc cao nhất của x và y cũng không tương đồng nên khả năng xét hàm số trên phương trình này cũng xem như thất bại. Dù vậy, ta nhận thấy nếu kết hợp hai phương trình lại với nhau thì ta sẽ được một phương cũng cô lập

được x, y nhưng thuận lợi hơn là bậc của x, y lại tương đồng nên khả năng xét hàm số là rất cao.

Do đó ta sẽ đẩy ý tưởng của bài toán đến phương án này. Tức là ta sẽ "ghép và tạo" hai phương trình trong hệ để có được một phương trình có tính đối xứng để xét hàm số.

Ta để ý thấy hệ số của x^2 trên phương trình thứ nhất là -7 và hệ số x^2 là 1 nếu ta cộng hai hệ số này lại ta sẽ được -6. Vậy tỉ lệ hệ số của bậc ba và bậc hai của biến x là $1:(-6)$ nên ta liên tưởng tới $(x-2)^3$. Mặt khác hệ số của y^2 ở phương trình thứ nhất -5, hệ số y^2 ở phương trình thứ hai là 8 nên nếu ta cộng lại ta sẽ có hệ số của y^2 là 3. Chuyển vế ta sẽ được tỉ lệ hệ số của bậc ba và bậc hai đối với biến y là $1:(-3)$ nên ta sẽ nghĩ đến hằng đẳng thức $(y-1)^3$. Vậy với nhận xét này ta sẽ thử thực hiện phép cộng hai vế phương trình lại với nhau.

Cụ thể ta có : $x^3-7x^2+14x-32-5y^2+23y+x^2+8y^2-y^3-28y+23=0$

$\Leftrightarrow x^3-6x^2+14x-y^3+3y^2-5y-9=0$

$\Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-8+2x-4=y^3-3y^2+3y-1+2y-2$

$\Leftrightarrow (x-2)^3+2(x-2)=(y-1)^3+2(y-1)$.

Vậy tới đây ta đã xét được hàm số đại diện $f(t)=t^3+2t, \forall t\in\mathbb{R}$. Không khó để khẳng định được hàm số tăng trên $\mathbb{R}$. Như thế ta đã tìm được mối quan hệ giữa x, y và hệ hoàn toàn được giải quyết.

Lời giải : Cộng vế theo vế hai phương trình trong hệ ta có được phương trình :

$x^3-6x^2+14x-y^3-3y^2-5y-9=0$

$\Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-8+2x-4=y^3-3y^2+3y-1+2y-2$

$\Leftrightarrow (x-2)^3+2(x-2)=(y-1)^3+2(y-1)$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t, \forall t\in\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=3t^2+2>0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$. Do đó từ

$(1)\Leftrightarrow f(x-2)=f(y-1)\Leftrightarrow x-2=y-1\Leftrightarrow x=y+1$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$(y+1)^2+8y^2=y^3+28y-23\Leftrightarrow y^3-9y^2+26y-24=0$

$$\Leftrightarrow (y-2)(y-3)(y-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-2=0 \\ y-3=0 \\ y-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2\Rightarrow x=3 \\ y=3\Rightarrow x=4 \\ y=4\Rightarrow x=5 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y)=\{(3;2);(4;3);(5;4)\}$.

Bình luận : Bài toán này được sử dụng phương pháp cộng trừ để tạo hàm số đại diện, một phương pháp cũng thường được sử dụng để tạo hàm số đại diện.

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 5\left(x^2+2\right)+y^2+x\left(2\sqrt{4x^2+2}-1\right)=\left(y+3\right)\left(\sqrt{y^2+6y+11}+7\right) \\ x^2+2y^2-x-y-2=0 \end{cases} \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$$

Phân tích : Bài hệ khá khó khăn để chúng ta phán đoán. Tuy nhiên, như phân tích ở phương pháp cộng trừ nhân chéo bắt nhân tử chung với kiểu hệ này thường chúng ta sẽ cho hai căn bằng nhau và tìm các phép thử để tạo mối quan hệ "ghép và tạo" tìm đường giải quyết vì tuy phương trình thứ hai có dạng bậc hai hai ẩn nhưng lại không có delta chính phương.

Với các làm như vậy, ta biết được khi trừ hai phương trình trong hệ cho nhau vế theo vế ta sẽ được một phương trình bắt được nhân tử chung là $2x-y-3$.

Do đó ta biến đổi hệ đã cho thành hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 5x^2+y^2-x-7y-11+2x\sqrt{4x^2+2}-\left(y+3\right)\sqrt{y^2+6y+11}=0 \\ x^2+2y^2-x-y-2=0 \end{cases}$$

Lấy hai phương trình trừ nhau vế theo vế ta sẽ có được phương trình :

$$4x^2-y^2-6y-9+2x\sqrt{4x^2+2}-\left(y+3\right)\sqrt{y^2+6y+11}=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+2x\sqrt{4x^2+2}=\left(y+3\right)^2+\left(y+3\right)\sqrt{y^2+6y+11}$$

$$\Leftrightarrow 2x\left(2x+\sqrt{\left(2x\right)^2+2}\right)=\left(y+3\right)\left(y+3+\sqrt{\left(y+3\right)^2+2}\right)$$

Phương trình cuối cùng đã thể hiện rõ cấu trúc của hàm số đại diện mà ta cần phải xét đó là hàm số :

$$f\left(t\right)=t\left(t+\sqrt{t^2+2}\right),\forall t\in\mathbb{R}.$$

Ta có : $f'\left(t\right)=t+\sqrt{t^2+2}+\left(1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+2}}\right)t$

$$=\left(t+\sqrt{t^2+2}\right)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+2}}\right)=\frac{\left(\sqrt{t^2+2}+t\right)^2}{\sqrt{t^2+2}}>0.$$

Vậy xem như nút thắt mối quan hệ của x,y xem như được giải quyết và hệ đã được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải : Hệ phương trình đã cho được biến đổi lại thành hệ phương trình :

$$\begin{cases} 5x^2+y^2-x-7y-11+2x\sqrt{4x^2+2}-\left(y+3\right)\sqrt{y^2+6y+11}=0\left(1\right) \\ x^2+2y^2-x-y-2=0\left(2\right) \end{cases}$$

Lấy $\left(1\right)-\left(2\right)$ vế theo vế ta sẽ có được phương trình:

$$4x^2-y^2-6y-9+2x\sqrt{4x^2+2}-\left(y+3\right)\sqrt{y^2+6y+11}$$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 2x\sqrt{4x^2+2} = (y+3)^2 + (y+3)\sqrt{y^2+6y+11}$

$\Leftrightarrow 2x\left(2x+\sqrt{(2x)^2+2}\right) = (y+3)\left(y+3+\sqrt{(y+3)^2+2}\right)$ (3)

Xét hàm số $f(t) = t\left(t+\sqrt{t^2+2}\right), \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta có : $f'(t) = \left(t+\sqrt{t^2+2}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{t^2+2}}\right) = \frac{\left(\sqrt{t^2+2}+t\right)^2}{\sqrt{t^2+2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (3) ta có : $f(2x) = f(y+3) \Leftrightarrow y = 2x-3$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta sẽ có phương trình :

$$9x^2 - 27x + 19 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{9+\sqrt{5}}{6} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ x = \frac{9-\sqrt{5}}{6} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm :

$$(x,y) = \left\{\left(\frac{9+\sqrt{5}}{6};\frac{\sqrt{5}}{3}\right);\left(\frac{9-\sqrt{5}}{6};-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right\}.$$

Bình luận : Bài toán này là một câu trả lời cho phần bắt nhân tử bằng phương pháp nhân lượng liên hiệp có liên quan đến các bài toán xét hàm số đại diện mà chúng tôi đã phân tích. Bài toán này chúng ta sẽ không dùng liên hiệp được vì dấu của các đại lượng cần liên hiệp không rõ nét và nếu có ta phải xử lý khá khó khăn. Và điều này minh chứng khi qua các phép thử như phần phương pháp cộng trừ nhân chéo bắt nhân tử chung với dạng hệ loại này ta thấy khi cho hai căn bằng nhau ta sẽ có :

$$\sqrt{4x^2+2} = \sqrt{y^2+6y+11} \Leftrightarrow 4x^2 = (y+3)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2x-3 \\ y = -2x-3 \end{array}\right..$$

Nhưng qua phép thử ta chỉ có $y = 2x-3$ là cho kết quả đúng! Và bài toán này cũng được xét trên một hàm số đại diện mà miền nghiệm đã xác định được trước, phương pháp này cũng là một ứng dụng thường gặp để làm xuất hiện hàm đại diện.

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 17x - 32y = 6x^2 - 9y^2 - 24 \\ (y+2)\sqrt{x+4} + (x+9)\sqrt{2y-x+9} = x^2 + 9y + 1 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

(Thi thử chuyên Vĩnh Phúc khối A,B năm 2015)

Phân tích:

Bài toán này, nhìn vào cấu trúc của phương trình thứ nhất trong hệ dễ dàng phát hiện ra hai biến có thể cô lập được, cộng với phương trình thứ hai trong hệ

chẳng tìm được mối liên hệ gì nên khả năng xét hàm số ở phương trình thứ nhất là vô cùng lớn.

Xét phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$$x^3 - y^3 + 17x - 32y = 6x^2 - 9y^2 - 24$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 17x + 24 = y^3 - 9y^2 + 32y \ (*)$$

Nếu ngay từ phương trình này ta đi tìm dạng đối xứng là rất khó, ta chú ý cả hai vế phương trình này đều có thể đưa về hằng đẳng thức bậc ba nên ta sẽ có một bước biến đổi về điều đó. Và vì vế trái có đủ thành phần nên ta sẽ biến đổi về trái sau đó ta sẽ định dạng vế tráivà biến đổi vế phải như các phần trước chúng tôi đã phân tích ta sẽ tìm được :

$$(*) \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 5(x-2) = y^3 - 9y^2 + 32y - 42$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3 + 5(x-2) = y^3 - 9y^2 + 32y - 42$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3 + 5(x-2) = (y-3)^3 + 5(y-3).$$

Tới đây ta đã biết được hàm số đại diện cần xét chính là $f(t) = t^3 + 5t, \forall t \in \mathbb{R}$.

Và không có khó khăn gì để kết luận tính đơn điệu của nó. Và như vậy xem như bài toán đã có mối quan hệ và hệ hoàn toàn được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x \geq -4 \\ 2y - x + 9 \geq 0 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$x^3 - 6x^2 + 17x - 17 = y^3 - 9y^2 + 32y - 42$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3 + 5(x-2) = (y-3)^3 + 5(y-3) \ (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 5t, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó từ

$$(1) \Leftrightarrow f(x-2) = f(y-3) \Leftrightarrow y = x + 1.$$

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có được phương trình :

$$(x+3)\sqrt{x+4} + (x+9)\sqrt{x+11} = x^2 + 9x + 10$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 36x + 40 - 4(x+3)\sqrt{x+4} - 4(x+9)\sqrt{x+11} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2 + 3x - 40\right) + (x+3)\left(x + 7 - 4\sqrt{x+4}\right) + (x+9)\sqrt{x+11}\left(\sqrt{x+11} - 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-5)(x+8) + (x+3)\left(\frac{(x+3)(x-5)}{x+7+4\sqrt{x+3}}\right) + \frac{(x+9)(x-5)\sqrt{x+11}}{\sqrt{x+11}+4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\underbrace{\left(2(x+8) + \frac{(x+3)^2}{x+7+4\sqrt{x+3}} + \frac{(x+9)\sqrt{x+11}}{\sqrt{x+11}+4}\right)}_{T} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow y = 6 \text{ vì } T > 0, \forall x \geq -4.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(5;6)$.

Bình luận : Bài toán này khá khó vì việc xử lý phương trình thứ nhất cũng đòi hỏi một chút tinh tế. Tuy nhiên nếu quan sát và đã làm quen thì khi tách được như vậy, ta vẫn có thể sử dụng hằng đẳng thức để rút được mối quan hệ giữa x,y. Ở phương trình thứ hai cần một chút "khéo léo và tinh tế" nếu không chúng ta sẽ dính dáng đến phần đánh giá cũng không hề dễ chứ không đơn giản trong lời giải.

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2+3=y(y-2)-(y+5)x \\ x-4=2\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{y-10}\right) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, bước đầu tiên nhận xét là phương trình thứ hai đơn giản và tính cô lập đã có nên khả năng xét hàm số này sẽ rất cao. Cụ thể ta có sẽ biến đổi sau : $2\sqrt{y+2}=-x-1+2\sqrt{x-3}$.

Tới đây ta sẽ có $\sqrt{x-3}$ tương ứng $\sqrt{y-10}$ nên $x-3=y-10\Rightarrow x=y-7$.

Nhưng trên phương trình ta lại không có x tương ứng với y ở ngoài căn. Do đó việc xét hàm số đại diện trên phương trình này không thể thực hiện được.

Mặt khác ta nhận thấy phương trình thứ nhất trong hệ thật chất là một phương trình bậc hai hai ẩn nên ta sẽ hy vọng tách được nhân tử với yêu cầu có delta chính phương.

Cụ thể ta sẽ có :

$$2x^2-y^2+xy+5x+2y+3=0\Leftrightarrow 2x^2+(5+y)x-y^2+2y+3=0$$

Ta có $\Delta=(5+y)^2+8\left(y^2-2y-3\right)=(3y-1)^2$. Vậy phương trình thứ này tách được nhân tử và được viết lại như sau : $(x+y+1)(y-2x-3)=0$. Với điều kiện $\begin{cases} x\ge 3 \\ y\ge 10 \end{cases}\Rightarrow x+y+1>0$.

Thế $y=2x+3$ vào phương trình thứ hai ta sẽ có : $x-4=2\sqrt{x-3}-2\sqrt{2x-7}$

Tới đây ta để ý là $(2x-7)-(x-3)=x-4$.

Như vậy phương trình này sẽ được viết lại là: $2x-7+2\sqrt{2x-7}=x-3+2\sqrt{x-3}$.

Và tới đây cấu trúc hàm số đại diện đã thể hiện rõ ràng. Như vậy bài toán hoàn toàn được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x\ge 3 \\ y\ge 10 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được viết lại thành phương trình :

$$2x^2-y^2+xy+5x+2y+3=0\Leftrightarrow 2x^2-xy+3x+2xy-y^2+3y+2x-y+3=0$$

$$\Leftrightarrow x(2x-y+3)+y(2x-y+3)+2x-y+3=0\Leftrightarrow(x+y+1)(2x-y+3)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x-y+3=0\Leftrightarrow y=2x+3 \text{ vì } \begin{cases} x\ge 3 \\ y\ge 4 \end{cases}\Rightarrow x+y+1>0.$$

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$x-4=2\sqrt{x-3}-2\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow (2x-7)-(x-3)=2\sqrt{x-3}-2\sqrt{2x-1}$

$\Leftrightarrow 2x-7+2\sqrt{2x-7}=x-3+2\sqrt{x-3}\ (1)$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+2t, \forall t \ge 0$. Ta có $f'(t)=2t+2>0, \forall t \ge 0$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn tăng trên $[0;+\infty)$.

Do đó từ $(1) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2x-7}\right)=f\left(\sqrt{x-3}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2x-7}=\sqrt{x-3} \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow y=17$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x.y)=(4;17)$.

Bình luận: Bài toán trên theo nguyên tắc tư duy tự nhiên, chắc chắn ta sẽ cần kiểm tra tính phân tích nhân tử của phương trình thứ nhất trước. Tuy nhiên, trên suy nghỉ xét hàm đại diện thì bắt đầu từ phương trình trình thứ hai cũng hợp lí. Đây là ví dụ minh họa cho hướng đi sử dụng phép thế để tạo hàm số đại diện. Tiếp theo ta sẽ nghiên cứu một ví dụ tương tự như vậy

Ví dụ 11: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3-10y^2+14y+52=(x+1)\left(3\sqrt{3x+1}-6x+26\right) \\ 3x^2-8y^2=10x-7 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Phân tích : Với hệ này, ta nhận thấy phương trình thứ hai tuy hình thức đơn giản nhưng những dấu hiệu có được của nó cũng đơn giản như hình thức của nó vì ta chẳng bắt đầu được gì từ phương trình này cả. Hình thức phương trình thứ nhất cũng chẳng khá hơn gì vì sự sắp xếp của nó của bài toán chẳng đưa ta đến gì ở vế phải nhưng có một điểm hở là vế trái của phương trình này toàn chứa biến y nên ta sẽ cố gắng biến đổi cho phương trình này dễ nhìn hơn.

Cụ thể ta biến đổi phương trình thứ nhất trong hệ trở thành :

$y^3-10y^2+14y+52=3(x+1)\sqrt{3x+1}-(6x-26)(x+1)$

$\Leftrightarrow y^3-10y^2+14y+6x^2-20x+26=3(x+1)\sqrt{3x+1}\ (*)$

Ở vế trái $(*)$ ta nhận thấy

$3(x+1)\sqrt{3x+1}=(3x+1+2)\sqrt{3x+1}=\left(\sqrt{3x+1}\right)^3+2\sqrt{3x+1}$ là một dấu hiệu đáng mừng, vì từ đây ta có thể nhận thấy tính cô lập và xét hàm số đại diện rất là cao. Việc còn lại là vế trái của (*) chỉ cần ta có được đó là một biểu thức toàn chứa biến y và có thể đưa về định dạng phương trình như vế phải nữa là xem như ý tưởng xét hàm số đại diện đã hoàn toàn thành công.

Nhận xét thấy vế trái (*) tự nhiên xuất hiện đại lượng $6x^2-20x=2\left(3x^2-10x\right)$.

Quay ngược lại phương trình thứ hai trong hê ta lại có :

$3x^2-10x=8y^2-7 \Leftrightarrow 6x^2-20x=16y^2-14$.

Và như thế bằng phép thế từ phương trình thứ hai trong hệ xuống (*) ta sẽ có vế trái là một biểu thức chỉ chứa biến y.

Cụ thể ta sẽ có :

$$y^3-10y^2+14y+16y^2-14+26=\left(\sqrt{3x+1}\right)^3+2\sqrt{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow y^3+6y^2+12y+8+2y+4=\left(\sqrt{3x+1}\right)^3+2\sqrt{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow (y+2)^3+2(y+2)=\left(\sqrt{3x+1}\right)^3+2\sqrt{3x+1}.$$

Lúc này ta xét hàm số đại diện là $f(t)=t^3+2t,\forall t\in\mathbb{R}$. Và không khó khăn để khẳng được tính tăng của hàm số này. Vậy là ta đã tìm được mối quan hệ giữa x,y và hệ hoàn toàn được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $x\ge -\frac{1}{3}$.

Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} y^3-10y^2+14y+6x^2-20x+26=3(x+1)\sqrt{3x+1}\,(1) \\ 6x^2-20x=16y^2-14\,(2) \end{cases}$$

Thế $6x^2-20x=16y^2-14$ vào (1) ta có phương trình :

$$y^3+6y^2+14y+12=3(x+1)\sqrt{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow y^3+6y^2+12y+8+2y+4=(3x+1+2)\sqrt{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow (y+2)^3+2(y+2)=\left(\sqrt{3x+1}\right)^3+\sqrt{3x+1}\ (3)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t,\forall t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=3t^2+2>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ $(3)\Leftrightarrow f(y+2)=f\left(\sqrt{3x+1}\right)\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}=y+2$.

Kết hợp với (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{3x+1}=y+2 \\ 3x^2-10x=8y^2-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge -2 \\ 3x=y^2+4y+3 \\ 3x^2-10x=8y^2-7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\ge -2 \\ x=\dfrac{y^2+4y+3}{3} \\ 3\left(\dfrac{y^2+4y+3}{3}\right)^2-10\left(\dfrac{y^2+4y+3}{3}\right)=8y^2-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge -2 \\ x=\dfrac{y^2+4y+3}{3} \\ y\left(y^3+8y^2-12y-16\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2 \\ x = \dfrac{y^2+4y+3}{3} \\ y(y-2)(y^2+10y+8)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2 \\ x = \dfrac{y^2+4y+3}{3} \\ y=0 \vee y=2 \vee y=-5\pm\sqrt{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2 \\ x = \dfrac{y^2+4y+3}{3} \\ y=0 \vee y=2 \vee y=-5+\sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=5-2\sqrt{7} \\ y=-5+\sqrt{7} \end{cases} \end{array}\right. .$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là

$(x,y)=\left\{(1;0);(5;2);\left(5-2\sqrt{7};-5+\sqrt{7}\right)\right\}$.

Bình luận : Bài toán này cũng có ý tưởng sử dụng phép thế để tạo được hàm số đại diện, nhưng có độ khó hơn ví dụ trước.

Ví dụ 12:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y=2+3\sqrt{x^2-x-4} \\ 3y^2(y-3)+11(y-4)=2\sqrt[3]{13-x^3}-3x^3 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích: Với hệ này đầu tiên ta nhận thấy cấu trúc của phương trình thứ nhất có thể chuyển vế sử dụng phép nâng lũy thừa để đưa về phương trình bậc hai hai ẩn, với hy vọng sẽ tìm được nhân tử.

Cụ thể ta có phương trình thứ nhất sẽ biến đổi để trở thành phương trình :

$(x+y-2)^2=9(x^2-x-4)\Leftrightarrow 8x^2-y^2-2xy-5x+4y-40=0$

Kiểm tra phương trình tách được nhân tử nhưng lại không có được delta chính phương, như vậy với phương trình này ta sẽ không tìm mối quan hệ giữa x,y ở dạng có thể sử dụng phép thế có lợi. Do đó mọi trọng tâm phải đổ dồn về phương trình thứ hai trong hệ. Để ý phương trình này có hai đại lượng tham gia chính là $y,\sqrt[3]{13-x^3}$ và rõ ràng hai đại lượng này đã cô lập nên khả năng xét hàm số rất cao.

Tuy nhiên ta để ý vế phải phương trình thứ hai ta có hai đại lượng $2\sqrt[3]{13-x^3},3x^3$ nên ta sẽ biến đổi chúng theo đúng một đại lượng $\sqrt[3]{13-x^3}$ dựa trên ý tưởng $3x^3$ là bậc ba đối với đại lượng $\sqrt[3]{13-x^3}$

Cụ thể ta sẽ có được : $2\sqrt{13-x^3}=2\sqrt[3]{13-x^3}+3(13-x^3)-39$.

Với bước tách này ta quan sát thấy vế trái của phương trình thứ hai ta có đó là một đa thức bậc ba với biến y đó là : $3y^3-9y^2+11y-44$. Không khó để nhận thấy tỉ lệ hệ số của bậc ba và bậc hai của biến y là $3:(-9)=1:(-3)$ nên ta liên tưởng đến hằng đẳng thức $(y-1)^3=y^3-3y^2+3y-1$.

Do đó ta tiến hành tách phương trình thứ hai thành phương trình :

$3y^2-9y^2+11y-44=3(13-x^3)+2\sqrt[3]{13-x^3}-39$

$\Leftrightarrow 3(y-1)^3+2y-2=3(13-x^3)+2\sqrt[3]{13-x^3}$

$\Leftrightarrow 3(y-1)^3+2(y-1)=3(13-x^3)+2\sqrt[3]{13-x^3}$.

Và tới đây hình dáng xét hàm số đại diện đã xuất hiện, đó là hàm số $f(t)=3t^3+2t, \forall t\in\mathbb{R}$.

Không khó thấy hàm này đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ nên từ đây ta đã có mối quan hệ giữa hai đại lượng y và $\sqrt[3]{13-x^3}$. Vậy xem như bài toán đã được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x^2-x-4\ge 0\\ x+y\ge 0\end{cases}$.

Phương trình thứ hai trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$3y^3-9y^2+11y-44=2\sqrt[3]{13-x^3}-3x^3$

$\Leftrightarrow 3(y-1)^3+2(y-1)=3(13-x^3)+2\sqrt[3]{13-x^3}$ (1).

Xét hàm số $f(t)=3t^3+2t, \forall t\in\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=6t^2+2>0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ $(1)\Leftrightarrow f(y-1)=f\left(\sqrt[3]{13-x^3}\right)\Leftrightarrow y-1=\sqrt[3]{13-x^3}$.

Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có phương trình :

$x+1+\sqrt[3]{13-x^3}=2+3\sqrt{x^2-x-4}\Leftrightarrow \sqrt[3]{13-x^3}=1-x+2\sqrt{x^2-x-4}$ (2).

Đặt $\begin{cases} u=1-x\\ v=\sqrt{x^2-x-4}\end{cases}\Rightarrow u^3-3v^2=1-3x+3x^2-x^3-3x^2+3x-12=13-x^3, (v\ge 0)$

Lúc đó phương trình (2) trở thành phương trình :

$\sqrt[3]{u^3-3v^2}=u+2v\Leftrightarrow u^3-3v^2=u^3+6u^2v+12uv^2+8v^3$

$\Leftrightarrow 3v^2+6u^2v+12uv^2+8v^3=0\Leftrightarrow v\left(6(u+v)^2+2v^2+3v\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=0\\ \begin{cases} u=0\\ v=0\end{cases}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-x-4}=0\\ \begin{cases}1-x=0\\ \sqrt{x^2-x-4}=0\end{cases}(*)\end{array}\right. \Leftrightarrow x^2-x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\Rightarrow y=1+\sqrt[3]{\dfrac{13-5\sqrt{17}}{2}}\\ x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\Rightarrow y=1+\sqrt[3]{\dfrac{13+5\sqrt{17}}{2}}\end{array}\right..$$

Vì $(*)$ vô nghiệm.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là :

$$(x,y)=\left\{\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2};1+\sqrt[3]{\frac{13-5\sqrt{17}}{2}}\right);\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2};1+\sqrt[3]{\frac{13+5\sqrt{17}}{2}}\right)\right\}.$$

Bình luận : Bài toán để tìm được phương trình có thể xét hàm số tương đối khó, đòi hỏi một chút khéo léo và giải phương trình tìm nghiệm có thể dùng đánh giá hoặc liên hiệp. Tuy nhiên hai cách giả này đòi hỏi một chút khéo léo nên ẩn phụ hóa là cách giải tự nhiên nhất.

Ví dụ 13:

Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2+3=\left(4x^2-2yx^2\right)\sqrt{3-2y}+\dfrac{4x^2+1}{x}\\ \sqrt{2-\sqrt{3-2y}}=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+x^3}+x+2}{2x+1}\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

(Thi thử GSTT)

Phân tích: Cấu trúc của hệ khá cồng kềnh, tuy nhiên điểm hở mạnh nhất của hệ chính là hệ cho ta được dấu hiệu để công phá hệ này ta không thể bắt đầu từ phương trình thứ hai trong hệ.

Ngoài ra có một điểm hở cũng khá mạnh là cách sắp xếp ở phương trình thứ nhất trong hệ rõ ràng cho $x\neq 0$ nhưng lại sắp xếp ở tích bên vế phải phương trình chứa một thừa số đều gắn với x^2 điều này gợi mở được ta sẽ chia hai vế cho phương trình thứ với x^2 để thu gọn phương trình này.

Cụ thể sau khi chia ta sẽ có phương trình : $2+\dfrac{3}{x^2}=(4-2y)\sqrt{3-2y}+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^3}$.

Phương trình hoàn cô lập được hai biến x,y nên ta sẽ tiến hành cô lập, ta được :

$$-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x}+2=(4-2y)\sqrt{3-2y}.$$

Ở phương trình này ta lại nhận thấy vế phải chứa $\sqrt{3-2y}$ và ta hoàn toàn tách được $4-2y=1+3-2y$, vậy là ta có vế phải là đa thức bậc ba với đại lượng $\sqrt{3-2y}$, thật vậy ta sẽ có biến đổi sau :

$$-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x}+2=(1+3-2y)\sqrt{3-2y}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x}+2=(3-2y)\sqrt{3-2y}+\sqrt{3-2y}$$

Mặt khác vế trái ta nhận thấy hệ số bậc ba và bậc hai của đại lượng $\frac{1}{x}$ là $(-1):3$ nên ta sẽ đẩy ý tưởng tách vế trái của phương trình này theo hằng đẳng thức $\left(1-\frac{1}{x}\right)^3$, khi đó ta sẽ có phương trình:

$$1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}+1-\frac{1}{x}=\left(\sqrt{3-2y}\right)^3+\sqrt{3-2y}$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{x}\right)^3+1-\frac{1}{x}=\left(\sqrt{3-2y}\right)^3+\sqrt{3-2y}.$$

Và tới đây cấu trúc của hàm số đại diện đã hiện rõ. Và như thế hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện: $\begin{cases}2-\sqrt{3-2y}\geq 0\\ 3-2y\geq 0\\ x\neq 0\\ x\neq -\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\\ x\neq 0\\ x\neq-\frac{1}{2}\end{cases}.$

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình:

$$2+\frac{3}{x^2}=(4-2y)\sqrt{3-2y}+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3}\Leftrightarrow-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x}+2=(1+3-2y)\sqrt{3-2y}$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{x}\right)^3+1-\frac{1}{x}=\left(\sqrt{3-2y}\right)^3+\sqrt{3-2y}\ (*).$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t,\forall t\in\mathbb{R}$. Ta có : $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ $(*)\Leftrightarrow f\left(1-\frac{1}{x}\right)=f\left(\sqrt{3-2y}\right)\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}=\sqrt{3-2y}$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình:

$$\sqrt{2-\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{\sqrt[3]{2x^2+x^3}+x+2}{2x+1}\Leftrightarrow(2x+1)\sqrt{1+\frac{1}{x}}=x+2+x\sqrt[3]{\frac{2}{x}+1}$$

$$\Leftrightarrow\left(2+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}=1+\frac{2}{x}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}\Leftrightarrow\left(1+1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}=1+\frac{2}{x}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^3=1+\frac{2}{x}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}\quad(1)$$

Xét hàm số $f(t)=u^3+u,u\in\mathbb{R}$.

Ta có : $f'(u)=3u^2+1>0,\forall u\in\mathbb{R}$

Do đó từ $(1) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=f\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}\right) \Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{1}{x}}=\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)^3=\left(1+\frac{2}{x}\right)^2$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+x^3=1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

Thử lại ta có $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là : $(x,y)=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)$.

Bình luận: Bài toán tuy có điểm hở mạnh nhưng là một bài toán thuần hàm số từ tìm mối quan hệ giữa x,y và cả tìm nghiệm. Đây là một kiểu bài toán cũng thường được ra trong các đề thi thử đại học cũng nhưng chính thức.

Ví dụ 14: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+3y+1=y^2-\frac{1}{y}+\frac{3x+4}{\sqrt{x+1}} \\ \sqrt{9y-2}+\sqrt[3]{7x+2y+2}=2y+3 \end{cases}$ $(x,y\in \mathbb{R})$

Phân tích : Với bài toán này, để công phá ta cần phải công phá phương trình trình thứ nhất trong hệ để tìm mối quan hệ giữa x,y và cũng nhận thấy rằng phương trình này hoàn toàn có thể cô lập được hai biến x,y nên khả năng xét hàm số rất cao.

Cụ thể ta có phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình :

$$x+1-\frac{3x+4}{\sqrt{x+1}}=y^2-3y-\frac{1}{y}.$$

Ở vế phải ta nhận thấy $x+1$ là bậc hai của $\sqrt{x+1}$ và $3x+4=3(x+1)+1$.

Vậy ta sẽ tách tiếp như sau : $x+1-3\sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}=y^2-3y-\frac{1}{y}$.

Phương trình cuối đã định dạng xét hàm số đại diện $f(t)=t^2-3t-\frac{1}{t}, t>0$.

Ta có $f'(t)=2t-3+\frac{1}{t^2}=\frac{2t^3-3t+1}{t^2}=\frac{(2t+1)(t+1)^2}{t^2}>0, \forall t>0$.

Vậy hàm số $f(t)$ đơn điệu tăng trên $(0;+\infty)$. Như thế mối quan hệ giữa hai biến x,y đã có và hệ đã hoàn toàn được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x>-1 \\ y\ge \frac{2}{9} \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành hệ phương trình :

$$x+1-\frac{3x+4}{\sqrt{x+1}}=y^2-3y-\frac{1}{y}\Leftrightarrow x+1-3\sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}=y^2-3y-\frac{1}{y}\ (1).$$

Xét hàm số $f(t)=t^2-3t-\frac{1}{t},\forall t>0$.

Ta có $f'(t)=2t-3+\frac{1}{t^2}=\frac{(2t+1)(t-1)^2}{t^2}>0,\forall t>0$.

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến với mọi $t>0$.

Do đó từ $(1)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+1}\right)=f(y)\Leftrightarrow y=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x=y^2-1$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$\sqrt{9y-2}+\sqrt[3]{7y^2+2y-5}=2y+3\Leftrightarrow y+2-\sqrt{9y-2}+y+1-\sqrt[3]{7y^2+2y-5}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(y-2)(y-3)}{y+2+\sqrt{9y-2}}+\frac{(y+1)(y-2)(y-3)}{(y+1)^2+(y+1)\sqrt[3]{7y^2+2y-5}+\sqrt[3]{\left(7y^2+2y-5\right)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow(y-2)(y-3)\underbrace{\left(\frac{1}{y+2+\sqrt{9y-2}}+\frac{y+1}{(y+1)^2+(y+1)\sqrt[3]{7y^2+7y-5}+\sqrt[3]{\left(7y^2+7y-5\right)^2}}\right)}_{K}=0$$

$$\Leftrightarrow(y-2)(y-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2\Rightarrow x=3\\y=3\Rightarrow x=8\end{array}\right.\text{ vì } K>0,\forall y\ge\frac{2}{9}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\{(3;2);(8;3)\}$.

Bình luận : Bài toán vẫn xoay quanh chọn hàm số đại diện, tuy nhiên để khẳng định tính đơn điệu của hàm số này ta cần độ khéo vì trên thực tế có rất nhiều học sinh tới khúc này hoàn toàn đi giả máy móc đạo hàm bằng 0. Bài toán tìm nghiệm cuối cùng là một phương trình vô tỷ giải bằng phép liên hiệp quen thuộc.

Ví dụ 15: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)\left(y+\sqrt{y^2+3}\right)=3\\x\sqrt{3x-2xy+1}=4xy+3x+1\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích: Với hệ này, có cấu trúc ở phương trình thứ nhất khá quen thuộc và cũng được chúng tôi giải bằng phương pháp nhân lượng liên hiệp. Tuy nhiên, chúng tôi sẽ giải bài toán này theo phương pháp hàm số.

Như ở phần liên hiệp chúng tôi đã phân tích thì phương trình thứ nhất sẽ được đưa về phương trình :

$$\sqrt{x^2+3}+x=\sqrt{y^2+3}-y\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3}+x=(-y)+\sqrt{(-y)^2+3}.$$

Và như vậy định dạng hàm số đại diện đã xuất hiện đó chính là

$f(t)=\sqrt{t^2+3}+t,\forall t\in\mathbb{R}$.

Ta có : $f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+3}}+1=\dfrac{\sqrt{t^2+3}+t}{\sqrt{t^2+3}}\ge\dfrac{|t|+t}{\sqrt{t^2+3}}>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Và như vậy hàm số $f(t)$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$ và lúc này ta có mối quan hệ giữa x,y . Như thế hệ được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải :

Điều kiện : $3x-2xy+1\ge 0$.

Vì $\sqrt{y^2+3}-y>|y|-y\ge 0\Rightarrow\sqrt{y^2+3}-y>0$.

Do đó phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình sau :

$\sqrt{x^2+3}+3=\sqrt{y^2+3}-y\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3}+3=(-y)+\sqrt{(-y)^2+3}\ (1)$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+3}+t,\forall t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+3}}+1=\dfrac{\sqrt{t^2+3}+t}{\sqrt{t^2+3}}\ge\dfrac{|t|+t}{\sqrt{t^2+3}}>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$. Do đó từ $(1)\Leftrightarrow f(x)=f(-y)\Leftrightarrow y=-x$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta có được phương trình :

$x\sqrt{2x^2+3x+1}=-4x^2+3x+1\ (*)$.

Nhận xét với $x=0$ không thỏa phương trình $(*)$

⊕ Trường hợp 1: $x>0$ thì phương trình $(*)$ trở thành phương trình :

$$\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=-4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x}\Leftrightarrow 2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-2\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-6=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)\left(\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-3\right)\Leftrightarrow\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=3\text{ vì }\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2>0$$

$$\Leftrightarrow 2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=9\Leftrightarrow 7x^2-3x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3+\sqrt{37}}{14}\\ x=\dfrac{3-\sqrt{37}}{14}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{37}}{14}\Rightarrow y=\frac{-3-\sqrt{37}}{14}.$$

⊕ Trường hợp 2: $x<0$ thì phương trình $(*)$ trở thành phương trình:

$$-\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=-4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow 2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-6=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-2\right)\left(\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+3\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=2\text{ vì }\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+3>0$$

$$\Leftrightarrow 2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=4 \Leftrightarrow 2x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3+\sqrt{17}}{4} \\ x=\frac{3-\sqrt{17}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{17}}{4} \Rightarrow y=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là

$$(x,y)=\left\{\left(\frac{3+\sqrt{37}}{14};\frac{-3-\sqrt{37}}{14}\right);\left(\frac{3-\sqrt{17}}{4};\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right)\right\}.$$

Bình luận : Bài toán này ở phương trình thứ nhất dù giải bằng liên hiệp hay hàm số đều là lời giải tự nhiên và đẹp. Ở phương trình thứ hai trong hệ nếu ta không phân chia trường hợp thì sẽ dẫn đến sai lầm làm mất nghiệm của phương trình. Về bản chất là sử dụng liên hiệp để tạo hàm số đại diện. Tiếp theo chúng ta sẽ xét một bài toán có sự biến tấu rất tự nhiên của ý tưởng tạo hàm số đại diện theo phương pháp này.

Ví dụ 16: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x+\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)\left(y+\sqrt{y^2+3}\right)y=0 \\ \left(2\sqrt{x+3}+\sqrt{2-y}\right)^2\left(4-3\sqrt{3-y}\right)=\sqrt{2x+y+3}+\sqrt{x+2} \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích : Với hệ này, với phương trình thứ hai ta sẽ không giải quyết được gì vì cấu tạo "rất trơ" của nó. Do đó buộc lòng ta cần phải đầu tư ý tưởng vào phương trình thứ nhất trong hệ.

Quan sát phương trình thứ nhất, ta chưa có nhận thấy điều gì rõ ràng. Tuy nhiên ba con số 3 xuất hiện, chẳng phải ngẫu nhiên và ta tự hỏi là tại sao trong tích hai đại lượng $x+\sqrt{x^2+3}, y+\sqrt{y^2+3}$ sao lại chỉ gắn với biến y mà không gắn với biến x, còn số 3 đứng ngoài tại sao không gắn với y mà gắn với x.

Mặt khác ta nhận thấy rằng

$$\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)=3,\ \left(y+\sqrt{y^2+3}\right)\left(\sqrt{y^2+3}-y\right)=3.$$

Do tính chất nhận xét về sự "ngược nhau " của hai biến x,y ở ngoài căn nên ta sẽ đẩy ý tưởng đưa phương trình thứ nhất trong hệ về phương trình :

$$3x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)+\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)\left(y+\sqrt{y^2+3}\right)y=0$$

$$\Leftrightarrow 3x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)+3\left(y+\sqrt{y^2+3}\right)y=0 \Leftrightarrow x^2-x\sqrt{x^2+3}=y^2+y\sqrt{y^2+3}$$

$$\Leftrightarrow (-x)^2+(-x)\sqrt{(-x)^2+3}=y^2+y\sqrt{y^2+3}.$$

Phương trình cuối gợi cho ta ảnh của hàm số đại diện là $f(t)=t^2+t\sqrt{t^2+3}, \forall t\in\mathbb{R}$. Hàm số này khá quen thuộc qua các ví dụ nên việc khẳng định tính đơn điệu nó không còn khó nữa. Và như vậy mối quan hệ giữa hai biến x,y đã có , hệ đã được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 2 \\ 2x + y + 3 \geq 0 \end{cases}$.

Vì $\sqrt{x^2+3} - x > |x| - x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+3} - x > 0$. Nên ta biến đổi phương trình thứ nhất trong hệ thành

$$3x\left(\sqrt{x^2+3} - x\right) + \left(x + \sqrt{x^2+3}\right)\left(\sqrt{x^2+3} - x\right)\left(y + \sqrt{y^2+3}\right)y = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x\left(\sqrt{x^2+3} - x\right) + 3\left(y + \sqrt{y^2+3}\right)y = 0 \Leftrightarrow x^2 - x\sqrt{x^2+3} = y^2 + y\sqrt{y^2+3}$$

$$\Leftrightarrow (-x)^2 + (-x)\sqrt{(-x)^2+3} = y^2 + y\sqrt{y^2+3} \ (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t\sqrt{t^2+3}, \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 2t + \sqrt{t^2+3} + \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}} \underset{AM-GM}{\geq} 2t + 2|t| > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ $(*) \Leftrightarrow f(-x) = f(y) \Leftrightarrow y = -x$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$\left(2\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}\right)^2\left(4 - 3\sqrt{x+3}\right) = \sqrt{x+3} + \sqrt{x+2} \ (1)$$

Đặt $t = \sqrt{x+2}$, $t \geq 0$. Ta có : $x = t^2 - 2$.

Lúc đó (1) trở thành phương trình :

$$\left(2\sqrt{t^2+1} + t\right)^2\left(4 - 3\sqrt{t^2+1}\right) = \sqrt{t^2+1} + t$$

$$\Leftrightarrow 3\left(2\sqrt{t^2+1} + t\right)\sqrt{t^2+1} + 4\left(\sqrt{t^2+1} + 1\right) = 4\left(2\sqrt{t^2+1} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(15t^2 - 16t + 16\right)\sqrt{t^2+1} = -12t^3 + 20t^2 - 16t + 16$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^2+1} = \frac{-12t^3 + 20t^2 - 16t + 16}{15t^2 - 16t + 16} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1} + 1} = \frac{t^2(5 - 12t)}{15t^2 - 16t + 16} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1} + 1} = \dfrac{5 - 12t}{15t^2 - 16t + 16} \end{array}\right..$$

⊕ Với $t = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = 2$ (thỏa mãn).

⊕ Với $\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1} + 1} = \dfrac{5 - 12t}{15t^2 - 16t + 16} \ (2)$.

- Trường hợp 1 : $t \ge \frac{5}{12}$ ta có : $\begin{cases} \frac{5-12t}{15t^2-16t+16} \le 0 \\ \frac{1}{\sqrt{t^2+1}+1} > 0 \end{cases}$. Do đó (2) vô nghiệm.

- Trường hợp 2 : $0 \le t < \frac{5}{12}$ ta có $(2) \Leftrightarrow 15t^2-16t+16 = (5-12t)\sqrt{t^2+1}+5-12t$

$\Leftrightarrow 15t^2-4t+11 = (5-12t)\sqrt{t^2+1} \Leftrightarrow \left(15t^2-4t+11\right)^2 = (5-12t)^2\left(t^2+1\right)$

$\Leftrightarrow 81t^4+177t^2+32t+96=0$ (vô lí vì $81t^4+177t^2+32t+96>0, \forall t \in \left[0;\frac{5}{12}\right)$).

Vậy với $t \ge 0$ ta có (2) vô nghiệm.

Do đó hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x,y)=(-2;2)$.

Bình luận: Bài toán cũng dùng liên hiệp để đưa về hàm số đại diện nhưng có tính chất khá thú vị và hay, cách giải phương trình tìm nghiệm là cách tự nhiên nhất, cũng có thể sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức để tìm nghiệm.

Ví dụ 17: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt[3]{y+4}\cdot\sqrt[4]{y^2+7y+10} = \sqrt{x+1}\cdot\sqrt[3]{x^2+2x+3}\cdot\sqrt[4]{x^2+2x+4} \\ 3(3x+2) = \sqrt{y+2x+5}\left(3\sqrt{x^2+5}-x^2\right)+2\sqrt[3]{y-2x+5} \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích: Với hệ này, cả hai phương trình trong hệ đều thật "khó nhằn", với tâm lý chung thật không dám nhúng tay vào công phá phương trình nào trong hệ. Tuy nhiên, hãy quan sát phương trình thứ nhất tuy là một phương trình chứa các căn bậc khác nhau, nhưng ở đây lại là một phương trình đã cô lập hai biến x,y nên khả năng xét được hàm số đại diện là rất cao.

Quan sát phương trình thứ nhất ta nhận thấy vế phải phương trình này có điều gì đó thật đặc biệt.

Thật vậy, ta có : $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$; $x^2+2x+4=(x+1)^2+3$.

Với nhận xét này, ta đưa phương trình thứ nhất về phương trình :

$\sqrt[3]{y+4}\cdot\sqrt[4]{y^2+7y+10} = \sqrt{x+1}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2+2}\cdot\sqrt[4]{(x+1)^2+3}$.

Vậy là vế phải của phương trình này đã có một "hình ảnh" rất rõ ràng, giờ ta sẽ cố gắng biến đổi vế trái cũng sẽ được một "hình ảnh" như vậy. Với ý nghỉ này, ta nhận thấy vế phải có đầy đủ các căn bậc hai, bậc ba, bậc 4 nhưng vế trái chỉ có hai loại căn là bậc ba và bậc 4. Về cấu trúc căn ta cần phải thêm cho vế trai một căn bậc hai.

Mặt khác ta nhận thấy được

$y^2+7y+10=(y+2)(y+5)=(y+2)(y+2+3); y+4=y+2+2$.

Nét tương đồng của các hệ số thừa ra là $2,3$ đối với đại lượng $y+2$ và đại lượng $y+1$ làm ta thêm tự tin để tiến tới tách được vế trái có một "hình ảnh" như vế phải.

Cụ thể ta sẽ biến đổi như sau :

$$\sqrt[3]{y+4}\cdot\sqrt[4]{y^2+7y+10}=\sqrt[3]{y+2+2}\cdot\sqrt[4]{(y+2)(y+2+3)}$$

$$=\sqrt[3]{y+2+2}\cdot\sqrt[4]{y+2+3}\cdot\sqrt[4]{y+2}=\sqrt{\sqrt{y+2}}\cdot\sqrt[3]{\left(\sqrt{y+2}\right)^2+2}\cdot\sqrt[4]{\left(\sqrt{y+2}\right)^2+3}.$$

Và như vậy ta sẽ có được phương trình thứ nhất được viết lại là :

$$\sqrt{\sqrt{y+2}}\cdot\sqrt[3]{\left(\sqrt{y+2}\right)^2+2}\cdot\sqrt[4]{\left(\sqrt{y+2}\right)^2+3}=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2+2}\cdot\sqrt[4]{(x+1)^2+3}.$$

Tới đây ta có hai cách xét hàm số đại diện :

⊕ Cách 1: Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t}\cdot\sqrt[3]{t^2+1}\cdot\sqrt[4]{t^2+3},\forall t\ge 0$.

Khi đó phương trình thứ nhất sẽ ở dạng : $f\left(\sqrt{y+2}\right)=f(x+1)$

⊕ Cách 2 : Xét hàm số $f(t)=t\cdot\sqrt[3]{t^4+2}\cdot\sqrt[4]{t^4+3},\forall t\ge 0$. Khi đó phương trình thứ nhất sẽ có dạng : $f\left(\sqrt[4]{y+2}\right)=f\left(\sqrt{x+1}\right)$.

Với hai cách này thì rõ ràng ứng với cách thứ hai việc tính đạo hàm sẽ thuận lợi hơn một chút.

Không khó để nhận thấy cả hai cách xét hàm đều cho được hàm đại diện luôn tăng trên $[0;+\infty)$.

Vậy xem như mối quan hệ giữa hai biến x,y đã được giải quyết và hệ sẽ được giải hoàn toàn.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}x\ge -1\\ y^2+7y+10\ge 0\\ y+2x+5\ge 0\\ y+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ y\le -5\vee y\ge -2\\ y+2x+5\ge 0\\ y\ge -2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ y\ge -2\end{cases}.$

Phương trình thứ nhất trong hệ được viết lại thành phương trình :

$$\sqrt[3]{y+2}\cdot\sqrt[4]{(y+2)(y+5)}=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2+2}\cdot\sqrt[4]{(x+1)^2+3}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{y+2+2}\cdot\sqrt[4]{y+2+3}\cdot\sqrt[4]{y+2}=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2+2}\cdot\sqrt[4]{(x+2)^2+3}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\sqrt{y+2}}\cdot\sqrt[3]{\left(\sqrt{y+2}\right)^2+2}\cdot\sqrt[4]{\left(\sqrt{y+2}\right)^2+3}$$

$$=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2+2}\cdot\sqrt[4]{(x+1)^2+3}\ (*).$$

Xét hàm số $f(t)=t\cdot\sqrt[3]{t^4+2}\cdot\sqrt[4]{t^4+3},\forall t\ge 0$.

Ta có $f'(t)=\sqrt[3]{t^4+2}\cdot\sqrt[4]{t^4+3}+\dfrac{4t^4\cdot\sqrt[4]{t^4+4}}{3\sqrt[3]{\left(t^4+3\right)^2}}+\dfrac{t^4\cdot\sqrt[3]{t^4+3}}{\sqrt[4]{\left(t^4+3\right)^2}}>0,\forall t\ge 0$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Do đó từ $(*) \Leftrightarrow f\left(\sqrt[4]{y+2}\right)=f\left(\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt[4]{y+2}$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1=y+2 \Leftrightarrow y=x^2+2x-1.$$

Thế vào phương trình thứ hai ta thu được phương trình sau:

$$3(3x+2)=\sqrt{x^2+4x+4}\left(3\sqrt{x^2+5}-x^2\right)+2\sqrt[3]{x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow 3(3x+2)=(x+2)\left(3\sqrt{x^2+5}-x^2\right)+2\sqrt[3]{x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow x^3+2x^2+9x+6-3(x+2)\sqrt{x^2+5}-2\sqrt[3]{x^2+4}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\sqrt{x^2+5}\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)+\left(x+2-2\sqrt[3]{x^2+4}\right)+3(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\sqrt{x^2+5}\left(\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}\right)+\frac{(x+2)^3-8\left(x^2+4\right)}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{x^2+5}+\sqrt[3]{\left(x^2+5\right)^2}}+3(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\sqrt{x^2+5}\left(\frac{(x-2)(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3}\right)+\frac{(x-2)\left(x^2+12\right)}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{x^2+4}+\sqrt[3]{\left(x^2+4\right)^2}}+3(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\underbrace{\left(\frac{(x+2)^2\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{x^2+5}+3}+\frac{x^2+12}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{x^2+4}+\sqrt[3]{\left(x^2+4\right)^2}}+3\right)}_{T}=0$$

$\Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=7$ vì $T>0, \forall x \geq -1$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(2;7)$.

Bình luận : Đây là một bài hệ hay và khó cả ở hai bước đó là bước tìm hàm số đại diện, bước hai là giải phương trình tìm nghiệm. Bài toán đòi hỏi sự khéo léo trên toàn bộ hai phương trình. Cách xét hàm cho được hai sự chọn lựa và đòi hỏi người giải cần biết tính toán lựa chọn cái nào hợp lý và suy diễn có lợi nhất. Một dáng điệu hệ quen thuộc nhưng lại rất lạ mắt.

* *Loại 2 : Xét hàm số đại diện hoặc hàm số trên một miền nghiệm chưa biết.*
Trong loại này chúng ta sẽ quan tâm đến các bài toán mà ở đó một phương trình trong hệ đưa được về hàm đại diện hoặc một hàm số hay hai hàm số khác nhau trên miền nghiệm chưa biết. Để xác định được miền nghiệm ta thường dựa vào các dấu hiệu sau :

- *Sử dụng điều kiện có nghiệm của một phương trình bậc hai.*
- *Sử dụng tính chất* $a^{2n}+b^{2n}=k \Rightarrow \begin{cases}-k \leq a \leq k \\ -k \leq b \leq k\end{cases}$.
- *Điều kiện sinh ra từ ẩn phụ hóa.*
- *So sánh tính chất về dấu giữa hai vế phương trình.*

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

(Khối A – 2010)

Phân tích :

Với hệ này, ta nhận thấy từ phương trình thứ hai sẽ không cho chúng ta tìm được mối quan hệ nào có lợi để giải hệ. Phương trình thứ nhất rõ ràng hai biến x,y có tính cô lập nên có khả năng xét được hàm số rất cao, mặt khác phương trình này chỉ chứa một căn thức mà đại lượng trong căn thức liên quan đến y nên ta sẽ nghỉ đến việc ẩn phụ hóa nó.

Cụ thể ta sẽ có : $a=\sqrt{5-2y}, a\ge 0$. Ta có $y=\dfrac{5-a^2}{2}$.

Khi đó phương trình thứ nhất được biến đổi :

$(4x^2+1)x+\left(\dfrac{5-a^2}{2}-3\right)a=0\Leftrightarrow 8x^3+2x=a^3+a\ (*)$.

Do $a\ge 0$ nên từ $(*)$ ta suy ra $x\ge 0$.

Mặt khác $(*)$ cũng cho phép hình ảnh của hàm số đại diện là:

$f(t)=t^3+t, \forall t\in[0;+\infty)$.

Việc khẳng định được hàm số này luôn tăng không khó, điều đó cũng có nghĩa rằng mối quan hệ giữa hai biến x,a hay x,y đã có và hệ hoàn toàn được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}5-2y\ge 0\\3-4x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\le\dfrac{5}{2}\\x\le\dfrac{3}{4}\end{cases}$.

Đặt $a=\sqrt{5-2y}, a\ge 0$. Ta có: $y=\dfrac{5-a^2}{2}$.

Khi đó phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành:

$(4x^2+1)x+\left(\dfrac{5-a^2}{2}-3\right)a=0\Leftrightarrow 8x^3+2x=a^3+a\Leftrightarrow(2x)^3+2x=a^3+a\ (1)$.

Do $a\ge 0$ nên từ $(1)\Rightarrow x\ge 0$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+t, \forall t\ge 0$. Ta có $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\ge 0$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn tăng trên $[0;+\infty)$.

Do đó từ $(1)\Leftrightarrow f(2x)=f(a)\Leftrightarrow 2x=a\Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow y=\dfrac{5-4x^2}{2}$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$$4x^2+\left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}=7 \qquad (2)$$

Từ điêu kiện $\begin{cases} x\le \frac{3}{4} \\ x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le \frac{3}{4}$. Do đó ta giải (2) với mọi $x\in\left[0;\frac{3}{4}\right]$.

Ta có : $(2)\Leftrightarrow 16x^4-24x^2+5+8\left(\sqrt{3-4x}-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left(4x^2-1\right)\left(4x^2-5\right)-16\frac{2x-1}{\sqrt{3-4x}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\underbrace{\left((2x+1)\left(4x^2-5\right)-\frac{16}{\sqrt{3-4x}+1}\right)}_{K}=0 \Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=2.$$

Vì $\forall x\in\left[0;\frac{3}{4}\right]\Rightarrow \begin{cases} 2x+1>0 \\ -5\le 4x^2-5\le -\frac{11}{4}\end{cases}\Rightarrow (2x+1)\left(4x^2-5\right)<0\Rightarrow K<0$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Bình luận : Bài toán này, chúng tôi lựa chọn cách giải xây dựng miền nghiệm của hàm số đại diện trên việc ẩn phụ hóa. Tuy nhiên chúng ta vẫn có thể xét trực tiếp hàm số đại diện như sau :

$$\Leftrightarrow \left(4x^2+1\right)x+(5-2y)\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow 8x^3+2x=(5-2y)\sqrt{5-2y}+\sqrt{5-2y}\ (i)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t,\forall t\in\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Từ đó ta có : $f(2x)=f\left(\sqrt{5-2y}\right)\Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ y=\frac{5-4x^2}{2}\end{cases}$.

Còn nếu tinh ý thì do vế phải (i) luôn không âm nên suy ra $x\ge 0$ (cách này chính là ẩn phụ hóa ngầm đại lượng $\sqrt{5-2y}$).

Còn việc giải phương trình tìm nghiệm thì ngoài lời giải trên, chúng ta vẫn có thể sử dụng hàm số để giải. Tuy nhiên lời giải trên tự nhiên và phù hợp với số đông học sinh hơn.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y \\ x^2+y^2-x+y=\frac{1}{2}\end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Nhận định đầu tiên là hệ này là hệ đối xứng loại 1 với hai biến $x,-y$ nên với hệ này ta hoàn toàn giải quyết được hệ này bằng phương pháp tổng tích của hệ đối xứng loại 1. Tuy nhiên nếu ta quan sát dưới một góc nhìn khác ta dễ dàng nhận thấy phương trình thứ nhất trong hệ có các biến có tính cô lập nên

khả năng xét hàm số rất cao. Về cấu trúc của hai vế ta đều có thể cố định bên nào cũng được rồi biến đổi định dạng đối xứng cho bên còn lại. Ở đây chúng ta nhận thấy vế trái dễ cố định hơn nên ta sẽ cố định bên vế trái như sau :

$$x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y \Leftrightarrow (x-1)^3-12(x-1)=y^3+3y^2-9y$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3-12(x-1)=(y+1)^3-12(y+1).$$

Tới đây ta đã thấy hình dáng của hàm số đại diện là $f(t)=t^3-12t, \forall t\in\mathbb{R}$. Nhưng vấn đề đã phát sinh vì hàm số này không luôn tăng hay luôn giảm trên $\mathbb{R}$, điều này là điều ta không mong muốn. Do đó ý tưởng phát sinh là ta cần chặn miền nghiệm. Để có được điều này, ta cần quan tâm đến phương trình thứ hai.

Không khó nhận ra phương trình thứ hai là phương trình này là phương trình bậc hai nhưng không có delta chính phương nên việc tách nhân tử là không thể. Tuy nhiên, ta có thể biến đổi phương trình này như sau :

$$x^2+y^2-x+y=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1.$$

Tới đây từ tính chất đã nhắc ở lý thuyết ta suy ra được

$$\begin{cases}-1\le x-\dfrac{1}{2}\le 1\\ -1\le y+\dfrac{1}{2}\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{3}{2}\\ -\dfrac{3}{2}\le y\le \dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Với điều kiện này ta suy ra được : $\begin{cases}-\dfrac{3}{2}\le x-1\le \dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2}\le y+1\le \dfrac{3}{2}\end{cases}$.

Như vậy ta sẽ xét hàm $f(t)=t^3-12t, \forall t\in\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

Ta có $f'(t)=3t^2-12=3(t^2-4)<0, \forall t\in\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn giảm trên $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$, cũng từ đây mối quan hệ giữa x, y đã có và hệ hoàn toàn được giải quyết.

Lời giải : Phương trình thứ hai trong hệ được viết lại thành phương trình :

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1 \Rightarrow \begin{cases}-1\le x-\dfrac{1}{2}\le 1\\ -1\le y+\dfrac{1}{2}\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{3}{2}\\ -\dfrac{3}{2}\le y\le \dfrac{1}{2}\end{cases} (*).$$

Phương trình thứ nhất trong hệ được viết lại thành phương trình :

$$x^3-3x^2+3x-1-12(x-1)=y^3+3y^2+3y+1-12(y-1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3-12(x-1)=(y+1)^3-12(y+1)\ (1)$$

Do $(*)$ nên ta có : $\begin{cases} -\frac{3}{2} \le x-1 \le \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \le y+1 \le \frac{3}{2} \end{cases}$. Xét hàm số $f(t) = t^3 - 12t, \forall t \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 12 = 3(t^2 - 4) < 0, \forall t \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn giảm trên $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Do đó từ $(1) \Leftrightarrow f(x-1) = f(y+1) \Leftrightarrow x-1 = y+1 \Leftrightarrow y = x-2$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$x^2 + (x-2)^2 - x + x - 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \\ x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \left\{\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right); \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)\right\}$.

Bình luận: Nếu đặt vấn đề về xét hàm trên miền điều kiện chưa biết khi xét hàm thì bài toán này có độ khó hơn khối A – 2010. Tuy nhiên, hệ này có nét gợi mở hơn hệ trước, minh chứng là hệ này hoàn toàn sử dụng phương pháp đối xứng loại 1 để giải. Các bạn chú ý sử dụng tính chất đã nhắc lý thuyết là một công cụ rất mạnh để chặn miền nghiệm cho những bài toán như thế này.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x+1} - \sqrt{2y+1} = x - y \\ x^2 - 12xy + 9y^2 + 4 = 0 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, không khó nhận ra được ngay phương trình thứ nhất đã cho được ảnh của hàm số đại diện.

Cụ thể ta có phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình :

$\sqrt{2x+1} - x = \sqrt{2y+1} - y \ (1)$.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{2t+1} - t, \forall t \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Ta có : $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} - 1$.

Tới đây ta nhận được ngay $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Như vậy hàm số sẽ đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$ như thế qua hàm số này ta chưa có kết luận được gì từ phương trình (1) vì dấu của x, y chưa rõ sẽ như thế nào cả.

Tuy nhiên từ phương trình thứ hai trong hệ ta có : $x^2 + 9y^2 + 4 = 12xy \Rightarrow xy > 0$.

Và như vậy nếu hệ có nghiệm (x, y) thì x, y phải cùng dấu. Điều này ta làm cho xét hàm đại diện đã thành công và hệ hoàn toàn được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ y \ge -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Từ phương trình thứ hai trong hệ ta có: $x^2 + 9y^2 + 4 = 12xy \Rightarrow xy > 0$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành :

$\sqrt{2x+1} - x = \sqrt{2y+1} - y \quad (1)$.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{2t+1} - t, \forall t \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Ta có $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} - 1$.

Lại có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2t+1}} - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Từ đây ta suy ra hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

⊕ Trường hợp 1: $x, y \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right)$ thì hàm số $f(t)$ đồng biến nên từ

$(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$2x^2 - 4 = 0$ (vô nghiệm vì $2x^2 - 4 < 0$).

⊕ Trường hợp 2 : $x, y \in (0; +\infty)$ thì hàm số $f(t)$ nghịch biến nên từ

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$2x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ vì $x > 0$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$.

Bình luận : Bài toán này nhìn qua tưởng chừng đơn giản, tuy nhiên nó lại gây cho người giải rất dễ sai lầm. Một sai lầm mà trên thực tế có rất nhiều học sinh mắc phải. Sau đây, chúng tôi xin giới thiệu một vài ví dụ như vậy để giúp các bạn nhận biết và thông hiểu để khi gặp lại sẽ không còn những sai lầm như vậy nữa.

Ví dụ 4:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}\right) = (x-y)\sqrt{x^2+1} \\ 2x(x-y) + 2(x+y) = 2 - y^2 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, việc đầu tiên ta nhận thấy phương trình thứ nhất trong hệ có thể thu gọn lại vì hai vế có những đại lượng chung.

Cụ thể ta có phương trình (1) được biến đổi lại thành :

$(y+1)\sqrt{x^2+1} = (x+1)\sqrt{y^2+1}$.

Tới đây có thể nhận thấy nếu ta chia chéo hai đại lượng ngoài căn ta sẽ thu được một phương trình có tính đối xứng và cô lập các biến .

Thật vậy ta có : $(y+1)\sqrt{x^2+1}=(x+1)\sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\frac{\sqrt{y^2+1}}{y+1}$ (1)

Tuy nhiên khi chia như vậy ta cần hai đại lượng $x+1, y+1$ đều khác 0.

Nếu $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=-1$. Thử lại không thỏa hệ.

Nếu $y+1=0 \Leftrightarrow y=-1 \Rightarrow x=-1$. Thử lại không thỏa hệ.

Vậy với $(x+1)(y+1) \neq 0$ thì ta có (1) và cũng từ (1) ta suy ra được $(x+1)(y+1)>0$ tức là hai đại lượng $x+1, y+1$ phải cùng dấu hay ta có :

$$\begin{cases} x+1>0 \\ y+1>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+1<0 \\ y+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ y>-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x<-1 \\ y<-1 \end{cases}$$

Như vậy việc xét hàm số đại diện $f(t)=\frac{\sqrt{t^2+1}}{t+1}, \forall t \in (-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$

Ta có $f'(t)=\frac{t-1}{(t+1)^2\sqrt{t^2+1}}$.

Lúc này ta sẽ có những nhận xét sau :

Lúc này vấn đề đã nảy sinh ra là nếu $t \in (-\infty;-1)$ hay $t \in (-1;+\infty)$ ta cũng không xét dấu được đại lượng $t-1$. Và như vậy việc cấu trúc hàm đại diện như trên đã phá sản.

Tuy nhiên ta để ý rằng (1) có thể đưa về phương trình sau :

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{y+1}{\sqrt{y^2+1}} \ (*).$$

Như thế thì hàm số đại diện lúc này là $f(t)=\frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}}, \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=\frac{1-t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}$.

Và bây giờ vấn đề nảy sinh chính là đại lượng $1-t$, vì chính đại lượng này sẽ làm cho hàm số có hai khoảng có tính đơn điệu khác nhau. Giờ ta cần chặn miền nghiệm cho t .

Bây giờ ta sẽ quan tâm phương trình thứ hai trong hệ, ta sẽ có :

$$2x(x-y)+2(x+y)=2-y^2 \Leftrightarrow 2x^2-2(x-1)(y-1)+y^2=0 \ (*).$$

Nhận thấy hệ phương trình này không thể có nghiệm $(x,y)=(0;0)$

Do $x^2>0, y^2>0$ nên từ $(*)$ ta suy ra : $(x-1)(y-1)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ y>1 \end{cases} \vee \begin{cases} x<1 \\ y<1 \end{cases}$.

Như vậy ta đã có hai miền chặn nghiệm cho t là $(1;+\infty)$ và $(-\infty;1)$ nên $f'(t)$ được đánh giá hoàn hoàn và hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Nhận xét do hệ không thể có nghiệm dạng $(x,y)=(0;0)$.

Từ phương trình thứ hai trong hệ ta có biến đổi sau :

$2x^2-2(x-1)(y-1)+y^2=0$ (a).

Vì $x^2>0, y^2>0$ nên từ $(a)\Rightarrow(x-1)(y-1)>0\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\y>1\end{cases}\vee\begin{cases}x<1\\y<1\end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{y+1}{\sqrt{y^2+1}}$ (b).

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+1}},\forall t\in\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=\dfrac{1-t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}$.

⊕ Trường hợp 1 : Nếu $t>1$ thì $1-t<0\Rightarrow f'(t)<0$. Do đó hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

Nên từ $(b)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$. Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình : $x^2+4x-2=0\Leftrightarrow x=-2\pm\sqrt{6}$ (loại).

⊕ Trường hợp 2 : Nếu $t<1$ thì $1-t>0\Rightarrow f'(t)>0$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$.

Nên từ $(b)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$. Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$x^2+4x-2=0\Leftrightarrow x=-2\pm 2\sqrt{6}$ (nhận).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm

$(x,y)=\left\{\left(-2+\sqrt{6};-2+\sqrt{6}\right);\left(-2-\sqrt{6};-2-\sqrt{6}\right)\right\}$.

Bình luận : Qua bài hệ này, chúng tôi muốn gửi gắm đến các bạn những điều sau. Về nhận diện hàm đại diện, chúng ta đã biết hàm chúng ta xét chưa phải là duy nhất. Tùy vào sự chọn lựa của chúng ta mà đưa ra những hàm đại diện phù hợp. Với cách chọn hàm đại diện thứ nhất thì đó cũng là một lối tư duy thường gặp ở học sinh. Cách chọn hàm đại diện thứ hai cũng là lối thường gặp của học sinh. Cả hai cách này về bản chất tư duy thì cách chọn hàm ở hai cách đều đúng! Tuy nhiên vấn đề nảy sinh là biểu thức của đạo hàm của hàm số đại diện có thể triệt tiêu tại một điểm tới hạn $t=1$ ở cả hai cách. Nếu cách thứ nhất việc chỉ ra được $(x+1)(y+1)>0$ về đường lối là đúng nhưng lại bị trở ngại ngay với biểu thức đạo hàm. Tuy nhiên nếu ta khai thác phương trình thứ hai thì thật sự cả hai hàm đều cho lời giải hoàn thiện được bài toán. Vì qua lời giải các bạn đã thấy cách khai thác thứ hai đã làm cho nhận xét $(x+1)(y+1)>0$ bị phá sản ở khúc chặn miền nghiệm. Điểm làm khó bài toán này chính là tác giả đã cố tình cho hàm số

đại diện có điểm tới hạn quá chặt. Tuy nhiên, trong lớp bài toán tạo hằng đẳng thức trong căn để xét hàm đại diện này, có một số bài vì cách chọn hàm đại diện có tính "gợi mở" hơn thì hai cách này đều áp dụng được như ví dụ sau đây.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2-3x=(y-2)(y+1) \\ (x+y)\sqrt{x^2-4x+5}+(x-2)\sqrt{x^2+y^2+2xy+1}=0 \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích: Từ hệ này, ta sẽ biến đổi phương trình thứ hai trong căn vì chứa các hằng đẳng thức có liên quan chéo đến các đại lượng ngoài căn.

Cụ thể ta biến đổi phương trình thứ hai trong hệ về phương trình :

$(x+y)\sqrt{(2-x)^2+1}=(2-x)\sqrt{(x+y)^2+1}\ \ (*)$.

⊕ Hướng tư duy 1: Đưa $(*)$ về phương trình : $\dfrac{x+y}{\sqrt{(x+y)^2+1}}=\dfrac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2+1}}$.

Khi đó ta có hàm số đại diện là $f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}},\forall t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}}>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Tới đây bài toán đã được giải hoàn toàn.

⊕ Hướng tư duy 2 : Đưa $(*)$ về phương trình : $\dfrac{\sqrt{(x+y)^2+1}}{x+y}=\dfrac{\sqrt{(2-x)^2+1}}{2-x}$.

Khi đó ta có hàm số đại diện là : $f(t)=\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t},\forall t\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Và ta cần xét $x+y=0$, $2-x=0$ và từ cấu trúc phương trình ta cần có $(x+y)(2-x)>0$.

Ta có : $f'(t)=-\dfrac{1}{t^2\sqrt{t^2+1}}<0$, $\forall t\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Nhờ nhận xét $(x+y)(2-x)>0$ nên hệ cũng hoàn toàn giải quyết được.

Giờ chúng tôi sẽ đi vào lời giải cho bài toán theo hướng tư duy 2.

Lời giải :

Phương trình thứ nhất trng hệ được biến đổi thành phương trình :

$(x+y)\sqrt{(2-x)^2+1}+(x-2)\sqrt{(x+y)^2+1}=0$

$\Leftrightarrow(x+y)\sqrt{(2-x)^2+1}-(2-x)\sqrt{(x+y)^2+1}=0\ (1)$.

Xét $2-x=0\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=-2$.

Thử lại không thấy thỏa hệ.

Xét $x+y=0 \Leftrightarrow x=-y$ ta có hệ : $\begin{cases} y^2+3y=y^2-y-2 \\ 2+y=0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Vậy ta có $(x+y)(2-x)\neq 0$.

Do đó từ (1) ta có : $\dfrac{\sqrt{(x+y)^2+1}}{x+y}=\dfrac{\sqrt{(2-x)^2+1}}{2-x}$ (2).

Từ $(2)\Rightarrow (x+y)(2-x)>0$. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t}, \forall t\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=-\dfrac{1}{t^2\sqrt{t^2+1}}<0, \forall t\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$, mặt khác $(x+y)(2-x)>0$ nên từ (2) ta có

$f(x+y)=f(2-x)\Leftrightarrow x+y=2-x\Leftrightarrow y=2-2x$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$x(x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=2 \\ x=1\Rightarrow y=0 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là : $(x,y)=\{(0;2);(1;0)\}$.

Bình luận : Chính sự "gợi mở thông thoáng" của đạo hàm trong việc chọn hàm số đại diện mà tác giả đã cấu tạo sẵn làm cho con đường tư duy thường gặp cả hai hướng đều đạt được mục đích. Tất nhiên với bài toán này đi hướng tư duy 1 sẽ cho lời giải gọn hơn, nhưng chúng tôi chọn lối đi thứ hai cũng để giúp các bạn thêm nhiều sự chọn lựa cho lời giải một bài toán thuộc lớp bài toán này.

Ví dụ 6 :

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(\sqrt{x^2+1}-3x^2y+2\right)\left(\sqrt{4y^2+1}+1\right)=8x^2y^3 \;(1) \\ x^2y-x+2=0 \;(2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này việc đầu tiên nhìn vào hệ ta nhận thấy phương trình thứ hai trong hệ cho ta phép rút thế, nhưng nếu như vậy đã sẽ đẩy bài toán còn khó khăn hơn lúc đầu nên tư tưởng này thất bại.

Quan sát phương trình (1) ta nhận thấy ở hai vế nếu mà $y\le 0$ thì $\begin{cases} VT>0 \\ VP\le 0 \end{cases}$ nên rõ ràng hệ này không thể có nghiệm (x,y) mà $y\le 0$. Do đó nếu hệ này có nghiệm thì cần $y>0$

Mặt khác từ (2) ta có : $y=\dfrac{x-2}{x^2}\Rightarrow x>2$.

Mà nếu tách vế phải (1) theo x^2y thì còn thừa y^2, để ý có

$\left(\sqrt{4y^2+1}-1\right)\left(\sqrt{4y^2+1}-1\right)=4y^2$ nên ta lại nghỉ đến phép liên hiệp.

Cụ thể ta có :

$\left(\sqrt{x^2+1}-3x^2y+2\right)\left(\sqrt{4y^2+1}+1\right)=2x^2y\left(\sqrt{4x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{4x^2+1}-1\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-3x^2y+2=2x^2y\sqrt{4y^2+1}-2x^2y \ \ (3)$.

Tới đây từ (2) ta rút $2=x-x^2y$, thế vào (3) ta có được:

$\sqrt{x^2+1}+x=2x^2y\sqrt{4y^2+1}+2x^2y$.

Với $x>0$ ta đưa phương trình này về dạng : $\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}=2y\sqrt{(2y)^2+1}+2y$.

Và tới đây ta đã thấy hình ảnh của hàm số đại diện. Vậy hệ đã hoàn toàn được giải quyết.

Lời giải :

Nếu $y\le 0$ ta có : $\begin{cases}\left(\sqrt{x^2+1}-3x^2y+2\right)\left(\sqrt{4y^2+1}+1\right)>0\\ 8x^2y^3\le 0\end{cases}$ nên hệ vô nghiệm.

Nếu $y>0$ thì từ (2) ta có : $y=\frac{x-2}{x^2}\Rightarrow x>2$.

Ta có $(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+1}-3x^2y+2\right)\left(\sqrt{4y^2+1}+1\right)=2x^2\left(\sqrt{4y^2+1}+1\right)\left(\sqrt{4y^2+1}-1\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-3x^2y+2=2x^2y\sqrt{4y^2+1}-2x^2y \ \ (*)$.

Lại có từ (2) rút : $2=x-x^2y$, thế vào $(*)$ ta có phương trình :

$\sqrt{x^2+1}+x=2x^2y\sqrt{4y^2+1}+2x^2y \Leftrightarrow \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}=2y\sqrt{(2y)^2+1}+2y \ (4)$.

Xét hàm số $f(t)=t\sqrt{t^2+1}+t, \forall t>0$.

Ta có $f'(t)=\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}+1>0, \forall t>0$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó từ $(4)\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=f(2y)\Rightarrow \frac{1}{x}=2y\Leftrightarrow 2xy=1$.

Kết hợp với (2) ta có hệ :

$$\begin{cases}2xy=1\\ x^2y-x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}x-x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\frac{1}{2}\\ x=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=\frac{1}{8}\end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left(4;\frac{1}{8}\right)$.

Bình luận : Bài toán đòi hỏi sự tinh tế trong việc giới hạn miền nghiệm. Một kỷ thuật cũng thường được dùng trong việc giới hạn miền nghiệm để xét hàm số. Còn lại thì bài toán không khó lắm.

Ví dụ 7 :

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(5-2x)\sqrt{x+2y}=(6-x-2y)\sqrt{x-1}\\ \left(x^3-2y-3\right)\left(x+\sqrt{8x(3-x)+4y^2+5}\right)=21\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với bài toán này, chúng ta cũng nhận thấy rằng phương trình thứ hai rõ ràng không cho ta được tín hiệu nào để khai thác. Trong khi đó, phương trình thứ nhất có chứa hai căn thức mà các đại lượng trong căn đều có nét tương đồng với các đại lượng ngoài căn. Do đó ta sẽ tiến hành phương trình thứ nhất và đẩy ý tưởng ẩn phụ hóa cộng với việc định dạng ban đầu của phương trình này cũng đã có tính cô lập các biến nên khả năng sau khi ẩn phụ hóa thì xét được hàm số là rất cao.

Cụ thể ta có phép biến đổi sau cho phương trình thứ nhất trong hệ :

$(5-2x)\sqrt{x+2y}=(6-x-2y)\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow(3-2(x-1))\sqrt{x+2y}=(6-(x+2y))\sqrt{x-1}\ (*)$.

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x-1}\\ b=\sqrt{x+2y}\end{cases}$. Khi đó ta có $(*)$ trở thành : $\left(3-2a^2\right)b=\left(6-b^2\right)a\ \ (1)$.

Ở (1) ta đã thấy hình ảnh của hàm số đại diện đã thấp thoáng xuất hiện, nhưng vì sự sai biệt của hai đại lượng $a,2a^2$ và hai số $3;6$ nên ta sẽ đẩy ý tưởng nhân toàn bộ hai vế (1) cho 2 để gắn kết các đại lượng và sô có tính tương đồng.

Cụ thể ta sẽ có $(1)\Leftrightarrow\left(6-4a^2\right)b=\left(6-b^2\right)2a\Leftrightarrow\frac{6-4a^2}{2a}=\frac{6-b^2}{b}$.

Vậy ta sẽ xét hàm số $f(t)=\frac{6-t^2}{t},\forall t>0$. Việc khẳng định hàm này có tính đơn điệu gì không quá khó nên ta sẽ trực tiếp vào lời giải cho bài toán.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}x+2y\ge0\\ x\ge1\end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$(3-2(x-1))\sqrt{x+2y}=(6-(x+2y))\sqrt{x-1}\ (1)$.

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x-1}\\ b=\sqrt{x+2y}\end{cases}$, $a,b\ge0$. Khi đó (1) trở thành :

$\left(3-2a^2\right)b=\left(6-b^2\right)a\Leftrightarrow\left(6-4a^2\right)b=\left(6-b^2\right)2a\ (2)$.

Với $a=0\vee b=0$ thì hệ không thỏa mãn. Do đó ta có $a,b>0$.

Khi đó (2) trở thành : $\dfrac{6-(2a)^2}{2a}=\dfrac{6-b^2}{b}$ $\quad(*)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{6-t^2}{t},\forall t>0$. Ta có $f'(t)=-\dfrac{6+t^2}{t^2}<0,\forall t>0$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Nên $(*)\Leftrightarrow f(2a)=f(b)\Leftrightarrow 2a=b\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=\sqrt{x+2y}\Leftrightarrow 3x-4=2y$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình sau :

$$\left(x^3-3x+4-3\right)\left(x+\sqrt{24x-8x^2+(3x-4)^2+5}\right)=21$$

$$\Leftrightarrow\left(x^3-3x+1\right)\left(x+\sqrt{x^2+21}\right)=21$$

$$\Leftrightarrow\left(x^3-3x+1\right)\left(x+\sqrt{x^2+21}\right)=\left(\sqrt{x^2+21}+x\right)\left(\sqrt{x^2+21}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x+1=\sqrt{x^2+21}-x\Leftrightarrow x^3-3x+2+\left(x+3-\sqrt{x^2+21}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)^2(x-2)+\frac{6(x-2)}{x+3+\sqrt{x^2+21}}=0\Leftrightarrow(x-2)\underbrace{\left((x+1)^2+\frac{6}{x+3+\sqrt{x^2+21}}\right)}_{P}=0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=1 \text{ vì } P>0,\forall x\ge 1.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(2;1)$.

Bài toán : Bài toán với việc ẩn phụ hóa là điều tự nhiên, tuy nhiên để xét được hàm đại diện ta cần có một chút khéo léo. Còn lại tất cả đều là quen thuộc.

Ví dụ 7:

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(2x^2+1-\sqrt{y}\right)\sqrt{2x^2+1}=3\sqrt{y}\left(\sqrt{y}-1\right)\\ 4y^2-4y+1=4\left(\sqrt{2x^2+1}-\dfrac{1}{2}\right)^2\end{cases}$ $\quad(x,y\in\mathbb{R})$.

Phân tích : Với hệ này, đầu tiên ta nhận xét trong hệ đại lượng $\sqrt{2x^2+1}$ xuất hiện rất nhiều lần nên ý tưởng đầu tiên ta sẽ ẩn phụ hóa để làm gọn nhẹ hình thức hệ lại.

Cụ thể ta đặt $a=\sqrt{2x^2+1}$. Khi đó hệ đã cho trở thành hệ :

$$\begin{cases}\left(a^2-\sqrt{y}\right)a=3\sqrt{y}\left(\sqrt{y}-1\right)\\ 4y^2-4y+1=4\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2\end{cases}.$$

Ta nhận thấy vế hệ mới cả hai phương trình trong hệ đều có thể cô lập được biến, như thế khả năng xét hàm số sẽ rất cao. Tuy nhiên, hình thức phương trình

thứ hai trong cho ta phép biến đổi đơn giản và dễ nhìn hơn nên ta sẽ có biến đổi tiếp theo cho hệ như sau : $\begin{cases}\left(a^2-\sqrt{y}\right)a=3\sqrt{y}\left(\sqrt{y}-1\right)\\ y^2-y=a^2-a\end{cases}$ $(*)$

Chú ý rằng ta có $a\ge 1$ nên từ phương trình thứ hai trong hệ ta sẽ có $y^2-y\ge 0\Leftrightarrow y\le 0\vee y\ge 1$.

Kết hợp với điều kiện của hệ là $y\ge 0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\ y\ge 1\end{array}\right.$.

Với $y=0$, kiểm tra rất đơn giản.

Mặt khác phương trình: $y^2-y=a^2-a$.

Từ đây dẫn đến ta xét hàm số $f(t)=t^3-t,\forall t\ge 1$. Không khó để kết luận được hàm này tăng $\forall t\ge 1$

Do đó ta sẽ có $y=a$ thế vào phương trình thứ nhất trong hệ $(*)$ ta có phương trình : $\left(a^2-\sqrt{a}\right)a=3\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)\Leftrightarrow a^3-3a=\left(\sqrt{a}\right)^3-3\sqrt{a}$.

Phương trình này gợi ảnh xét hàm số $f(u)=u^3-3u,\forall u\ge 1$. Tương tự như hàm trên ta vẫn không khó để kết luận được hàm này tăng trên $[1;+\infty)$.

Và từ đây ta có : $a=\sqrt{a}\Leftrightarrow a^2-a=0\Leftrightarrow a=0\vee a=1$.

Như vậy hệ đã được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải :

Điều kiện $y\ge 0$.

Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ :

$$\begin{cases}\left(2x^2+1-\sqrt{y}\right)\sqrt{2x^2+1}=3\sqrt{y}\left(\sqrt{y}-1\right)\\ y^2-y=\left(2x^2+1\right)-\sqrt{2x^2+1}\end{cases}\quad (I)$$

Ta có $y^2-y=\sqrt{2x^2+1}\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)\ge 0\Rightarrow y^2-y\ge 0\Leftrightarrow y\le 0\vee y\ge 1$.

Kết hợp với điều kiện $y\ge 0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\ y\ge 1\end{array}\right.$.

Với $y=0$ không thỏa hệ.

Đặt $a=\sqrt{2x^2+1},a\ge 1$.

Khi đó hệ (I) trở thành : $\begin{cases}\left(a^2-\sqrt{y}\right)a=3\sqrt{y}\left(\sqrt{y}-1\right)\\ y^2-y=a^2-a\end{cases}$.

Xét phương trình : $y^2-y=a^2-a\ \ (1)$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-t,\forall t\ge 1$. Ta có $f'(t)=2t-1>0,\forall t\ge 1$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[1;+\infty)$. Do đó từ $(1)\Leftrightarrow f(y)=f(a)\Leftrightarrow y=a$. Thế vào Phương trình thứ hai trong hệ (I) ta có :

$$\left(a^2-\sqrt{a}\right)a=3\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)\Leftrightarrow a^3-3a=\left(\sqrt{a}\right)^3-3\sqrt{a}\ \ (2).$$

Xét hàm số $f(u)=u^3-3u,\forall u\ge 1$. Ta có $f'(u)=3u^2-3\ge 0,\forall u\ge 1$. Vậy hàm số $f(u)$ luôn tăng trên $[1;+\infty)$.

Do đó từ $(2)\Leftrightarrow f(a)=f\left(\sqrt{a}\right)\Leftrightarrow a=\sqrt{a}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\Rightarrow y=0(l)\\ a=1\Rightarrow y=1\end{array}\right.$.

Vậy ta có : $\begin{cases}a=1\\ y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2x^2+1}=1\\ y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(0;1)$.

Bình luận: Bài toán này là một bài toán lồng hai hàm số trên một miền nghiệm chưa biết, việc tìm miền nghiệm dựa vào đánh giá cơ bản thông qua ẩn phụ.

Ví dụ 8 : Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{y-x}}{\sqrt{y-x}}=\dfrac{24}{2(y-x)^3+11}\\ 2y\left(y^2+3x^2\right)=1\end{cases}\ (x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, việc đầu tiên ta nhận thấy sự xuất hiện của các đại lượng $x+y,y-x$ trong căn thức cũng như ngoài căn nên ta ưu tiên ẩn phụ hóa rồi biến đổi x,y theo ẩn phụ và thay xuống phương trình thứ hai.

Đặt $\begin{cases}a=x+y\\ b=y-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a+b}{2}\\ y=\dfrac{a-b}{2}\end{cases}$.

Lúc này hệ phương trình đã cho được viết lại thành hệ :

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\dfrac{24}{2b^3+11}\\ (a-b)\left(\dfrac{a^2-2ab+b^2}{4}+3\dfrac{a^2+2ab+b^2}{4}\right)=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{24}{2b^3+11}-1\\ (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{13-2b^3}{2b^3+11}\\ a^3-b^3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{2a^3+11}{2b^3+11}\\ b^3=1-a^3\end{cases}$$

Chú ý rằng ta có điều kiện $a\ge 0,b>0$ nên từ phương trình :

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{2a^3+11}{2b^3+11}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{a}}{2a^3+11}=\frac{\sqrt{b}}{2b^3+11}$.

Từ đây dẫn ta đến ý tưởng xét hàm đại diện $f(t)=\frac{\sqrt{t}}{2t^3+11},\forall t>0$.

Ta có : $f'(t)=\frac{11(1-t^3)}{2(2t^3+11)^2\sqrt{t}}$.

Tới đây vấn đề đã nảy sinh đó là hàm này vừa có khoảng tăng vừa có khoảng giảm trên $(0;+\infty)$.

Tuy nhiên tới đây chúng ta liên tưởng đến phương trình thứ hai : $a^3+b^3=1$.

Từ đây ta suy ra được : $\begin{cases}a\ge 0,b>0\\a^3<1,b^3\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\ge 0.b>0\\a<1,b\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le a\le 1\\0<b\le 1\end{cases}$.

Do đó ta chặn được miền nghiệm cho $f(t)$ là $[0;1]$. Từ nhận xét này ta có ngay được $f'(t)\le 0$.

Và mọi chuyện tới đây đã đơn giản và hệ sẽ được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải : Đặt $\begin{cases}a=x+y\\b=y-x\end{cases},a\ge 0,b>0$. Từ cách đặt ta có : $\begin{cases}x=\frac{a+b}{2}\\y=\frac{a-b}{2}\end{cases}$.

Lúc đó hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ phương trình sau :

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\frac{24}{2b^3+11}\\(a-b)\left(\frac{a^2-2ab+b^2}{4}+3\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{13-2b^3}{2b^3+11}\\(a-b)(a^2+ab+b^2)=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{13-2(1-a^3)}{2b^3+11}\\b^3=1-a^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{a}}{2a^3+11}=\frac{\sqrt{b}}{2b^3+11}(*)\\b^3=1-a^3\end{cases}.$$

Do $\begin{cases}a\ge 0,b>0\\a^3+b^3=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\ge 0,b>0\\a^3<1,b^3\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\ge 0,b>0\\a<1,b\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le a<1\\0<b\le 1\end{cases}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{\sqrt{t}}{2t^3+11},\forall t\in[0;1]$. Ta có : $f'(t)=\frac{11(1-t^3)}{2t^3+11}\le 0,\forall t\in[0;1]$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn nghịch biến trên $[0;1]$.

Do đó ta có $(*)\Leftrightarrow f(a)=f(b)\Leftrightarrow a=b$.

Từ đó ta sẽ có hệ phương trình :

$$\begin{cases} a = b \\ a^3 + b^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ b = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y - x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y) = \left(0; \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

Bình luận : Về việc tư duy ẩn phụ hóa hệ này thì không khó để nghỉ, tuy nhiên độ khó của hệ này chính là chặn miền nghiệm cho hàm số đại diện dựa trên các đánh giá cơ bản mà ta thường gặp. Điểm đặc biệt của hệ này là miền nghiệm được chặn trên sự "giao thoa" của hai miền riêng lẻ của a, b.

Tuy nhiên hàm đại diện trên không là duy nhất cho hàm này,ta có thể xét hàm đại diện ở dạng sau : $f(t) = \left(13 - 2t^3\right)\sqrt{t}$ trên đoạn $[0;1]$ cũng được kết quả như vậy.Sau đây chúng ta sẽ nghiên cứu một ví dụ có cách chặn miền cũng tương tự như ví dụ này nhưng có "bề rộng" sâu hơn miền nghiệm riêng lẻ của từng biến, cũng như hàm số đại diện cũng được biến tấu về hình thức khác hơn các ví dụ mà ta đã nghiên cứu ở phần trước.

Ví dụ 9 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(2x^2 - 3x + 4\right)\left(2y^2 - 3y + 4\right) = 18 \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

(Chọn đội tuyển chuyên ĐHSP Hà Nội 2011)

Phân tích : Với hệ này, chúng ta nhận thấy được ngay phương trình thứ nhất trong hệ là tích hai biểu thức có cấu trúc giống nhau chỉ khác nhau về biến. Như thế phương trình thứ nhất vế trái có thể biểu diễn dưới dạng hàm số đại diện nhưng khác hơn các ví dụ trước của chúng ta vì lúc này ta sẽ thu được phương trình thứ nhất ở dạng $f(a) \cdot f(b) = 18$ với $f(t) = 2t^2 - 3t + 4$.

Không khó để nhận thấy hàm này vừa có khoảng tăng vừa có khoảng giảm trên $\mathbb{R}$, điều này về bản chất đối với bài toán hàm số đại diện thì trong điều kiện ràng buộc nhất định thì ta vẫn có thể giải được. Tuy nhiên ta không tìm được điều kiện ràng buộc cho x, y cùng dấu ở phương trình này nên ta cần chặn miền nghiệm của hàm số $f(t)$.

Xét phương trình thứ hai trong hệ : $x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0$.

Nếu ta xem đây là phương trình bậc hai theo x: $x^2 + (y - 7)x + y^2 - 6y + 14 = 0$.

Phương trình này có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = (y - 7)^2 - 4\left(y^2 - 6y + 14\right) = -3y^2 + 10y - 7 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \frac{7}{3}.$$

Nếu ta xem đây là phương trình bậc hai theo y: $y^2 + (x - 6)y + x^2 - 7x + 14 = 0$.

Phương trình này có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = (x - 6)^2 - 4\left(x^2 - 7x + 14\right) = -3x^2 + 16x - 20 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq \frac{10}{3}.$$

Qua hai bước này ta nhận thấy miền giá trị có nghiệm của hệ là $x \in \left[2;\dfrac{10}{3}\right], y \in \left[1;\dfrac{7}{3}\right]$. Do đó ta đề xuất ý tưởng xét hàm số $f(t) = 2t^2 - 3t + 4, \forall t \ge 1$. Ta có $f'(t) = 4t - 3 > 0, \forall t \ge 1$. Như vậy ta sẽ có $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$. Mặt khác ta nhận thấy $f(x) \ge f(2) = 6, f(y) \ge f(1) = 3$.

Vậy $f(x)\cdot f(y) \ge 18$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$. Và như vậy hệ đã toàn được giải quyết.

Lời giải

Xét phương trình thứ hai trong hệ ta có : $x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0\ (*)$.

Nếu ta xem $(*)$ là phương trình bậc hai theo x ta có phương trình có nghiệm khi và chỉ khi :

$$\Delta = (y-7)^2 - 4\left(y^2 - 6y + 14\right) = -3y^2 + 10y - 7 \ge 0 \Leftrightarrow 1 \le y \le \frac{7}{3}.$$

Nếu ta xem $(*)$ là phương trình bậc hai theo biến y ta có phương trình có nghiệm khi và chỉ khi :

$$\Delta = (x-6)^2 - 4\left(x^2 - 7x + 14\right) = -3x^2 + 16x - 20 \ge 0 \Leftrightarrow 2 \le x \le \frac{10}{3}.$$

Vậy $x \in \left[2;\dfrac{10}{3}\right], y \in \left[1;\dfrac{7}{3}\right]$. Từ phương trình thứ nhất trong hệ dẫn đến xét hàm số $f(t) = 2t^2 - 3t + 4, \forall t \ge 1$.

Ta có : $f'(t) = 4t - 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Từ đó dẫn đến $f(x) \ge f(2) = 6, \forall t \in \left[2;\dfrac{10}{3}\right]$, $f(y) \ge f(1) = 3, \forall t \in \left[1;\dfrac{7}{3}\right]$.

Do đó $f(x)\cdot f(y) \ge 18$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Thế lại vào phương trình thứ hai ta thấy không thỏa mãn. Do đó hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bình luận : Bài toán này nó là một biến tấu của dạng hàm số đại diện. Chú ý rằng kết luận nghiệm $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ là một bước tương đương để đẳng thức xảy ra nhưng lại là nghiệm hệ quả của phương trình thứ hai nên nếu không kiểm tra sẽ dẫn đến sai lầm. Tiếp theo ta sẽ nghiên cứu một biến tấu khác của hàm số đại diện qua bài toán sau

Ví dụ 10 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3-2x^2+3x=4\left(y^3-2y^2+3y\right) \\ 3x^2+y^2=2\left(y\sqrt{x(3x+y)}+x\sqrt{3y(y-x)}\right) \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích: Với hệ này chúng ta nhận thấy hai điều sau, thứ nhất là phương trình thứ nhất trong hệ hai vế đã có tính phân li cho hai biến, hình ảnh cấu trúc phương trình giống nhau nhưng chính hệ số 4 đã đẩy phương trình thứ nhất từ điều quen thuộc về hình thức khá lạ mắt. Thứ hai ta dễ dàng quan sát được phương trình thứ hai trong hệ mang dáng dấp đẳng cấp với hai biến nên có thể sử dụng ẩn phụ hóa. Bây giờ ta đi giải quyết từng nhận xét mà ta đã nêu ra.

Với nhận xét "hàm đại diện quen mà lạ" ở phương trình thứ nhất ta sẽ đi tiếp cận sử dụng "cái quen" làm trước.

Cụ thể ta xét hàm số $f(t)=t^3-2t^2+3t, \forall t\in\mathbb{R}$.

Không khó để nhận thấy hàm này tăng trên $\mathbb{R}$. Nhưng vấn đề ở đây ta không suy ra được $x=y$ từ phương rình thứ nhất.

Với nhận xét thứ hai là phương trình thứ hai mang dáng dấp đẳng cấp nên ta đẩy ý tưởng đặt $y=tx$. Tuy nhiên hình thức phương trình thứ hai chứa căn thức nên sau khi đặt ẩn phụ để thu gọn thành công thành một biến t ta cần xác định dấu cho các biến ban đầu. Xuất phát từ suy nghỉ này, ta nghỉ đến tính tăng của hàm đại diện đã xét ta đi đến việc chặn miền nghiệm cho các biến ban đầu.

Từ phương trình thứ nhất ta có: f(x) = 4f(y) và tính tăng của hàm số f(t).

Ta có các nhận xét sau:

Nếu $x>0\Leftrightarrow f(x)>f(0)=0\Leftrightarrow 4f(y)>0\Leftrightarrow f(y)>0\Leftrightarrow y>0$.

Tương tự ta cũng sẽ có $x<0$ thì $y<0$. Mặt khác ta nhận thấy hệ ban đầu luôn có nghiệm $(x,y)=(0;0)$ và hệ sẽ không bao giờ có nghiệm (x,y) với $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases}$

Vậy ta chỉ còn duy nhất một trường hợp $x>0, y>0$. Khi đó với $y=tx$ thì phương trình thứ hai được biến đổi thành phương trình sau :

$$t^2+3=2\left(t\sqrt{t^2+3}+\sqrt{3t^2-3t}\right).$$

Cấu trúc của phương trình này có thể giúp chúng ta nghỉ đến hai phương án hoặc là nâng lũy thừa hai vế hoặc sử dụng 'liên hiệp giả định kéo theo". Và rõ ràng ở đây để có lợi cho tính toán ta sẽ sử dụng phương án thứ hai là "liên hiệp giả định kéo theo". Và như vậy trên cơ sở phân tích này thì hệ của chúng ta có đã cơ bản được giải quyết.

Lời giải :

Nhận xét hệ luôn có nghiệm $(x,y)=(0;0)$.

Xét hàm số $f(t)=t^3-2t^2+3t, \forall t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=3t^2-4t+3=3\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{3}>0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$. Do đó ta có các nhận xét sau:

⊕ Với $x>0$. Ta có $f(x)>f(0)=0\Leftrightarrow 4f(y)>0\Leftrightarrow f(y)>0\Leftrightarrow y>0$.

⊕ Với $x<0$. Ta có $f(x)<f(0)=0\Leftrightarrow 4f(y)<0\Leftrightarrow f(y)<0\Leftrightarrow y<0$.

Mặt khác nếu $\begin{cases}x<0\\y<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x^2+y^2>0\\y\sqrt{x(x+3y)}+x\sqrt{3y(y-x)}<0\end{cases}$. Do đó hệ vô nghiệm.

Vậy $\begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}$. Đặt $y=tx, t>0$. Phương trình thứ hai trong hệ trở thành:

$$3x^2+t^2x^2=2\left(tx\sqrt{x(x+3tx)}+x\sqrt{3tx(tx-x)}\right)$$

$$\Leftrightarrow t^2+3=2\left(t\sqrt{t+3}+\sqrt{3t^2-3t}\right)\Leftrightarrow t\sqrt{t+3}+\sqrt{3t^2-3t}=\frac{t^2+3}{2}$$

Ta xét hệ sau : $\begin{cases}t\sqrt{t+3}+\sqrt{3t^2-3t}=\dfrac{t^2+3}{2}(1)\\ t\sqrt{t+3}-\sqrt{3t^2-3t}=\dfrac{t\left(t^2+3\right)}{t\sqrt{t+3}+\sqrt{3t^2-3t}}=\dfrac{t\left(t^2+3\right)}{\dfrac{t^2+3}{2}}=2t(2)\end{cases}$

Lấy $(1)+(2)$ vế theo vế ta có được phương trình:

$$4t\sqrt{t+3}=t^2+4t+3\Leftrightarrow 16t^2(t+3)=\left(t^2+4t+3\right)^2$$

$$\Leftrightarrow t^4-8t^3-26t^2+24t+9=0\Leftrightarrow\left(t^2+2t-3\right)\left(t^2-10t-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-3\\t=5-2\sqrt{7}\\t=5+2\sqrt{7}\end{array}\right.$$. Đối chiếu điều kiện $t>0$ ta có: $\left[\begin{array}{l}t=1\\t=5+2\sqrt{7}\end{array}\right.$.

Với $t=1\Leftrightarrow y=x$. Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có:

$$x^3-2x^2+3x=4\left(x^3-2x^2+3x\right)\Leftrightarrow x\left(x^2-2x+3\right)=0.$$

Phương trình cuối cùng vô nghiệm với $x>0$.

Với $t=5+2\sqrt{7}\Leftrightarrow y=\left(5+2\sqrt{7}\right)x$. Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có : $x^3-2x^2+3x=4\left(5+2\sqrt{7}\right)\left(\left(53+20\sqrt{7}\right)x^3-2\left(5+2\sqrt{7}\right)x+3x\right)$

$$\Leftrightarrow x\left[\left(4\left(5+2\sqrt{7}\right)\left(53+20\sqrt{7}\right)-1\right)x^2-2\left(4\left(5+2\sqrt{7}\right)^2+1\right)x+12\left(5+2\sqrt{7}\right)-3\right]=0$$

Phương trình cuối cùng vô nghiệm với $x>0$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;0)$.

Bình luận : Đây là một bài toán hay và lạ. Nếu xét trên phương diện kỷ thuật giải thì không mới nhưng nếu xét trên tư tưởng đi đến lời giải thì bài hệ này có tính đột phá về cách xây dựng ý tưởng và gửi gắm ý đồ. Một biến thể của hàm số đại diện, ở đây chúng ta không xử lí điều kiện của hàm số đại diện mà là mượn hàm số đại diện để xử lí điều kiện cho ẩn ban đầu. Một phép toán ngược mà chúng ta đang quan tâm đó là từ điều kiện của biến ban đầu đi xây dựng điều kiện cho hàm số đại diện. Về kỷ thuật đặt ẩn phụ là một kỷ thuật rất thường gặp mà chúng ta đã đi qua các ví dụ trước đó.

Tiếp theo ta chuyển sang nghiên cứu các bài toán giải bằng cách khảo sát trực tiếp một hàm số hoặc hai hàm số để tìm mối quan hệ giữa các biến cũng như tìm nghiệm mà miền nghiệm ta chưa biết.

Ví dụ 11 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3x - x^4 = 63 \\ xy^2 + 2x^2y + x^3 = 27\sqrt{3} \end{cases} \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$.

Phân tích : Với hệ cả hai phương trình trong hệ đều có thể nhóm nhân tử đưa về hệ dễ nhìn hơn.

Cụ thể ta có: $\begin{cases} x\left(y^3 - x^3\right) = 63 \\ x\left(x + y\right)^2 = 27\sqrt{3} \end{cases}$.

Từ phương trình $x\left(x+y\right)^2 = 27\sqrt{3} \Rightarrow x > 0$. Mặt khác từ phương trình thứ nhất ta lại có: $y^3 = \dfrac{63}{x} + x^3$.

Ta suy ra được $y > 0$. Vậy nếu hệ có nghiệm $\left(x, y\right)$ thì ta sẽ có $x > 0, y > 0$.

Và cũng từ nhận xét này ta thấy hệ này hoàn toàn có thể rút thể để quy về một phương trình toàn chứa x.

Thật vậy, từ $\left(x+y\right)^2 = \dfrac{27\sqrt{3}}{x} \Leftrightarrow x + y = \sqrt{\dfrac{27\sqrt{3}}{x}} \Leftrightarrow y = \sqrt{\dfrac{27\sqrt{3}}{x}} - x$.

Thế vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có: $x\left(\left(\sqrt{\dfrac{27\sqrt{3}}{x}} - x\right)^3 - x^3\right) = 63 \ (*)$.

Đặt $t = \sqrt{x}, t > 0$. Lúc đó $(*)$ trở thành : $t^9 - \left(3\sqrt[4]{27} - t^3\right)^3 + 63t = 0$.

Với phương trình này thì khảo sát hàm số để giải là lựa chọn tối ưu nhất .

Xét hàm số $f\left(t\right) = t^9 - \left(3\sqrt[4]{3} - t^3\right)^3 + 63t, \forall t > 0$.

Ta có : $f'\left(t\right) = 9t^8 + 9t^2\left(3\sqrt[4]{3} - t^3\right)^2 + 63 > 0, \forall t > 0$.

Mặt khác ta dự đoán được $t = \sqrt[4]{3}$ thì $f\left(t\right) = 0$. Và như vậy hệ được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải :

Hệ phương trình đã cho được viết lại dưới dạng : $\begin{cases} x\left(y^3 - x^3\right) = 63(1) \\ x(x+y)^2 = 27\sqrt{3}(2) \end{cases}$.

Từ $(2) \Rightarrow x > 0$. Mặt khác từ $(1) \Leftrightarrow y^3 = \dfrac{63}{x} + x^3 \Rightarrow y > 0$.

Từ $(2) \Leftrightarrow y = \dfrac{3\sqrt[4]{27}}{\sqrt{x}} - x$.

Thế vào (1) ta được phương trình : $x\left(\left(\dfrac{3\sqrt[4]{27}}{\sqrt{x}} - x\right)^3 - x^3\right) = 63\ (3)$.

Đặt $t = \sqrt{x}, t > 0$.

Khi đó (3) trở thành phương trình $t^9 - \left(3\sqrt[4]{27} - t^3\right)^3 + 63t = 0$.

Xét hàm số $f(t) = t^9 - \left(3\sqrt[4]{3} - t^3\right)^3 + 63t, \forall t > 0$.

Ta có : $f'(t) = 9t^8 + 9t^2\left(3\sqrt[4]{3} - t^3\right)^2 + 63 > 0, \forall t > 0$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Mặt khác $f\left(\sqrt[4]{2}\right) = 0$.

Do đó phương trình $f(t) = 0$ có nghiệm duy nhất

$t = \sqrt[4]{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt[4]{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \Rightarrow y = 2\sqrt{3}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y) = \left(\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$.

Bình luận : Bài hệ này ngoài việc rút thế thì ta có thể sử dụng phương pháp thế tạo đồng bậc để giả quyết như sau :

$$\begin{cases} x^4\left(t^3 - 1\right) = 63 \\ x^3(t+1)^2 = 27\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{12}\left(t^3 - 1\right)^3 = 63^3 \\ x^{12}(t+1)^8 = \left(27\sqrt{3}\right)^4 \end{cases} \Rightarrow \frac{\left(t^3 - 1\right)^3}{(t+1)^8} = \frac{63^3}{\left(27\sqrt{3}\right)^4}\ (i).$$

Sau đó xét hàm số (i) trên miền $(0;+\infty)$ cũng được. Hoặc có thể rút thế kiểu khác, tuy nhiên cho dù hình thức nào thì điểm mấu chốt để giải quyết của bài toán này là chặn nghiệm và khảo sát một hàm số.

Ví dụ 12: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt[4]{3\left(2x^2 + 3y^2\right) + 49(x-y) + 134} = \dfrac{8}{\sqrt[3]{x - y + 6}} \\ x(x+2y) + y(2y+1) - x - 2 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Phân tích : Nhìn vào hệ này, ta quan tâm ngay được phương trình thứ nhất vì ở phương trình thứ nhất đại lượng $x-y$ xuất hiện rất nhiều lần. Với nhận xét này, ta nhận thấy phương trình thứ hai có chứa x^2, y^2. Vậy phải chăng bài toán muốn chúng ta rút thế từ phương trình thứ hai lên phương trình thứ nhất rồi ẩn phụ hóa $x-y$?

Ta sẽ tiến hành rút thế để tìm câu trả lời cho lối tư duy này.

Cụ thể phương trình thứ hai được viết lại:

$x^2+2xy+2y^2-x+y-2=0 \Leftrightarrow 2x^2+3y^2=x^2+y^2-2xy+x-y+2$

Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có phương trình được biến đổi lại thành :

$$\sqrt[4]{3\left(x^2+y^2-2xy+x-y+2\right)-49(x-y)+134}=\frac{8}{\sqrt[3]{x-y+6}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{3(x-y)^2+52(x-y)+140}=\frac{8}{\sqrt[3]{x-y+6}}.$$

Và tới đây câu trả lời đã rõ.

Đặt $t=x-y$ thì ta có phương trình : $\sqrt[4]{3t^2+52t+140}=\dfrac{8}{\sqrt[3]{t+6}}$ $(*)$

Với hình dáng của phương trình này ta có thể nghỉ tới liên hiệp, nhưng hãy để ý khi thực hiện rút thế ở phương trình thứ hai ta nhận thấy được phương trình thứ hai cũng chứa đại lượng $x-y$ và có chứa hằng đẳng thức nên ta thử xoáy vào điều này xem có điều gì đặc biệt có lợi cho chúng ta không?

Ta có: $x^2+2xy+2y^2=x-y+2 \Leftrightarrow (x+y)^2+y^2=x-y+2 \Rightarrow x-y+2>0$ $\Leftrightarrow x-y>-2$.

Tức là ta có $t>-2$ và như vậy ta sẽ có bước biến đổi tiếp theo sau đây cho $(*)$.

Cụ thể ta sẽ có : $(*) \Leftrightarrow \sqrt[4]{(t+14)(3t+10)}\cdot\sqrt[3]{t+6}=8$. Với phương trình này ta đoán được $t=2$ thì luôn đúng và các biểu thức trong căn đều dương với $t>-2$ nên ta sẽ mạnh dạn đẩy ý tưởng xét hàm số.

Ta xét hàm số $f(t)=\sqrt[4]{(t+14)(3t+10)}\cdot\sqrt[3]{t+6}, \forall t\ge -2$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{(6t+52)\sqrt[3]{t+6}}{16\sqrt[4]{(t+14)^3(3t+10)^3}}+\dfrac{\sqrt[4]{(t+14)(3t+10)}}{3\sqrt[3]{(t+6)^2}}>0, \forall t\ge -2$.

Và như vậy ta đã có $f(t)$ luôn tăng trên $[-2;+\infty)$ và việc dự đoán được $t=2$ thì xem như hệ đã được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}3\left(2x^2+3y^2\right)+49(x-y)+134\ge 0\\ x-y+6\ne 0\end{cases}$.

Từ phương trình thứ hai trong hệ ta có: $x^2+2xy+2y^2-x+y-2=0$, ta có được hai điều sau :

⊕ Thứ nhất : $2x^2+3y^2=x^2+y^2-2xy+x-y+2$.

⊕ Thứ hai : $(x+y)^2+y^2=x-y+2 \Rightarrow x-y+2\ge 0 \Leftrightarrow x-y\ge -2$.

Thế điều thứ nhất vào phương trình thứ nhất trong hệ và biến đổi ta thu được phương trình :

$$\sqrt[4]{3(x-y)^2+52(x-y)+140}=\frac{8}{\sqrt[3]{x-y+6}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{3(x-y)^2+52(x-y)+140}\cdot\sqrt[3]{x-y+6}=8\ (1)$$

Đặt $t=x-y, t\ge -2$.

Khi đó ta có (1) trở thành : $\sqrt[4]{3t^2+52t+140}\cdot\sqrt[3]{t+6}-8=0$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt[4]{3t^2+52t+140}\cdot\sqrt[3]{t+6}-8, \forall t\ge -2$.

Ta có : $f'(t)=\dfrac{(6t+52)\cdot\sqrt[3]{t+6}}{\sqrt[4]{(3t^2+52t+140)^3}}+\dfrac{\sqrt[4]{3t^2+52t+140}}{3\sqrt[3]{t+6}}>0, \forall t\ge -2$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[-2;+\infty)$. Do đó $f(t)=0$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Mà $f(2)=0 \Leftrightarrow t=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(t)=0$.

Kết hợp với phương trình thứ hai trong hệ ta có hệ :

$$\begin{cases}x-y=2\\ x^2+2xy+2y^2-x+y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-2\\ 5x^2-12x+4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-2\\ x=2\vee x=\frac{2}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}\vee\begin{cases}x=\frac{2}{5}\\ y=-\frac{8}{5}\end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left\{(2;0);\left(\frac{2}{5};-\frac{8}{5}\right)\right\}$.

Bình luận: Đây là một bài toán hay, hình thức tạo căn bậc 4 và bậc 3 nếu dùng liên hiệp sẽ có chút khó khăn dù đã chặn được miền của t, nhưng nếu dùng hàm số thì lời giải cho thật ngắn gọn và đẹp. Sự đánh giá để chặn miền nghiệm cũng là một trường hợp hay gặp đối với việc từ phương trình bậc hai hai ẩn để đánh giá một đại lượng nào đó, mà trong các phần trước chúng tôi cũng nhiều lần đề cập.

Ví dụ 13:

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x^4}{y^4}+\dfrac{y^4}{x^4}-\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=-2\\ (2x+y+6)\sqrt{3x+2y+2}+1=\sqrt[3]{3x+7}\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, chúng ta nhận thấy ngay phương trình thứ nhất là phương trình đối xứng với biến $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ nên theo phương pháp bắt nhân tử chung dựa trên tính đối xứng thì khả năng bắt nhân tử phương trình này rất cao, và điều đó càng mạnh thêm niềm tin vì cấu trúc phương trình "rất trơ" không cho chúng ta khai thác được gì.

Để tiện lợi trong tính toán ta ẩn phụ hóa $t=\frac{x}{y}+\frac{y}{x},|t|\ge 2$.

Khi đó ta sẽ có: $\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}=\left(\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-2\right)^2-2=\left(t^2-2\right)^2-2$; $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=t^2-2$.

Do đó phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$\left(t^2-2\right)^2-2-t^2+2+t+2=0\Leftrightarrow t^4-5t^2+t+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t^3-2t^2-t+3=0\end{array}\right.$$

Với phương trình $t^3-2t^2-t+3=0$, sử dụng máy tính bấm nghiệm ta biết được phương trình này vô nghiệm với mọi $|t|\ge 2$. Lúc này để chứng minh phương trình này vô nghiệm thì công cụ hàm số là hiệu quả nhất. Phần này trong lời giải chính thức chúng tôi sẽ chỉ ra.

Bây giờ ta xét nếu $t=2\Leftrightarrow\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2\Leftrightarrow(x+y)^2=0\Leftrightarrow y=-x$. Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$(x+6)\sqrt{x+2}+1=\sqrt[3]{3x+7}\ (x\ge -2)$.

Với phương trình có hai căn bậc lệch thế này thường ta có hai sự chọn lựa là ẩn phụ hóa hoặc liên hiệp. Với cả hai cách giải chúng tôi sẽ đề cập trong phần lời giải chính thức sẽ điều thú vị quanh bài toán này.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}x\ne 0,y\ne 0\\3x+2y+2\ge 0\end{cases}$.

Đặt $t=\frac{x}{y}+\frac{y}{x},|t|\ge 2$. Khi đó ta có : $\begin{cases}\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}=\left(t^2-2\right)^2-2\\\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=t^2-2\end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$t^4-4t^2+2-\left(t^2-2\right)+t+2=0\Leftrightarrow t^4-5t^2+t+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t^3-2t^2-t+3=0\end{array}\right.\ (*)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-2t^2-t+3,\forall|t|\ge 2$.

Ta có $f'(t)=3t^2-4t-1$.

Lại có $f'(t)=0 \Leftrightarrow 3t^2-4t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{2+\sqrt{7}}{2}(l) \\ t=\dfrac{2-\sqrt{7}}{2}(l) \end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên (Nhờ em vẽ dùm).

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $f(t)\le -11$ khi $t\le -2$, $f(t)\ge 1$ khi $t\ge 2$.

Do đó $f(t)=0$ vô nghiệm với mọi $|t|\ge 2$.

Vậy từ $(*)$ ta có $t=2 \Leftrightarrow \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2 \Leftrightarrow (x+y)^2=0 \Leftrightarrow y=-x$. Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình : $(x+6)\sqrt{x+2}+1=\sqrt[3]{3x+7}$ (2) điều kiện là $x\ge -2$.

⊕ Cách 1 : Ẩn phụ hóa kết hợp xét hàm số đại diện.

Đặt $a=\sqrt{x+2}\,(a\ge 0)$. Ta có $x=a^2-2$.

Khi đó (2) trở thành : $a^3+4a+1=\sqrt[3]{3a^2+1}$ (3)

Lại đặt $b=\sqrt[3]{3a^2+1} \Leftrightarrow b^3=3a^2+1$. Kết hợp ta có : $\begin{cases} a^3+4a+1=b \\ 3a^2+1=b^3 \end{cases}$.

Cộng vế theo vế hai phương trình ta được : $(a+1)^3+(a+1)=b^3+b$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+t, \forall t\in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó

$f(a+1)=f(b) \Leftrightarrow a+1=b \Leftrightarrow a+1=\sqrt[3]{3a^2+1}$

$\Leftrightarrow a^3+3a=0 \Leftrightarrow a=0$ (do $a\ge 0$).

Với $a=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=0 \Leftrightarrow x=-2 \Rightarrow y=2$.

⊕ Cách 2 : Ẩn phụ hóa kết hợp với liên hiệp.

Đặt : $\sqrt{x+2}=a\,(a\ge 0) \Rightarrow x=a^2-2$.

Phương trình (2) trở thành :

$$a^3+4a+1=\sqrt[3]{3a^2+1} \Leftrightarrow \left(a^3+3a\right)+\left(a-1-\sqrt[3]{3a^2+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a\left(a^2+3\right)+\frac{a\left(a^2+3a\right)}{a+1+(a+1)\sqrt[3]{3a^2+1}+\sqrt[3]{\left(3a^2+1\right)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow a\left(1+\frac{1}{(a+1)^2+(a+1)\sqrt[3]{3a^2+1}+\sqrt[3]{\left(3a^2+1\right)^2}}\right)=0 \text{ vì } a^2+3>0.$$

$$\Leftrightarrow a=0 \text{ vì } 1+\frac{1}{(a+1)^2+(a+1)\sqrt[3]{3a^2+1}+\sqrt[3]{(3a^2+1)^2}}>0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=0 \Leftrightarrow x=-2 \Rightarrow y=2.$$

Vậy qua hai cách và đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(-2;2)$.

Bình luận : Bài toán này thật chất phương trình thứ nhất là trường hợp đẳng thức xảy ra của một bất đẳng thức. Nội dung chứa trong bài hệ khá bao quát và kiểm tra được nhiều vấn đề và các bạn thấy đó đôi lúc hàm số là một sự chọn lựa khá đúng trong chứng minh phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 14:

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)^2(x^2+y^2-2)=(x^2+y^2)(xy+2)\\ 2(x^3+3y^2-13)(y+7)=y(3-y)-x^2\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này một lần nữa ta lại nhận thấy phương trình thứ nhất trong hệ có tính đối xứng nên có khả năng bắt được nhân tử rất cao và như ví dụ trước thì điều này càng khẳng định hơn khi mà phương trình thứ hai chẳng cho ta được mối liên quan nào cả.

Phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình sau :

$$(x+y)^2(x^2+y^2)-2(x+y)^2-xy(x^2+y^2)-2(x^2+y^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2(x^2+y^2)-2(x+y)^2-xy(x^2+y^2)-2(x^2+y^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2+2xy(x^2+y^2)-4(x^2+y^2)-4xy-xy(x^2+y^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2)(x^2+y^2-4)+xy(x^2+y^2-4)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-4)\left(\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+y^2=4\\ \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Với $(x,y)=(0;0)$ không quá khó để kiểm tra.

Với $x^2+y^2=4$ thì phương trình thứ hai trở thành: $x^3-3x^2-1=\dfrac{3y-4}{2y+14}$.

Phương trình này đã cô lập đươc hai biến, cộng với trường hợp này ta có thể suy ra miền giá trị của x,y nên ta đẩy ý tưởng xét từng hàm số trên từng miền nghiệm riêng của nó rồi so sánh đưa ra kết quả cuối cùng. Vậy ta sẽ đi vào lời giải của bài toán như sau.

Lời giải : Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta biến đổi được phương trình :

$$(x+y)^2(x^2+y^2)-2(x+y)^2-xy(x^2+y^2)-2(x^2+y^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2(x^2+y^2)-2(x+y)^2-xy(x^2+y^2)-2(x^2+y^2)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+y^2\right)^2+2xy\left(x^2+y^2\right)-4\left(x^2+y^2\right)-4xy-xy\left(x^2+y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2-4\right)+xy\left(x^2+y^2-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+y^2-4\right)\left(\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+y^2=4\\ \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Với $(x,y)=(0;0)$ thì hệ không thỏa mãn.

Với $x^2+y^2=4\Leftrightarrow y^2=4-x^2$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$2\left(x^3-3x^2+1\right)(y+7)=3y-4\ (1)$.

Do $x^2+y^2=4\Rightarrow\begin{cases}-2\le x\le 2\\ -2\le y\le 2\end{cases}$ nên từ (1) ta có : $x^3-3x^2-1=\dfrac{3y-4}{2y+14}\ (2)$.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2-1,\forall x\in[-2;2]$. Ta có $f'(x)=3x^2-6x$.

Lại có $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=-1\\ x=2\Rightarrow y=-5\end{array}\right.$.

Mặt khác $f(-2)=-21$.

Vẽ bảng biến thiên ta có được $\forall x\in[-2;2]\Rightarrow -21\le f(x)\le -1$.

Xét hàm số $f(y)=\dfrac{3y-4}{2y+14},\forall x\in[-2;2]$.

Ta có $f'(y)=\dfrac{50}{(2y+14)^2}>0,\forall x\in[-2;2]$.

Do đó hàm số $f(y)$ đồng biến trên $[-2;2]$ nên $-1=f(-2)\le f(y)\le f(2)=\dfrac{1}{9}$.

Vậy ta sẽ có : $\begin{cases}-21\le f(x)\le -1\\ -1\le f(y)\le\dfrac{1}{9}\end{cases}$ nên từ (2) ta có $f(x)=f(y)=-1\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-2\end{cases}$

Thử lại ta thấy thỏa mãn nên nghiệm của hệ phương trình là $(x,y)=(2;-2)$.

Bình luận : Bài toán này thuần hàm số và do chúng tôi đề xuất, trong nó là sự kết hợp của hai hàm số trên một miền mà ta đánh giá được giá trị lớn nhất của hàm này là giá trị nhỏ nhất của hàm kia thì lời giải hàm số là lời giải tối ưu nhất cho loại này. Sự khó hay và thú vị của bài toán sẽ được tăng lên khi tác giả chọn hàm có độ khó và việc chặn nghiệm cũng được nâng độ khó lên. Nhưng về cơ bản của bản chất thì chúng ta luôn có thể giải tốt loại này dựa trên những tính chất đã nhắc đến hoặc một vài đánh giá bất đẳng thức cơ bản.

Ví dụ 15 :

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)(25-4xy)=\dfrac{105}{4}+4x^2+17y^2\,(1)\\4x^2+4y^2+4x-4y=7\,(2)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, ta nhận xét được cả hai phương trình trong hệ đều là phương trình bậc hai hai ẩn, tuy nhiên ta không thể phân tích thành nhân tử trên từng phương trình vì không có delta chính phương. Tuy nhiên, phương trình thứ hai có cấu trúc là dạng một phương trình đường tròn nên ta sẽ tách về dạng $(x-a)^2+(y-b)^2=k^2$.

Cụ thể ta có phương trình thứ hai được tách thành: $(2x+1)^2+(2y-1)^2=9$. Tới đây ta có được đánh giá miền nghiệm của x,y nên ta có thể đẩy tư duy bài toán này về xét hàm số .

Tuy nhiên để xét được hàm số ta cần phải cô lập được hai biến x,y muốn vậy ta cần khử được đại lượng xy có trong phương trình thứ nhất trong hệ.

Để ý thấy trong phương trình (1) ta có trong cả vế đều chứa $x+y$ nên ta sẽ nghỉ đến phép thế.

Từ (1) ta có :

$$(x+y)(25-4xy)=\frac{105}{4}+4\left(x^2-y^2\right)+21y^2$$

$$\Leftrightarrow(x+y)\big(25-4xy-(4x-4y)\big)=\frac{105}{4}+21y^2$$

Tới đây ta nhận thấy từ (2) ta có: $4x-4y=7-4x^2-4y^2$, thế vào ta có phương trình :

$$(x+y)\left(25-4xy+4x^2+4y^2-7\right)=\frac{105}{4}+21y^2$$

$$\Leftrightarrow(x+y)\left(18+4\left(x^2-xy+y^2\right)\right)=\frac{105}{4}+21y^2$$

$$\Leftrightarrow 18(x+y)+4\left(x^3+y^3\right)=\frac{105}{4}+21y^2\Leftrightarrow 4x^3+18x+4y^3-21y^2+18y=\frac{105}{4}.$$

Tới đây ta đề xuất xét hai hàm số $f(x)=4x^3+18x$, $f(y)=4y^3-21y^2+18y$.

Từ (2) ta có : $\begin{cases}-2\le x\le 1\\-1\le y\le 2\end{cases}$. Khảo sát hai hàm số $f(x),f(y)$ trên từng miền nghiệm của hàm, ta sẽ có :

$$\begin{cases}-68\le f(x)\le 22\\-43\le f(y)\le\dfrac{17}{4}\end{cases}\Rightarrow f(x)+f(y)\le\frac{105}{4}.$$

Và tới đây mọi thứ đã rõ ràng và hệ đã được giải quyết.

Lời giải :

Từ (2) ta có : $(2x+1)^2+(2y-1)^2=9\Rightarrow\begin{cases}-3\le 2x+1\le 3\\-3\le 2y-1\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le x\le 1\\-1\le x\le 2\end{cases}$.

Mặt khác từ (2) ta cũng có : $4x-4y=7-4x^2-4y^2\ (*)$.

Phương trình (1) được biến đổi trở thành phương trình :

$$(x+y)(25-4xy)=\frac{105}{4}+4x^2-4y^2+21y^2$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(25-4xy-(4x-4y)\right)=\frac{105}{4}+21y^2\ (3)$$

Thế $(*)$ vào (3) ta có: $(x+y)\left(18+4\left(x^2-xy+y^2\right)\right)=\frac{105}{4}+21y^2$

$$\Leftrightarrow 18(x+y)+4\left(x^3+y^3\right)-21y^2=\frac{105}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x^3+18x+4x^3-21y^2+18y=\frac{105}{4}\ (4)$$

Xét hàm số $f(x)=4x^3+18x,\forall x\in[-2;1]$.

Ta có : $f'(x)=12x^2+18>0,\forall x\in[-2;1]$.

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[-2;1]$. Do đó $-68=f(-2)\le f(x)\le f(1)=22$.

Xét hàm số $f(y)=4y^3-21y^2+18y,\forall y\in[-1;2]$.

Ta có : $f'(y)=12y^2-42y+18$.

Lại có $f'(y)=0\Leftrightarrow 12y^2-42y+18=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x=3(1)\end{array}\right.$.

Mà $f(-1)=-43,f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{4},f(2)=-16$.

Từ đây ta có : $-43\le f(y)\le\frac{17}{4}$. Vậy : $\begin{cases}-63\le f(x)\le 22\\-43\le f(y)\le\frac{17}{4}\end{cases}\Rightarrow f(x)+f(y)\le\frac{105}{4}$.

Vậy từ $(4)\Leftrightarrow f(x)+f(y)=\frac{105}{4}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$.

Thử lại ta thấy thỏa mãn hệ.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x,y)=\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Bình luận : Bài toán này do chúng tôi đề xuất, tuy nhiên ngoài lời giải bằng hàm số như trong lời giải thì chúng ta vẫn có thể giải bài toán này bằng phép ẩn phụ hóa $\begin{cases} a=\frac{2x+1}{3} \\ b=\frac{2y-1}{3} \end{cases}$, thế vào hệ và biến đổi ta có hệ mới là: $\begin{cases} 9b-6b^3=6a^3+14a-20 \\ a^2+b^2=1 \end{cases}$.

Hệ này giải được bằng phương pháp thế. Và như ví dụ số 19 ở phương pháp cộng trừ nhân chéo ta cũng có thể giải hệ này bằng phương pháp cộng trừ "ghép và tạo", các bạn hãy thử sức nhé.

Ví dụ 16: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4+4y^3+\left(x^4-1\right)y+4y^2=1(1) \\ 8y^3+4\sqrt{x^2+1}=x^2+6y+2(2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

(Thi thử Quãng Xương 1- Thanh Hóa lần 1 – 2015)

Phân tích : Với hệ này, chúng ta không khó nhận ra phương trình thứ nhất ta sẽ bắt được nhân tử chung $y+1$. Nên ta bắt tay vào khai thác điều này ngay.

Cụ thể ta có :

$$x^4+4y^3+\left(x^4-1\right)y+4y^2=1 \Leftrightarrow (y+1)x^4+4y^2(y+1)-(y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)\left(x^4+4y^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ x^4+4y^2=1 \end{array}\right..$$

Với $y=-1$, không có gì để quan tâm vì quá đơn giản. Với $x^4+4y^2=1$ gợi ảnh đến tính chất dùng để suy ra miền nghiệm.

Vậy có khả năng hệ này sẽ giải bằng hàm số rất cao. Điều này càng được khẳng định vì với $x^4+4y^2=1$, ta không thể thay thế gì được vào phương trình hai vì chỉ tạo thêm căn thức phức tạp, trong khi đó rõ ràng phương trình thứ hai các biến đã cô lập nên việc giải nó bằng hàm số là khả năng tối ưu nhất. Vậy đường hướng giải hệ đã có, ta đi vào lời giải để hoàn thành hệ này.

Lời giải :

Từ (1) ta có:

$$(y+1)x^4+4y^2(y+1)-(y+1)=0 \Leftrightarrow (y+1)\left(x^4+4y^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ x^4+4y^2=1 \end{array}\right..$$

Với $y=-1$ thay vào (2) ta có :

$$4\sqrt{x^2+1} = x^2+4 \Leftrightarrow x^2\left(x^2-8\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2\sqrt{2} \\ x=-2\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Với $x^4+4y^2=1 \Rightarrow \begin{cases} 0\le x^2\le 1 \\ -1\le 2y\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ -\dfrac{1}{2}\le y\le \dfrac{1}{2} \end{cases}.$

Từ (2) ta có : $4\sqrt{x^2+1}-x^2+8y^3-6y-2=0\ (*)$.

Xét hàm số $f(x)=4\sqrt{x^2+1}-x^2, \forall x\in[-1;1]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+1}}-2x=\dfrac{2x\left(2-\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$

Lại có $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow f(0)=4$ vì $2-\sqrt{x^2+1}>0, \forall x\in[-1;1]$.

Mặt khác ta có : $f(-1)=f(1)=4\sqrt{2}-1$. Do đó ta có : $4\le f(x)\le 4\sqrt{2}-1$.

Xét hàm số $f(y)=8y^3-6y-2, \forall y\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.

Ta có : $f'(y)=24y^2-6=6\left(4y^2-1\right)\le 0, \forall y\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.

Vậy hàm số $f(y)$ luôn nghịch biến trên $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.

Mặt khác ta có: $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0; f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-4$. Do đó $-4\le f(y)\le 0$.

Vậy : $\begin{cases} 4\le f(x)\le 4\sqrt{2}-1 \\ -4\le f(y)\le 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)+f(y)\ge 0$.

Do đó từ $(*)\Leftrightarrow f(x)+f(y)=0\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$

Thử lại thấy thỏa mãn hệ nên hệ phương trình đã cho có nghiệm

$$(x,y)=\left\{(0;-1);\left(2\sqrt{2};-1\right);\left(-2\sqrt{2};-1\right);\left(0;\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Bình luận : Bài toán này được tác giả xây dựng theo ý tưởng dùng hàm số để giải. Với cấu trúc của hệ khá dễ đoán. Tuy nhiên, chúng tôi đánh giá bài toán này khá

thú vị vì nếu chưa từng gặp hay tiếp xúc với loại hệ này thì đây chưa chắc là bài toán dễ đối với số đông học sinh.

Ví dụ 17: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(x-10y^2-11\right)\sqrt{x-1}+\left(x+1\right)\left(y^2-10\right)=-y^4-21\\ 2\left(3y^2+7x\right)-9\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}-74=0\end{cases}\quad \left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Phân tích : Với hệ này, ta nhận thấy sự xuất hiện của hai căn $\sqrt{x-1},\sqrt{y-2}$ nên việc ta nghỉ đến ẩn phụ hóa. Tuy nhiên, hãy để ý bậc của y trên phương trình thứ nhất khá cao nên nếu ta theo phép ẩn phụ hóa như suy nghỉ sẽ tạo cho phương trình thứ nhất là một biểu thức có bậc là 8. Một con số mà ta không thể mạo hiểm được. Mặt khác ta nhận thấy ở phương trình thứ nhất nếu ta ẩn phụ $t=\sqrt{x-1}$ thì ta sẽ thu được một phương trình bậc ba theo t nên ta có thể nghỉ đến việc bắt nhân tử.

Trước tiên ta sẽ biến đổi phương trình thứ nhất như sau :

$$\left(x-10y^2-11\right)\sqrt{x-1}+y^4+11+xy^2-10x+y^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-10y^2-11\right)\sqrt{x-1}+y^4+xy^2+11\left(1-x\right)+x+y^2=0.$$

Tới đây, ta nhận thấy rằng ta sẽ ẩn phụ hóa $t=\sqrt{x-1}$ nhưng ta để ý thấy vế phải cũng chứa $x-1$ nên ta sẽ chuyển hướng đổi phương trình bậc hai theo t và giữ nguyên x bên ngoài xem như tham số và hy vọng sẽ có delta chính phương. Còn nếu không chúng ta sẽ chuyển hướng đưa về phương trình bậc ba theo t như suy luận ban đầu ta đã vạch ra.

Với suy nghỉ này, đưa phương trình cuối về phương trình :

$$-11t^2+\left(x-10y^2-11\right)t+\left(y^4+xy^2+y^2+x\right)=0.$$

Phương trình này có

$$\Delta=\left(x-10y^2-11\right)^2+44\left(y^4+xy^2+y^2+x\right)=\left(x+12y^2+11\right)^2.$$

Vậy phương trình này tách được nhân tử. Do đó ta sẽ biễu diễn phương trình này thành phương trình :

$$\left(-11t+y^2+x\right)\left(t+y^2+1\right)=0\Leftrightarrow 11t=y^2+x \text{ vì với } \begin{cases}x\ge 1\\ y\ge 2\end{cases}\Rightarrow y^2+1+t>0.$$

Lúc này ta thực hiện phép thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta có được phương trình : $2\sqrt{x-1}+13x+\sqrt{y-2}+5y^2=74$.

Phương trình này gợi ảnh xét hàm số. Và như vậy xem như hệ đã có đường lối giải quyết tốt.

Lời giải :

Điều kiện : $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 2 \end{cases}$.

Biến đổi (1) ta có phương trình :

$-11(x-1)+\left(x-10y^2-11\right)\sqrt{x-1}+\left(y^4+xy^2+x+y^2\right)=0\ (*)$

Đặt $t=\sqrt{x-1}, t\ge 0$. Lúc đó $(*)$ trở thành :

$-11t^2+\left(x-10y^2-11\right)t+\left(y^4+xy^2+x+y^2\right)=0\ (3)$.

Ta có : $\Delta=\left(x-10y^2-11\right)^2-4\left(y^4+xy^2+x+y^2\right)=\left(x+12y^2+11\right)^2$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow\left(-11t+y^2+x^2\right)\left(t+y^2+1\right)=0\Leftrightarrow y^2+x=11\sqrt{x-1}$ vì

$t+y^2+1>0$.

Thế vào (2) ta có phương trình :

$y^2+x-9\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}+13x+5y^2-74=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}+13x+\sqrt{y-2}+5y^2=74\ (5)$

Xét hàm số $f(x)=2\sqrt{x-1}+13x, \forall x\ge 1$. Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+13>0, \forall x>1$.

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Từ đó $\forall x\in[1;2]\Rightarrow f(1)\le f(x)\le f(2)\Leftrightarrow 13\le f(x)\le 28$.

Xét hàm số $f(y)=\sqrt{y-2}+5y^2, \forall y\ge 2$.

Ta có : $f'(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y-2}}+5y>0, \forall y>2$.

Vậy hàm số $f(y)$ đồng biến trên $[2;+\infty)$.

Từ đó $\forall y\in[2;3]\Rightarrow f(2)\le f(x)\le f(3)\Leftrightarrow 20\le f(y)\le 46$.

Do đó từ (5) ta có $f(x)+f(y)=74\Rightarrow\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$. Thử lại ta thấy hệ thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x,y)=(2;3)$

Bình luận: Bài toán này có độ khó hơn các bài toán trước Vì nghiệm của hệ đã cho không nằm ở mút miền nghiệm mà là trong miền nghiệm.

VI. HỆ PHƯƠNG TRÌNH GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ.

Đây là một phương pháp khá mạnh và để nhận diện hệ giải bằng phương pháp này là một chướng ngại không hề nhẹ đối với người giải. Để giải hệ này yếu tố cần có đó chính là độ tinh tế, sự nhạy cảm và thông hiểu, vận dụng đúng đại lượng nào cần đánh giá và đánh giá bằng cách nào thì điều này còn có nhiều bỏ ngõ đối với học sinh.

Trong đề mục này chúng ta thường gặp các dạng hệ đánh giá thông qua các hướng sau :

1) *Đánh giá qua điều kiện nghiệm của hệ.*

Thông thường hệ đánh giá được qua điều kiện nghiệm ta thường gặp các đánh giá cơ bản sau đây :

⊕ *Yếu tố điều kiện có nghiệm của một phương trình bậc 2.*

⊕ *Đưa về dạng* $f_1^2(x)+f_2^2(x)+f_3^2(x)+...+f_n^2(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)=0 \\ f_2(x)=0 \\ f_3(x)=0 \\ ... \\ f_n(x)=0 \end{cases}$.

2) *Đánh giá qua các bất đẳng thức cơ bản.*

Thông thường hệ được đánh giá thông qua các bất đẳng thức ta thường gặp các đánh giá sau :

⊕ $a^2+b^2 \ge 2ab, \forall a,b \in \mathbb{R}$. *Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi* $a=b$.

⊕ $(a+b)^2 \ge 4ab, \forall a,b \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2 \ge \dfrac{(a+b)^2}{2}, \forall a,b \in \mathbb{R}$,

$\dfrac{a^n+b^n}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$, $\forall a,b>0, n \in \mathbb{N}^*$.

⊕ *Bất đẳng thức AM- GM (hay còn gọi là bất đẳng Cauchuy).*

$a+b \ge 2\sqrt{ab}, \forall a,b \ge 0$. *Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi* $a=b$.

Tổng quát : $a_1+a_2+...+a_n \ge n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$, $\forall a_i \ge 0, i=\{1,2,...,n\}, n \in \mathbb{N}, n \ge 2$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1=a_2=...=a_n$

⊕ *Bất đẳng thức B.C.S (bất đẳng thức Bunnhicopxki).*

$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \ge (ac+bd)^2, \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ad=bc$.

Tổng quát :

$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2) \ge (a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2, \forall a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

⊕ *Bất đẳng thức B.C.S dạng phân số (hay bất đẳng thức Sva xơ).*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} \ge \frac{(a_1 + a_2)^2}{b_1 + b_2}, \forall a_1, a_2 \in \square, b_1, b_2 > 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

Tổng quát : $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_2}$, $\forall a_j \in \square, b_j > 0$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

⊕ *Bất đẳng thức Mincopxki.*

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \ge \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} ad = bc \\ ac + bd \ge 0 \end{cases}$

⊕ *Bất đẳng thức dấu giá trị tuyệt đối.*

$|A| + |B| \ge |A + B|$. *Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi* $AB \ge 0$.

$|A - B| \ge |A| - |B|$. *Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi* $(A - B)B \ge 0$.

⊕ *Một số bổ đề thường dùng.*

\+ $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \ge \frac{2}{1 + \sqrt{ab}}$, *với* $a > 0, b > 0, ab \ge 1$.

\+ $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \le \frac{2}{1 + \sqrt{ab}}$, *với* $a > 0, b > 0, ab \le 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra ở cả hai bổ đề khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b \\ ab = 1 \end{cases}$.

Ở thể loại hệ được giải bằng phương pháp này ta thường gặp các bài toán mà đánh giá có thể xảy ra trên một phương trình trong hệ hoặc cả hai phương trình trong hệ hoặc có được đánh giá khi kết hợp cả hai phương trình lại. Sau đây chúng ta sẽ đi vào các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 5y^2 - 4xy - 2x + 8y + 5 = 0 (1) \\ 3\sqrt[3]{x^3 + xy + 6y^2 - 2} + \sqrt{y^3 + 2x^2 - 6} = 5 (2) \end{cases}$ $(x, y \in \square)$

Phân tích : Với hệ này, rõ ràng chúng ta không thể bắt đầu với phương trình thứ hai. Phương trình thứ nhất lại là một phương trình bậc hai hai ẩn quen thuộc nên ta sẽ tính delta của phương trình này xem thử nghiệm của hệ này sẽ bị chặn ở đâu.

Ta biến đổi phương trình thứ nhất thành : $x^2 - 2(2y+1)x + 5y^2 + 8y + 5 = 0$.

Ta có $\Delta' = (2y+1)^2 - 5y^2 - 8y - 5 = -(y+2)^2$.

Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -(y+2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow y+2=0 \Leftrightarrow y=-2$.

Từ đây ta suy ra được $x=-3$. Và tới đây việc còn lại là thử lại nghiệm là hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $y^3 + 2x^2 - 8 \geq 0$

Ta có $(1) \Leftrightarrow x^2 - 2(2y+1) + 5y^2 + 8y + 5 = 0$.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta' = (2y+1)^2 - 5y^2 - 8y - 5 = -(y+2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow y+2=0 \Leftrightarrow y=-2$.

Thay $y=-2$ vào (1) ta có : $(x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x=-3$.

Thế $x=-3, y=-2$ vào (2) ta có kết quả luôn đúng.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y) = (-3;-2)$.

Bình luận : Cấu trúc của bài toán buộc lòng chúng ta phải xoáy vào phương trình thứ nhất. Vì với phương trình này chúng ta có nhiều đường hướng để gợi mở như là bắt nhân tử và chặn miền nghiệm. Và thực tế bài này là chúng ta sủ dụng điều kiện có nghiệm của phương trình này để tìm nghiệm của hệ.

Ví dụ 2:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (y-2x)^2 + 4 = y - 6x + 2\sqrt{2(x+1)(y+1)} \, (1) \\ (y-1)(x^2+x) + 1 = \sqrt{y} \cdot \sqrt[3]{1-3x} \, (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, rõ ràng sự lựa chọn công phá từ phương trình thứ nhất là lựa chọn tối ưu vì phương trình chứa hai căn bậc lệch và nếu có tính đến ẩn phụ hóa thì cũng không tìm được mối liên quan nào có lợi để giải hệ.

Ta biến đổi (1) về phương trình sau :

$(y-2x)^2 + 4 - (y-6x) = 2\sqrt{2(x+1)(y+1)}$.

Tới đây ta hãy để ý đại lượng ngoài căn và không có bình phương: $4 - y + 6x$ có liên quan đến đại lượng trong căn và đại lượng dưới mũ 2.

Thật vậy, ta có : $2(x+1)(y+1) = (2x+2)(y+1)$ có $2x+2+y+1 = 2x+y+3$

Vậy ta sẽ tìm mối quan hệ :

$4-y+6x=m(2x+y+3)+n(y-2x)=(2m-2n)x+(m+n)y+3m$.

Ta đồng nhất hệ số hai vế ta sẽ có $\begin{cases}2m-2n=6\\ m+n=-1\\ 3m=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\ n=-2\\ 3m=4\end{cases}$. Và tới đây, ta nhận đinh được rằng hệ số 4 sẽ điều chỉnh lại là 3 thì (m,n) = (1 ;-2) là bộ số thuận lợi nhất.

Khi đó ta có $(1)\Leftrightarrow(y-2x)^2+1+6x-y+3-2\sqrt{2(x+1)(y+1)}=0$

$\Leftrightarrow(y-2x)^2-2(y-2x)+1+2x+y+3-2\sqrt{2(x+1)(y+1)}=0$

$\Leftrightarrow(y-2x-1)^2+2x+2-2\sqrt{2(x+1)(y+1)}+y+1=0$

$\Leftrightarrow(y-2x-1)^2+\left(\sqrt{2x+2}-\sqrt{y+1}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y-2x-1=0\\ \sqrt{2x+2}=\sqrt{y+1}\end{cases}\Leftrightarrow y=2x+1$.

Và tới đây, ta chỉ cần thực hiện phép thế vào (2) ta được phương trình :

$2x^3+2x+1=\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt[3]{1-3x}$.

Để ý vế phải phương trình này chưa tích mà mỗi thừa số có dạng $\sqrt{ab},\sqrt[3]{abc}$ nên ta nghỉ đến bất đẳng thức $AM-GM$. Mặt khác ta đoán được nghiệm của phương trình là $x=0$.

Vậy nếu ta sử dụng dạng $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ thì $\sqrt{1+2x}\le\frac{1+1+2x}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 1=1+2x\Leftrightarrow x=0$

Còn nếu $\sqrt[3]{abc}\le\frac{a+b+c}{2}$ thì $\sqrt[3]{1-3x}\le\frac{1+1+1-3x}{3}$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 1=1=1-3x\Leftrightarrow x=0$.

Như vậy hướng phán đoán của chúng ta có thêm niềm tin để giải phương trình này bằng đánh giá là chính xác. Do đó hệ có thể giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}x\ge-1\\ y\ge 0\end{cases}$.

Từ (1) ta biến đổi thành phương trình sau:

$(y-2x)^2-2(y-2x)+1+2x+2-2\sqrt{2(x+1)(y+1)}+y+1=0$

$\Leftrightarrow(y-2x-1)^2+\left(\sqrt{2x+2}-\sqrt{y+1}\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}y-2x-1=0\\ \sqrt{2x+2}=\sqrt{y+1}\end{cases}\Leftrightarrow y=2x+1$.

Thế vào (2) ta có phương trình : $2x^3+2x^2+1=\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt[3]{1-3x}$.

Từ điều kiện $\begin{cases} x\ge -1 \\ x\ge -\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{2}$, ta có $2x^3+2x^2+1=2x^2(x+1)+1>0$.

Suy ra : $\sqrt[3]{1-3x}>0\Leftrightarrow x\le\frac{1}{3}$. Vậy tổng hợp các điều kiện ta có : $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{3}$.

Áp dụng bất đẳng AM – GM ta có : $\begin{cases} \sqrt{1+2x}\le\dfrac{1+1+2x}{2}=x+1 \\ \sqrt[3]{1-3x}\le\dfrac{1+1+1-3x}{3}=1-x\end{cases}$

Từ đây ta suy ra : $0<\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt[3]{1-3x}\le(x+1)(1-x)$.

Vậy ta cần chứng minh : $2x^3+2x^2+1\le(x+1)(1-x),\ \forall x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right]$.

Ta có : $2x^3+2x^2+1\le 1-x^2\Leftrightarrow x^2(2x+3)\ge 0$ (luôn đúng $\forall x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right]$).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0$ (thỏa mãn). Suy ra : $y=1$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(0;1)$

Bình luận : Bài toán được giải bằng cách đánh giá trên từng phương trình trong hệ. Ở phương trình thứ nhất ta sử dụng hằng đẳng thức và dùng tính chất tổng các số không âm, phương trình thứ hai ta dùng bất đẳng thức cơ bản để giải quyết. Có một vấn đề chắc các bạn thắc mắc là tại sao chúng ta không biến đổi : $4-y+6x=m(x+2y+3)+n(y-2x)$. Điều này là thắc mắc có lý. Câu trả lời với phân tích này chúng ta tìm được bộ số (m,n) "không có lợi" cho chúng ta biến đổi.

Ví dụ 3:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 8\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)+\dfrac{5-8y^2}{x}=\sqrt{\dfrac{y}{x}}\left(8\sqrt{xy}+\dfrac{1}{xy}\right) \\ 8\left(x^2+y^2\right)+\dfrac{1}{\sqrt{xy}}=5\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích: Với hệ này, bước đầu tiên ta cần biến đổi lại phương trình thứ nhất của hệ để cho dễ nhìn hơn.

Cụ thể ta có phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình :

$$8x\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)+5-8y^2=\sqrt{xy}\left(8\sqrt{xy}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\right).$$

Tới đây ta quan sát với phương trình thứ hai ta nghỉ đến ngay phép thế.

Cụ thể từ phương trình thứ hai ta có: $5-8y^2=8x^2+\frac{1}{\sqrt{xy}}$, thế vào phương trình mới biến đổi và thu gọn ta được phương trình :

$$x-\sqrt{x}=y-\sqrt{y}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1\end{array}\right..$$

Ta quan tâm đến hệ sau :

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=1\\ 8\left(x^2+y^2\right)+\frac{1}{\sqrt{xy}}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\ 8\left(a^4+b^4\right)+\frac{1}{ab}=5\end{cases}\text{ với }\begin{cases}a=\sqrt{x}\\ b=\sqrt{y}\end{cases}.$$

Ở hệ này ta liên tưởng đến đánh giá quen thuộc : $a^2+b^2\ge\frac{\left(a+b\right)^2}{2}$ hai lần ta sẽ có được lời giải.

Vậy hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $x>0,y>0$

Phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình :

$$8x\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)+5-8y^2=\sqrt{xy}\left(8\sqrt{xy}+\frac{1}{xy}\right)$$

Lấy phương trình vừa biến đổi cộng với phương trình thứ hai trong hệ vế theo vế ta thu được :

$$x-\sqrt{x}=y-\sqrt{y}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1\end{array}\right.$$

- Trường hợp 1 : $x=y$. Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$16x^2+\frac{1}{x}=5\Leftrightarrow16x^3-5x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{4}\\ x=\frac{-1-\sqrt{17}}{8}\\ x=\frac{-1+\sqrt{17}}{8}\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được $x=y=\frac{1}{4};x=y=\frac{-1+\sqrt{17}}{8}$

- Trường hợp 2 : $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$. Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x}\\ b=\sqrt{y}\end{cases},\ a,b>0$.

Khi đó ta có hệ mới : $\begin{cases} a+b=1 \\ 8\left(a^4+b^4\right)+\dfrac{1}{ab}=5 \end{cases}$

Ta có $a^2+b^2 \ge \dfrac{(a+b)^2}{2}$. Do đó : $a^4+b^4 \ge \dfrac{\left(a^2+b^2\right)^2}{2} \ge \dfrac{\left(\dfrac{(a+b)^2}{2}\right)^2}{2}=\dfrac{1}{8}$.

Vậy ta có : $8\left(a^4+b^4\right) \ge 1$.

Mặt khác ta có : $a+b \ge 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \le \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{ab} \ge 4$

Từ hai đánh giá trên ta có : $8\left(a^4+b^4\right)+\dfrac{1}{ab} \ge 5$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ chỉ $\begin{cases} a+b=1 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=\dfrac{1}{2} \\ \sqrt{y}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{4} \\ y=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left\{\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right);\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{8};\dfrac{-1+\sqrt{17}}{8}\right)\right\}$.

Bình luận : Ở trường hợp 2, ta dễ nhận thấy hệ thu được với hai ẩn a,b là hệ đối xứng loại 1, ta vẫn có thể sử dụng phương pháp giải của loại hệ này để giải. Tuy nhiên, với phương pháp đó chúng ta sẽ dễ gặp khó khăn vì vướng phải phương trình bậc cao. Do đó dựa vào kết quả a,b dương ta có thể đánh giá qua bất đẳng thức AM-GM để làm gọn bài toán. Bài toán là sự phối hợp giữa kỷ thuật thế, ẩn phụ và đánh giá. Bài toán này do chúng tôi đề xuất.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt[3]{x^2-xy+1}+\sqrt[3]{y^2-xy+1}-2=2(x-y)^2 \\ (16xy-5)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)+4=0 \end{cases}$

(Thi thử Yên Phong Bắc Ninh 2015)

Phân tích: Với hệ này, chúng ta nhận định được rằng phương trình thứ hai là phương trình đối xứng hai biến nhưng ta lại không phân tích được thành nhân tử.

Ở phương trình thứ nhất ta để ý : $x^2-xy+1+y^2-xy+1=(x-y)^2+2$ nên ta đẩy ý tưởng đặt ẩn phụ hóa phương trình thứ nhất.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt[3]{x^2-xy+1} \\ b=\sqrt[3]{y^2-xy+1} \end{cases} \Rightarrow a^3+b^3=(x-y)^2+2$

$\Leftrightarrow 2(x-y)^2 = 2(a^3+b^3)-4 \ge 0 \Rightarrow a^3+b^3 \ge 2$.

Mặt khác từ phương trình thứ nhất ta có :

$a+b-2 = 2(x-y)^2 \Leftrightarrow a+b-2 \ge 0 \Leftrightarrow a+b \ge 2$

Khi đó phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi trở thành phương trình :

$a+b-2 = 2(a^3+b^3)-4 \Leftrightarrow a+b = 2(a^3+b^3)-2$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2} = 2(a^3+b^3)-2 \ (*)$

Mặt khác ta lại có : $a^2-ab+b^2 = \dfrac{1}{4}(a+b)^2 + \dfrac{3}{4}(a-b)^2 \ge \dfrac{1}{4}(a+b)^2 \ge 1$

Vậy ta sẽ có : $\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2} \le \dfrac{a^3+b^3}{1}$, do đó từ $(*)$ ta có :

$2(a^3+b^3)-2 \le a^3+b^3 \Leftrightarrow a^3+b^3 \le 2$

Vì $\begin{cases} a^3+b^3 \ge 2 \\ a^3+b^3 \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow a^3+b^3 = 2 \Leftrightarrow (x-y)^2+2 = 2 \Leftrightarrow (x-y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Và tới đây bài toán đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{x^2-xy+1} \\ b = \sqrt[3]{y^2-xy+1} \end{cases} \Rightarrow a^3+b^3 = (x-y)^2+2$

$\Leftrightarrow 2(x-y)^2 = 2(a^3+b^3)-4 \ge 0 \Rightarrow a^3+b^3 \ge 2$.

Mặt khác từ phương trình thứ nhất ta có :

$a+b-2 = 2(x-y)^2 \Leftrightarrow a+b-2 \ge 0 \Leftrightarrow a+b \ge 2$

Khi đó phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi trở thành phương trình :

$a+b-2 = 2(a^3+b^3)-4 \Leftrightarrow a+b = 2(a^3+b^3)-2$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2} = 2(a^3+b^3)-2 \ (*)$

Mặt khác ta lại có : $a^2-ab+b^2 = \dfrac{1}{4}(a+b)^2 + \dfrac{3}{4}(a-b)^2 \ge \dfrac{1}{4}(a+b)^2 \ge 1$

Vậy ta sẽ có : $\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2} \le \dfrac{a^3+b^3}{1}$, do đó từ $(*)$ ta có :

$2\left(a^3+b^3\right)-2\le a^3+b^3 \Leftrightarrow a^3+b^3\le 2$

Vì $\begin{cases}a^3+b^3\ge 2\\ a^3+b^3\le 2\end{cases} \Leftrightarrow a^3+b^3=2 \Leftrightarrow (x-y)^2+2=2 \Leftrightarrow (x-y)^2=0 \Leftrightarrow x=y$.

Thế vào phương trình thứ hai ta thu được phương trình: $\left(16x^2-5\right)\sqrt{x}+2=0\ (3)$.

Đặt $t=\sqrt{x}, t\ge 0$. Lúc đó phương trình (3) trở thành phương trình :

$\left(16t^4-5\right)t+2=0 \Leftrightarrow 16t^5-5t+2=0 \Leftrightarrow (2t-1)^2\left(4t^3+4t^2+3t+2\right)=0$

$\Leftrightarrow 2t-1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$ vì $4t^3+4t^2+3t+2>0, \forall t\ge 0$.

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4} \Rightarrow y=\frac{1}{4}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Bình luận : Đây là một bài toán khá hay, bài toán chắc chắn sẽ làm khó học sinh rất nhiều, bởi vì trong bài toán ta cần sử dụng các đánh giá khéo léo kết hợp với liên hiệp một cách tinh tế nếu không chúng ta sẽ khó tìm ra lời giải cho bài toán. Và nếu sử dụng đánh giá không khéo cũng sẽ dẫn đến những đánh giá rất khó chịu.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(x^2+2\right)\sqrt{x+7}-3\left(x^2-y^2-4y-3\right)=\left(y^2+4y+5\right)\sqrt{y+6}\\ 2x^5+3y+4\sqrt{x+7}+5\sqrt{y+6}=100\end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích : Quan sát hệ này, ta nhận thấy cả hai phương trình trong hệ đều chứa hai đại lượng chung đó là $\sqrt{x+7}, \sqrt{y+6}$ điều này dẫn đến cho suy nghĩ ẩn phụ hóa. Nhưng nếu ẩn phụ hóa thì ta lại thu được một hệ mới mà bậc của nó là khá cao nên phương án này xem như thất bại.

Với các kinh nghiệm đã có ta có thể nhận định được nếu cho hai căn thức bằng nhau và làm phép thử xem có được điều gì ?

Ta có : $\sqrt{x+7}=\sqrt{y+6} \Leftrightarrow x+7=y+6$. Thử ngay với $(x,y)=(2;3)$ ta thấy hệ hoàn toàn đúng. Vậy đây chính là mối quan hệ giữa x, y trong hệ này.

Với phương trình thứ nhất trong hệ ta nhận thấy các biến có thể cô lập với nhau nên khả năng xảy ra xét hàm số đại diện cũng khá cao nên ta sẽ tiến hành tách xem sao ?

Cụ thể ta có : $\left(x^2+2\right)\sqrt{x+7}-3x^2=\left(y^2+4y+5\right)\sqrt{y+6}-3y^2-12y-9$.

Với phương trình này ta nhận xét được là tuy các biến cô lập nhưng lại không xét được hàm đại diện, vậy ý tưởng hàm đại diện lại thất bại. Tuy nhiên quan sát phương trình mới, chỉ cần thêm bớt là tách được đại lượng x^2+2, y^2+4y+5 nên ta tiến hành tách như sau :

$$\left(x^2+2\right)\sqrt{x+7}-3x^2=\left(y^2+4y+5\right)\sqrt{y+6}-3y^2-12y-9$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+2\right)\sqrt{x+7}-3\left(x^2+2\right)=\left(y^2+4y+5\right)\sqrt{y+6}-3\left(y^2+4y+5\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+2\right)\left(\sqrt{x+7}-3\right)=\left(y^2+4y+5\right)\left(\sqrt{y+6}-3\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x^2+2\right)\left(x-2\right)}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{\left(y^2+4y+5\right)\left(y-3\right)}{\sqrt{y+6}+3}.$$

Từ phương trình cuối ta lại có được $\left(x-2\right)\left(y-3\right)\ge 0$. Vậy tới đây, ta sẽ đẩy ý tưởng đánh giá hệ qua miền giá trị của x, y. Điều này sẽ càng có niềm tin khi mà đối với phương trình thứ hai trong hệ ta có hai nhận xét :

⊕ Cố định y và xét hàm số $f\left(x\right)=2x^5+4\sqrt{x+7}+3y+5\sqrt{y+6}-100$, $\forall x\ge -7$.

Ta có : $f'\left(x\right)=10x^4+\dfrac{2}{\sqrt{x+7}}>0, \forall x>-7$. Vậy hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến.

⊕ Cố định x và xét hàm số $f\left(y\right)=3y+5\sqrt{y+6}+2x^5+4\sqrt{x+7}, \forall y\ge -6$.

Ta có : $f'\left(y\right)=3+\dfrac{5}{2\sqrt{y+6}}>0, \forall y>-6$. Vậy hàm số $f\left(y\right)$ đồng biến.

Với hai nhận xét này ta sẽ luôn có những đánh giá thuận chiều. Vậy xem như đường hướng giải quyết bài toán đã có.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}x\ge -7\\ y\ge -6\end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi lại thành phương trình :

$$\left(x^2+2\right)\sqrt{x+7}-3x^2=\left(y^2+4y+5\right)\sqrt{y+6}-3y^2-12y-9$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+2\right)\sqrt{x+7}-3\left(x^2+2\right)=\left(y^2+4y+5\right)\sqrt{y+6}-3\left(y^2+4y+5\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+2\right)\left(\sqrt{x+7}-3\right)=\left(y^2+4y+5\right)\left(\sqrt{y+6}-3\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x^2+2\right)\left(x-2\right)}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{\left(y^2+4y+5\right)\left(y-3\right)}{\sqrt{y+6}+3}\ (*)$$

Vì ta luôn có :

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x+7}+3}>0;\frac{y^2+4y+5}{\sqrt{y+6}+3}>0 \text{ nên từ } (*)\Rightarrow (x-2)(y-3)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2\\ y\ge 3\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 2\\ y\le 3\end{cases}\end{array}\right.$$

⊕ Trường hợp 1: Nếu $\begin{cases}x\ge 2\\ y\ge 3\end{cases}\Rightarrow 2x^5+3y+4\sqrt{x+7}+5\sqrt{y+6}\ge 100$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}$.

⊕ Trường hợp 2 ; Nếu $\begin{cases}x\le 2\\ y\le 3\end{cases}\Rightarrow 2x^5+3y+4\sqrt{x+7}+5\sqrt{y+6}\le 100$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}$.

Thử lại ta thấy $\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}$ ta thấy thỏa mãn hê.

Vậy hệ phương trình nghiệm $(x,y)=(2;3)$.

Bình luận : Bài toán sử dụng đánh giá trên miền giá trị của các biến x,y kết hợp với tính đơn điệu của hàm số và phép khử liên hiệp. Sự phát hiện ra tính chất hàm số đơn điệu tăng đã làm cho các đánh giá của bài toán trở nên đơn giản và gọn gàng.

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{4-\left(x^2y-1\right)^2}=y^4-x^2\left(1-2x^2\right)\\ 1+\sqrt{1+(x-y)^2}=-x^2\left(x^4+1-2x^2-2xy^2\right)\end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{R}).$$

(Thi thử math.vn 2010)

Phân tích : Với hệ này, cấu trúc hệ khá khó đoán. Tuy nhiên hãy để ý tới các đại lượng trong căn ở cả hai phương trình ta sẽ có những đánh gia quen thuộc.

Thật vậy, ta có :

$$\begin{cases}4-\left(x^2y-1\right)^2\le 4\\ 1+(x-y)^2\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{4-\left(x^2y-1\right)^2}\le 2\\ \sqrt{1+(x-y)^2}\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{4-\left(x^2y-1\right)^2}\le 2\\ 1+\sqrt{1+(x-y)^2}\ge 2\end{cases}.$$

Từ đây dẫn đến ta có các đánh giá sau : $\begin{cases}y^4-x^2\left(1-2x^2\right)\le 2\\ -x^2\left(x^4+1-2x^2-2xy^2\right)\ge 2\end{cases}$.

Suy ra : $\begin{cases} y^4 - x^2\left(1-2x^2\right) = -x^2\left(x^4+1-2x^2-2xy^2\right) \\ x^2y-1=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^3-y^2\right)^2 = 0 \\ x^2y=1 \\ x=y \end{cases}$

Và như thế hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $4-\left(x^2y-1\right)^2 \ge 0$.

Ta có : $\begin{cases} 4-\left(x^2y-1\right)^2 \le 4 \\ 1+\left(x-y\right)^2 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-\left(x^2y-1\right)^2} \le 2 \\ \sqrt{1+\left(x-y\right)^2} \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-\left(x^2y-1\right)^2} \le 2 \\ 1+\sqrt{1+\left(x-y\right)^2} \ge 2 \end{cases}$

Do đó từ hệ ta sẽ có : $\begin{cases} y^4 - x^2\left(1-2x^2\right) \le 2 \\ -x^2\left(x^4+1-2x^2-2xy^2\right) \ge 2 \end{cases}$.

Để hệ có nghiệm thì dấu đẳng thức ở các đánh giá xảy ra. Do đó ta có :

$$\begin{cases} y^4 - x^2\left(1-2x^2\right) = -x^2\left(x^4+1-2x^2-2xy^2\right) \\ x^2y-1=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^3-y^2\right)^2 = 0 \\ x^2y=1 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Thử lại và đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $\left(x,y\right)=\left(1;1\right)$.

Bình luận : Nhìn lời giải gọn gàng của hệ, ta tưởng chừng đó là hệ đơn giản. Nhưng trên thực tế với hệ này nếu không có đủ tinh tế nhìn nhận, chọn lựa đánh giá phù hợp thì bài toán này không hề dễ. Cái hay và thú vị của hệ này đó chính là chỉ cần xử lý các đánh giá quen thuộc là giải quyết được bài toán.

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{5x^2+2xy+2y^2} + \sqrt{2x^2+2xy+5y^2} = 3\left(x+y\right) \\ \sqrt{2x+y+1} + 2\sqrt[3]{7x+12y+8} = 2xy+y+5 \end{cases} \left(x,y \in \mathbb{R}\right)$$

Phân tích : Với hệ này, rõ ràng từ phương trình thứ hai ta không khai thác được gì vì chứa hai căn bậc lệch và các đại lượng trong căn lại chẳng tương đồng gì với nhau để có thể kết hợp lại. Trong khi đó phương trình thứ nhất rất 'gợi ý liên hiệp" nên tại sao ta không bắt đầu từ phương trình này để công phá.

Sử dụng kỷ thuật đoán nghiệm trong phương pháp liên hiệp. Ta có ngay nếu $x=y$ thì hai vế phương trình thứ nhất luôn đúng.

Khi đó ta sẽ tách liên hiệp dạng: $\begin{cases} \sqrt{5x^2+2xy+2y^2} - 3x \\ \sqrt{2x^2+2xy+5y^2} - 3y \end{cases}$ với dạng này trở ngại

của chúng ta chính là dấu của x, y từ điều kiện cho ta không rõ ràng nên cách này không triệt để được.

Còn nếu ta để ý : $5x^2 - 2xy + 2y^2 - \left(2x^2 - 2xy + 5y^2\right) = 3\left(x^2 - y^2\right)$ ta sẽ dẫn đến cách liên hiệp sau:

$$\sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + 2xy + 5y^2} = 3(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\left(x^2 - y^2\right)}{\sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2} - \sqrt{2y^2 + 2xy + 5y^2}} = 3(x+y).$$

Thì rõ ràng cũng không an toàn cho lắm vì sẽ bị vướng đánh giá phần sau, chưa kể ta phải kiểm tra nghiệm (x, y) = (0, 0) vì nghiệm này không khó để thấy thỏa hệ.

Vậy về phương diện trực tiếp liên hiệp có vẻ không khả thi lắm. Nhưng ta nhận thấy được qua phương trình thứ nhất hai đại lượng trong căn khá đặc biệt.

Thật vậy, ta có : $\begin{cases} 5x^2 + 2xy + 2y^2 = (2x+y)^2 + (x-y)^2 \\ 2x^2 + 2xy + 5y^2 = (x+2y)^2 + (x-y)^2 \end{cases}.$

Sự xuất hiện của đại lượng chung $(x-y)^2$ dẫn ta đến đánh giá :

$$\begin{cases} 5x^2 + 2xy + 2y^2 \ge (2x+y)^2 \\ 2x^2 + 2xy + 5y^2 \ge (x+2y)^2 \end{cases}.$$

Lại có : $x + 2y + 2x + y = 3(x+y)$ và các đại lượng đều nằm trong căn thức nên ta nghỉ đến đánh giá bằng bất đẳng thức có dấu trị tuyệt đối dạng $|A| + |B| \ge |A+B|$.

Áp dụng tư duy này ta biến đổi phương trình thứ nhất trong hệ thành :

$$\sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + 2xy + 5y^2}$$
$$= \sqrt{(2x+y)^2 + (x-y)^2} + \sqrt{(x+2y)^2 + (x-y)^2}$$
$$\ge |2x+y| + |x+2y| \ge 3|x+y| \ge 3(x+y).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $x = y \ge 0$.

Và tới đây mọi chuyện còn lại chỉ là thế vào phương trình thứ hai để giải và hệ được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải : Điều kiện : $2x + y + 1 \ge 0$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành hệ phương trình :

$$\sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + 2xy + 5y^2}$$
$$= \sqrt{(2x+y)^2 + (x-y)^2} + \sqrt{(x+2y)^2 + (x-y)^2}$$

$\geq |2x+y|+|x+2y| \geq 3|x+y| \geq 3(x+y)$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y\geq 0$.

Nhận xét $(x,y)=(0;0)$ thỏa hệ nên ta chỉ cần xét $x>0, y>0$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{19x+8}=2x^2+x+5$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-x\right)+\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)+2\left(x+2-\sqrt[3]{19x+8}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-x\right)+\frac{x^2-x}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{\left(x^2-x\right)(2x+14)}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+\sqrt[3]{(19x+8)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\underbrace{\left(2+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{2x+14}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+\sqrt[3]{(19x+8)^2}}\right)}_{P}=0$$

vì $x>0$

$\Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$ vì $x>0 \Rightarrow P>0$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\{(0;0);(1;1)\}$.

Bình luận : Bài toán nhìn có vẻ liên hiệp trực tiếp nhưng lại gây khó khăn lúc thực hành trực tiếp nhưng với sự tinh ý ta đã chuyển phương trình về đánh giá cơ bản thông qua bất đẳng thức dấu trị tuyệt đối khá đẹp mắt và gọn. Tuy nhiên, bài toán này vẫn có thể sử dụng phép liên hiệp 'giả định kéo theo" vẫn giải được phương trình thứ nhất như chúng tôi đã đề cập ở phần phương pháp liên hiệp.

Cụ thể ta sẽ có với $x>0, y>0$:

$$\begin{cases}\sqrt{5x^2+2xy+2y^2}+\sqrt{2x^2+2xy+5y^2}=3(x+y)\\ \sqrt{5x^2+2xy+2y^2}-\sqrt{2x^2+2xy+5y^2}=\dfrac{3\left(x^2-y^2\right)}{\sqrt{5x^2+2xy+2y^2}+\sqrt{2x^2+2xy+5y^2}}\\ \qquad =x-y\end{cases}.$$

Cộng theo vế hai phương trình cho nhau ta được phương trình

$$\sqrt{5x^2+2xy+2y^2}=2x+y$$

$$\Leftrightarrow 5x^2+2xy+2y^2=4x^2+4xy+y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Và tới đây ta giải quyết lại như trong lời giải.

Qua đây, sự chọn lựa con đường chúng ta đi vào lời giải có thể chưa phải là con đường duy nhất để thực hiện. Sự không dừng lại trước một lời giải đã tìm ra sẽ rèn luyện cho chúng ta thêm nhiều kỹ năng tốt hơn.

Ví dụ 8 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+4}\left(\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x+4}\right)=y\left(y-\sqrt{x+3}\right) \\ x^2\left(y^2-1\right)-2x+1=\sqrt[3]{x^2+6y^2-17} \end{cases} \quad (x,y \in \mathbb{R})$$

Phân tích: Với hệ này, một lần nữa ta phải thừa nhận để công phá hệ ta cần công phá phương trình thứ nhất trong hệ.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$\sqrt{(x+4)\left(y^2+1\right)}+y\sqrt{x+3}=y^2+x+4$$

Ta thấy vế trái phương trình này hai số hạng trong tổng đều có dạng ab nên ta thử liên tưởng đến phép đánh giá quen thuộc sau: $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}, \forall a,b \in \mathbb{R}$.

Khi đó ta có : $\sqrt{(x+4)\left(y^2+1\right)} \le \frac{x+4+y^2+1}{2}$; $y\sqrt{x+3} \le \frac{y^2+x+3}{2}$.

Cộng vế theo vế các đánh giá này ta thu được:

$$\sqrt{(x+4)\left(y^2+1\right)}+y\sqrt{x+3} \le y^2+x+4 .$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $\begin{cases} \sqrt{x+4}=\sqrt{y^2+1} \\ y=\sqrt{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ y=\sqrt{x+3} \end{cases}$.

Và tới đây ta chỉ cần thực hiện phép thế vào phương trình thứ hai là hệ đã được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải : Điều kiện : $x \ge -3$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành :

$$\sqrt{(x+4)\left(y^2+1\right)}+y\sqrt{x+3}=y^2+x+4 .$$

Sử dụng đánh giá : $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}, \forall a,b \in \mathbb{R}$, ta có :

$$\sqrt{(x+4)\left(y^2+1\right)} \le \frac{x+4+y^2+1}{2} \ ; \ y\sqrt{x+3} \le \frac{y^2+x+3}{2} .$$

Cộng vế theo vế các đánh giá này ta thu được :

$$\sqrt{(x+4)\left(y^2+1\right)}+y\sqrt{x+3} \le y^2+x+4 .$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $\begin{cases} \sqrt{x+4}=\sqrt{y^2+1} \\ y=\sqrt{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ y=\sqrt{x+3} \end{cases}$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$x^3+2x^2-2x+1=\sqrt[3]{x^2+6x+1}$

$\Leftrightarrow (x+1)^3+(x+1)=x^2+6x+1+\sqrt[3]{x^2+6x+1}\quad (1)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t, \forall t\in\mathbb{R}$. Ta có: $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó từ $(1)\Leftrightarrow f(x+1)=f\left(\sqrt[3]{x^2+6x+1}\right)$

$\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{x^2+6x+1}\Leftrightarrow (x+1)^3=x^2+6x+1\Leftrightarrow x\left(x^2+2x-3\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=\sqrt{3}\\ x=1\Rightarrow y=2\\ x=-3\Rightarrow y=0\end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left\{\left(0;\sqrt{3}\right);(1;2);(-3;0)\right\}$.

Bình luận : Bài toán này được tác giả ra chắc với hai chủ đích chính là đánh giá và sử dụng hàm số đại diện để giải hệ, sự kết hợp này làm cho bài toán có độ khó riêng của nó. Tuy nhiên, ngoài cách đánh giá trên thì phương trình thứ nhất trong hệ vẫn có tấn công nó bằng phương án liên hiệp "giả định kéo theo" để tấn công. Cụ thể ta có hệ giả định sau :

$$\begin{cases}\sqrt{(x+4)\left(y^2+1\right)}+y\sqrt{x+3}=y^2+x+4\\ \sqrt{(x+4)\left(y^2+1\right)}-y\sqrt{x+3}=\dfrac{y^2+x+4}{\sqrt{(x+4)\left(y^2+1\right)}+y\sqrt{x+3}}=1\end{cases}$$

Cộng vế theo vế ta có được : $2\sqrt{(x+4)\left(y^2+1\right)}=y^2+x+5$

$\Leftrightarrow 4xy^2+4x+16y^2+16=y^4+x^2+25+2xy^2+10y^2+10x$

$\Leftrightarrow \left(y^2-x-3\right)^2=0\Leftrightarrow y^2=x+3$.

Và rõ ràng có lẻ tác giả sẽ bất ngờ với phương án này, và nếu xét trên bình diện chung thì phương pháp liên hiệp 'giả định kéo theo" cho lời giải cũng đẹp mắt không kém và có lẻ tự nhiên hơn phương án đánh giá. Đó chính là cái thú vị của toán, đôi lúc ta nghỉ phương pháp này mạnh nhưng ý nghĩa đó chỉ dừng lại ở mức tương đối.

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}}=x+y\\ \sqrt[3]{4x-3y+5}+6=7\sqrt[3]{11-9x+8y}+10x-12y\end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích : Với bài hệ này, chúng ta cũng chỉ công phá phương trình thứ nhất thôi. Ở phương trình thứ nhất ta có ba cách để đánh giá với sự trợ giúp của điều kiện $x+y\ge 0$

⊕ Cách 1 : Sử dụng hằng đẳng thức theo kiểu tổng hiệu.

Ta có : $\dfrac{x^2+y^2}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(x-y)^2}{2}=\dfrac{1}{4}(x+y)^2+\dfrac{1}{4}(x-y)^2\ge\dfrac{1}{4}(x+y)^2$

$$\frac{x^2+xy+y^2}{3}=\frac{\frac{3}{4}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x-y)^2}{3}=\frac{1}{4}(x+y)^2+\frac{1}{12}(x-y)^2\ge\frac{1}{4}(x+y)^2$$

Từ đó ta có : $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{2}}\ge x+y$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

⊕ Cách 2: Sử dụng đánh giá quen thuộc $a^2+b^2\ge\dfrac{(a+b)^2}{2}$.

Ta có :

$$x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\ge\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x+y)^2=\frac{3}{4}(x+y)^2$$

Do đó ta có : $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{2}}\ge\sqrt{\dfrac{(x+y)^2}{4}}+\sqrt{\dfrac{(x+y)^2}{4}}\ge x+y$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

⊕ Cách 3 : Sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức B.C.S và $ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ ta có :

Ta có : $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}=\sqrt{\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{4}}=\sqrt{\dfrac{(1+1)\left(x^2+y^2\right)}{4}}\ge\dfrac{1}{2}(x+y)$

$$\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}}=\sqrt{\frac{(x+y)^2-2xy}{3}}\ge\sqrt{\frac{(x+y)^2-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}{3}}=\frac{1}{2}(x+y)$$

Do đó ta có : $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}}\ge x+y$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $x=y$.

Qua các đánh giá trên việc còn lại của chúng ta là thế vào phương trình thứ hai và giải tìm nghiệm.

Lời giải. Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta suy ra để hệ có nghiệm thì $x+y\ge 0$.

Ta có : $\dfrac{x^2+y^2}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(x-y)^2}{2}=\dfrac{1}{4}(x+y)^2+\dfrac{1}{4}(x-y)^2\ge\dfrac{1}{4}(x+y)^2$

$$\frac{x^2+xy+y^2}{3}=\frac{\frac{3}{4}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x-y)^2}{3}=\frac{1}{4}(x+y)^2+\frac{1}{12}(x-y)^2\ge\frac{1}{4}(x+y)^2$$

Từ đó : $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{2}}\ge x+y$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Thay $x=y$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình:

$$\sqrt[3]{x+5}+6=7\sqrt[3]{11-x}-2x\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x+5}-2\right)+7\left(2-\sqrt[3]{11-x}\right)+2(x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-3}{\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4}+\frac{7(x-3)}{2+2\sqrt[3]{11-x}+\sqrt[3]{(11-x)^2}}+2(x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-3)\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4}+\frac{7}{2+2\sqrt[3]{11-x}+\sqrt[3]{(11-x)^2}}+2\right)}_{P}=0$$

$\Leftrightarrow x-3=0\Leftrightarrow x=3\Rightarrow y=3$ vì $P>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(3;3)$

Bình luận : Đây là một bài toán khá quen thuộc, trên đây chúng tôi mở rộng thêm các đường hướng đánh giá để các bạn tiện theo dõi và qua từng đánh giá rút được cho mình thêm kinh nghiệm. Các bạn hãy thử sức mình với phương pháp liên hiệp "giả định kéo theo" với phương trình thứ nhất xem. Sẽ rất có ích cho các bạn về đường lối sau này nếu ta gặp phải lớp toán như vậy. Ngoài ra bài toán này vẫn giải quyết được bằng phương pháp ẩn phụ hóa trên phương trình thứ nhất khi chia hai vế cho $x+y$

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3(1-x)+y^3(1-y)=12xy+8\\|3x-2y+10|+|2x-3y|=10\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

(Toán học Tuổi Trẻ số 431)

Phân tích : Với hệ này, phương trình thứ hai báo trước hệ sẽ được đánh giá thông qua bất đẳng thức dấu trị tuyệt đối.

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có phép biến đổi sau :

$$x^3+y^3=\left(x^2-y^2\right)^2+2(xy+3)^3\ge0\Rightarrow(x-y)\left(x^2-xy+y^2\right)\ge0\Rightarrow x+y\ge0.$$

Với điều kiện này áp dụng bất đẳng thức dấu giá trị tuyệt đối ta sẽ giải quyết được bài toán vì ta nhận thấy $3x-2y+10-2x+3y=x+y+10$

Lời giải: Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có phép biến đổi sau :

$$x^3+y^3=\left(x^2-y^2\right)^2+2\left(xy+3\right)^3\ge 0\Rightarrow\left(x-y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)\ge 0\Rightarrow x+y\ge 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức : $|A|+|B|\ge|A-B|$. Ta có :

$$|3x-2y+10|+|2x-3y|\ge|3x-2y+10-2x+3y|=|x+y+10|\ge 10.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}(3x-2y+10)(2x-3y)\le 0\\ x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le x\le 0\\ y=-x\end{cases}.$$

Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta được phương trình:

$$\left(x^2-3\right)^2=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{3}\text{ vì }-2\le x\le 0.$$

Suy ra $y=\sqrt{3}$. Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $\left(x,y\right)=\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

Bình luận : Đây là một bài hệ nhìn lời giải có vẻ đơn giản nhưng thật chất nó là một bài hệ không dễ chút nào. Việc tách phương trình thứ nhất để có được đánh giá quan trọng đó thì không phải là chuyện đơn giản mà đòi hỏi một kỷ năng rất tốt. Đôi lúc một bài hệ nhìn qua không có gì cả nhưng ẩn chứa trong nó là một điều hết sức "lớn lao".

Ví dụ 11: Giải hệ phương trình $\begin{cases}xy+6y\sqrt{x-1}+12y=4\\ \dfrac{xy}{1+y}+\dfrac{1}{xy+y}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\end{cases}$ $\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

(Chọn đội tuyển học sinh giỏi TPHCM 2015)

Phân tích : Với hệ này, ta nhận thấy phương trình thứ hai có chứa nhiều đại lượng chung nên ta sẽ đi khai thác phương trình thứ hai trước. Vì với phương trình thứ nhất ta có thể ẩn phụ $t=\sqrt{x-1}$ để đưa về phương trình bậc hai ẩn t nhưng ta cũng chẳng đưa đến đâu. Chú ý với điều kiện của bài toán là $x\ge 1, y>0$ nên đối với phương trình thứ hai ta sẽ chia vế trái cho x, vế phải cho $\sqrt{x}$ ta được phương trình : $\dfrac{y}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{y}{x}}+\dfrac{\dfrac{1}{x}}{y+\dfrac{y}{x}}=\dfrac{2}{1+\sqrt{\dfrac{y}{x}}}$,

Để gọn ta ẩn phụ hóa $\begin{cases}a=\dfrac{1}{x}\\ b=y\end{cases}$, ta đưa về phương trình: $\dfrac{a}{b+ab}+\dfrac{b}{a+ab}=\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchuy-Schwaz ta có :

$$\frac{a}{b+ab}+\frac{b}{a+ab}\ge\frac{(a+b)^2}{(b+ab)(a+ab)}=\frac{(a+b)^2}{ab(a+b)+2ab}=\frac{1}{\frac{ab}{a+b}+\frac{2ab}{(a+b)^2}}.$$

Tới đây ta sử dụng thêm hai đánh giá quen thuộc sau :

$$\begin{cases}4ab\le(a+b)^2\\ a+b\ge2\sqrt{ab}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2ab}{(a+b)^2}\le\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{a+b}\le\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}\end{cases}$$

Ta có : $\frac{a}{b+ab}+\frac{b}{a+ab}\ge\frac{1}{\frac{ab}{2\sqrt{ab}}+\frac{1}{2}}=\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b\Leftrightarrow y=\frac{1}{x}$. Và tới đây ta chỉ cần thế vào phương trình thứ hai nữa là hệ được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}x\ge1\\ y>0\end{cases}$.

Phương trình thứ hai trong hệ được biến đổi thành : $\frac{y}{\frac{1}{x}+\frac{y}{x}}+\frac{\frac{1}{x}}{y+\frac{y}{x}}=\frac{2}{1+\sqrt{\frac{y}{x}}}\ (1)$.

Đặt $\begin{cases}a=\frac{1}{x}\\ b=y\end{cases},(0<a\le1,b>0)$. Khi đó ta có : $(1)\Leftrightarrow\frac{b}{a+ab}+\frac{a}{b+ab}=\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchuy - Schwaz ta có :

$$\frac{a}{b+ab}+\frac{b}{a+ab}\ge\frac{(a+b)^2}{(b+ab)(a+ab)}=\frac{(a+b)^2}{ab(a+b)+2ab}=\frac{1}{\frac{ab}{a+b}+\frac{2ab}{(a+b)^2}}.$$

Tới đây ta sử dụng thêm hai đánh giá quen thuộc sau :

$$\begin{cases}4ab\le(a+b)^2\\ a+b\ge2\sqrt{ab}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2ab}{(a+b)^2}\le\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{a+b}\le\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}\end{cases}$$

Ta có : $\frac{a}{b+ab}+\frac{b}{a+ab}\ge\frac{1}{\frac{ab}{2\sqrt{ab}}+\frac{1}{2}}=\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x}$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$2\sqrt{x-1} = x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ 4(x-1) = (x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 10 \Rightarrow y = \frac{1}{10}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \left(10; \dfrac{1}{10}\right)$.

Bình luận : Đây là một bài toán khá khó, khi đổi biến ta được một phương trình nhưng thật chất đó là một bất đẳng thức. Dựa vào tính đối xứng nên ta dự đoán $a = b$, cộng với dạng phân số nên ta nghỉ đến bất đẳng thức Cauchuy Schwaz để đánh giá và dùng bất đẳng thức AM- GM để đánh giá tiếp theo. Nhận định chung, đây là bài toán khá hay.

Ví dụ 12: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x - y + \dfrac{1}{2}\right)^2 + (xy-3)^2 = \dfrac{5}{4} \\ (x+1)\sqrt{y^2+5} + (y-1)\sqrt{x^2-3} = 10 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Ta nhận thấy phương trình thứ nhất có dạng $a^{2n} + b^{2n} = k$ nên có thể từ phương trình cho ta được đánh giá gì đó ? Tại sao ta không thử về điều đó.

Ta có:

$$\left(x - y + \frac{1}{2}\right)^2 + (xy-3)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy + x - y + x^2y^2 - 6xy + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - y = 8 - \left(x^2y^2 - 8xy + 16\right) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - y = 8 - (xy-4)^2$$

Từ đây ta suy ra được $x^2 + y^2 + x - y \le 8$.

Mặt khác phương trình thứ hai trong hệ vế phải là tổng hai thừa số có dạng ab, vậy ta đẩy ý tưởng đánh giá theo một đánh giá quen thuộc $ab \le \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

Ta có : $\begin{cases} (x+1)\sqrt{y^2+5} \le \dfrac{x^2+2x+1+y^2+5}{2} \\ (y-1)\sqrt{x^2-3} \le \dfrac{y^2-2y+1+x^2-3}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow (x+1)\sqrt{y^2+5} + (y-1)\sqrt{x^2-3} \le x^2 + y^2 + x - y + 2$$

Từ đó ta có : $10 \le x^2 + y^2 + x - y + 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - y \ge 8$.

Vậy qua hai bước đánh giá ta đã có được hệ sau: $\begin{cases} x^2+y^2+x-y=8 \\ xy-4=0 \\ x+1=\sqrt{y^2+5} \\ y-1=\sqrt{x^2+3} \end{cases}$.

Do đó hệ đã được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải : Điều kiện : $x \le -\sqrt{3} \vee x \ge \sqrt{3}$.

Phương trình thứ hai trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$\left(x-y+\frac{1}{2}\right)^2+(xy-3)^2=\frac{5}{4} \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy+x-y+x^2y^2-6xy+8=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+x-y=8-\left(x^2y^2-8xy+16\right) \Leftrightarrow x^2+y^2+x-y=8-(xy-4)^2.$$

Vì $8-(xy-4)^2 \le 8 \Rightarrow x^2+y^2+x-y \le 8 \ (a)$.

Mặt khac ta có: $\begin{cases} (x+1)\sqrt{y^2+5} \le \dfrac{x^2+2x+1+y^2+5}{2} \\ (y-1)\sqrt{x^2-3} \le \dfrac{y^2-2y+1+x^2-3}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow (x+1)\sqrt{y^2+5}+(y-1)\sqrt{x^2-3} \le x^2+y^2+x-y+2$$

Từ đó ta có : $10 \le x^2+y^2+x-y+2 \Leftrightarrow x^2+y^2+x-y \ge 8 \ (b)$.

Từ $(a),(b)$ ta có hệ có nghiệm khi và chỉ khi : $\begin{cases} x^2+y^2+x-y=8 \\ xy-4=0 \\ x+1=\sqrt{y^2+5} \\ y-1=\sqrt{x^2+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(2;2)$.

Bình luận : Đây là một bài toán hay, sử dụng các đánh giá không quá mạnh nhưng lại khá chặt. Việc biến đổi phương trình thứ nhất để có bước đánh giá đầu tiên là một tư duy tự nhiên dựa trên cấu trúc của phương trình này. Các đánh giá tiếp theo là quen thuộc.

Ví dụ 13 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}=\dfrac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1} \\ \dfrac{5}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{3}{\sqrt{y-1}}=4 \end{cases} \ (x,y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, ta nhận định tuy phương trình thứ hai đơn giản nhưng rõ ràng không giúp chúng ta được gì cả. Do đó chúng ta sẽ quan tâm đến phương trình thứ nhất trong hệ.

Ở vế trái phương trình thứ nhất ta cần chú ý tới rằng nếu ta cộng 1 vào mỗi số hạng trong tổng ta sẽ có được nhân tử chung.

Do đó ta tiến hành biến đổi phương trình thứ nhất thành :

$$\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}=\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1}\Leftrightarrow\frac{x}{y+1}+1+\frac{y}{x+1}=1=\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1}+2$$

$$\Leftrightarrow(x+y+1)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\right)=2\left(\frac{2\sqrt{xy}+1}{\sqrt{xy}+1}\right)\ (*)$$

Ở $(*)$ sự xuất hiện của $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}$ và $\frac{2}{\sqrt{xy}+1}$ cùng với điều kiện $x>1,y>1$ làm ta liên tưởng đến bổ đề sau :

Với $a,b>0,ab\geq1$ ta có : $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\geq\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$. (Việc chứng minh bổ đề khá đơn giản).

Khi đó sử dụng bổ đề này và áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta sẽ có :

$$\begin{cases}x+y+1\geq1+2\sqrt{xy}\\ \frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\geq\frac{2}{1+\sqrt{xy}}\end{cases}\Rightarrow(x+y+1)\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\right)\geq2\left(\frac{1+2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1}\right).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$. Và như thế hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}x>1\\y>1\end{cases}$.

Ta chứng minh bổ đề sau : $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\geq\frac{2}{1+\sqrt{ab}}(*),(\forall a,b>0,ab\geq1)$.

Thật vậy, ta có $(*)$ $\Leftrightarrow(1+a)(1+\sqrt{ab})+(1+b)(1+\sqrt{ab})\geq2(1+a)(1+b)$

$$\Leftrightarrow(a+b+2)(1+\sqrt{ab})\geq2(1+a)(1+b)$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{ab}-1)(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq0\ \text{(luôn đúng)}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b\vee ab=1$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}=\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1}\Leftrightarrow\frac{x}{y+1}+1+\frac{y}{x+1}=1=\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1}+2$$

$$\Leftrightarrow (x+y+1)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\right)=2\left(\frac{2\sqrt{xy}+1}{\sqrt{xy}+1}\right).$$

Áp dụng bổ đề vừa chứng minh và bất đẳng thức $AM-GM$ ta có :

$$\begin{cases} x+y+1\ge 1+2\sqrt{xy} \\ \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}\ge \dfrac{2}{1+\sqrt{xy}} \end{cases} \Rightarrow (x+y+1)\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\right)\ge 2\left(\frac{1+2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1}\right)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$ .Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được :

$$\frac{5}{\sqrt{x-1}}+\frac{3}{\sqrt{x-1}}=4\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow x=5\Rightarrow y=5.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(5;5)$.

Bình luận : Bài toán này giải khá mất tự nhiên vì bài toán giải phải sử dụng đến bổ đề. Tuy nhiên cách đánh giá này cũng khá quan trọng.

Ví dụ 14 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{y(1-2y)}=\dfrac{2}{9} \end{cases}$ $(x,y\in \mathbb{R})$

Phân tích : Nhìn vào hệ dễ dàng nghỉ đến ẩn phụ hóa phương trình thứ nhất trong hệ dễ nhìn hơn và thấy được ngay điều cần đánh giá sẽ liên quan đến một bổ đề quen thuộc .

Với $\begin{cases} a^2=2x^2 \\ b^2=2y^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a}{\sqrt{2}} \\ y=\dfrac{b}{\sqrt{2}} \end{cases}$.

Khi đó ta đưa phương trình thứ nhất về phương trình :

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+ab}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức $B.C.S$ ta có :

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\le \sqrt{(1+1)\left(\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\right)}.$$

Sử dụng bổ đề $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\le \dfrac{2}{1+ab},\forall a,b>0,ab\le 1$.

Ta có ngay được $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}\le \sqrt{2\cdot \dfrac{2}{1+ab}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+ab}}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. Và lúc này ta sẽ có mối quan hệ giữa x, y và thế vào phương trình thứ hai thì hệ sẽ được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x(1-2x) \geq 0 \\ y(1-2y) \geq 0 \\ 1+2xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ 0 \leq y \leq \dfrac{1}{2} \\ xy > -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} a^2 = 2x^2 \\ b^2 = 2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{b}{\sqrt{2}} \end{cases}$, $a, b \in \left[0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Lúc đó phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành :

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$$

Sử dụng bất đẳng thức B.C.S ta có :

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \sqrt{(1+1)\left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}\right)}.$$

Mặt khác ta lại có : $\dfrac{1}{1+a^2} + \dfrac{1}{1+b^2} \leq \dfrac{2}{1+ab}, \forall a, b > 0, ab \leq 1$.

Thật vậy, ta có :

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab} \Leftrightarrow (1+ab)(1+b^2) + (1+ab)(1+a^2) \leq 2(1+a^2)(1+b^2)$$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(ab-1) \leq 0$ (luôn đúng $a, b \in \left[0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Áp dụng bổ đề này ta có được : $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \sqrt{2 \cdot \dfrac{2}{1+ab}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+ab}}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}} \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow x = y$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$\sqrt{x(1-2x)} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow x(1-2x) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow (4x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Bình luận : Bài toán này và bài toán trên đều sử dụng bất đẳng thức và bổ đề để chỉ ra được dấu bằng, những bài toán thuộc thể loại là loại toán rất khó. Nếu chúng ta không nắm vững các bổ đề thì khả năng giải bài toán hầu như là số 0. Nhưng nếu biết như không thông hiểu cách vận dụng nào cho hợp lý thì khả năng thành công thật là may rủi.

Ví dụ 15: Giải hệ phương trình $\begin{cases}4x^3+y^3+y\sqrt{2x-y}=3y^2x\\ \left(x+\sqrt{4x^2+1}\right)\left(y+2\sqrt{y^2+1}\right)=3xy\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

(Nguyễn Duy Hồng)

Phân tích : Với bài toán này, nhận xét đầu tiên là ta thấy vế trái của phương trình thứ hai trong luôn dương. Từ đây ta suy ra $xy>0$.

Mặt khác từ phương trình ta có những đánh giá rất quen thuộc.

⊕ Nếu $x>0,y>0$ thì ta có các đánh giá sau :

$$\begin{cases}x+\sqrt{4x^2+1}>3x\\ y+2\sqrt{y^2+1}>3y\end{cases}\Rightarrow\left(x+\sqrt{4x^2+1}\right)\left(y+2\sqrt{y^2+1}\right)>9xy$$

Do đó phương trình hai vô nghiệm.

⊕ Nếu $x<0,y<0$ thì từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có biến đổi sau :

$$(x+y)(2x-y)^2+y\sqrt{2x-y}=0\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=0\\ \sqrt{2x-y}=0\end{cases}\Leftrightarrow y=2x<0$$

Và như thế hệ đã được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải :

Điều kiện : $y-2x\geq 0$. Nhận xét $\left(x+\sqrt{4x^2+1}\right)\left(y+2\sqrt{y^2+1}\right)>0$.

Do đó từ phương trình thứ 2 trong hệ ta có $3xy>0$ nên ta có hai trường hợp .

- Trường hợp 1 : $x>0,y>0$.

Ta có:

$$3xy=\left(x+\sqrt{4x^2+1}\right)\left(y+2\sqrt{y^2+1}\right)>(x+2x)(y+2y)=9xy\Leftrightarrow 3>9 \text{ (vô lí).}$$

- Trường hợp 2 : $x<0,y<0$.

<u>Cách 1 :</u> Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$$0=-3xy+\frac{4x^3}{y}+\frac{y^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\sqrt{2x-y}\geq-3xy+3xy+\sqrt{2x-y}=\sqrt{2x-y}\geq 0$$

$\Rightarrow y=2x$

Cách 2 : Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có:

$$(x+y)(2x-y)^2+y\sqrt{2x-y}=0\Rightarrow\begin{cases}2x-y=0\\\sqrt{2x-y}=0\end{cases}\Leftrightarrow y=2x$$

Thay $y=2x$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta có :

$$\left(x+\sqrt{4x^2+1}\right)\left(2x+2\sqrt{4x^2+1}\right)=6x^2\Leftrightarrow\left(x+\sqrt{4x^2+1}\right)^2=3x^2$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{4x^2+1}=-\sqrt{3}x\Leftrightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}}}\Rightarrow y=-\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{3}}}$$

Đối chiếu điều kiện hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}}};-\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{3}}}\right)$.

Bình luận: Bài toán này có đẹp từ cấu trúc tới lời giải. Một bài toán mà chúng tôi đánh giá là khá hay.

Ví dụ 16: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{2x+y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5x+3y+1}}+\frac{1}{\sqrt{3-x+y}}\right)=2\\xy+2\sqrt{2x^4-x^3+7x^2+y+2}=4\end{cases}\quad(x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích: Với hệ này, ta nhận thấy phương trình thứ hai tuy đơn giản nhưng chúng ta sẽ khó khai thác được gì từ đây, với phương trình thứ nhất tuy cồng kềnh và phức tạp nhưng chúng ta lại có mối liên hệ giữa các đại lượng trong bốn căn thức với nhau.

Cụ thể ta có: $\begin{cases}5x+3y+1=1-x+3(2x+y)\\3-x+y=2x+y+3(1-x)\end{cases}$.

Từ nhận xét này ta đề xuất đặt ẩn phụ cho phương trình thứ nhất để làm giảm đi độ cồng kềnh ở phương trình này.

Đặt : $\begin{cases}a=1-x\\b=2x+y\end{cases},a,b>0$.

Khi đó phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình sau:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt{b+3a}}\right)=2\Leftrightarrow\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}}=2$$

Tới đây để làm gọn hơn ta tiếp tục đặt $t=\frac{a}{b},t>0$.

Khi đó ta có : $\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t+3}}+\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{3t+1}}=2\ (*)$.

Ở (*) ta nhận thấy $t=1$ luôn thỏa.

Do đó ta sẽ sử dụng các đánh giá sau để hoàn tất.

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có :

- $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+3}} = \sqrt{\dfrac{t}{t+1}\cdot\dfrac{t+1}{t+3}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t}{t+1}+\dfrac{t+1}{t+3}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{t+3}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{t+3}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{t+3}\right) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t+3}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t}{t+1}+\dfrac{3}{2}\right)$

- $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{3t+1}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2t}{3t+1}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2t}{3t+1}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{3t+1}} = \sqrt{\dfrac{1}{t+1}\cdot\dfrac{t+1}{3t+1}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t+1}+\dfrac{t+1}{3t+1}\right) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{3t+1}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t+1}+\dfrac{3}{2}\right).$

Do đó ta có: $\dfrac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t+3}}+\dfrac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{3t+1}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t+1}{t+1}+3\right)=2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $\begin{cases} t>0 \\ \dfrac{t}{t+1}=\dfrac{t+1}{t+3} \\ \dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{t+3} \\ \dfrac{1}{2}=\dfrac{2t}{3t+1} \\ \dfrac{1}{t+1}=\dfrac{t+1}{3t+1} \end{cases} \Leftrightarrow t=1$

Lúc này ta sẽ có $a=b \Leftrightarrow 1-x=2x+y \Leftrightarrow y=1-3x$. Và như thế hệ về cơ bản đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} 1-x\ge 0 \\ 2x+y\ge 0 \\ 5x+3y+1>0 \\ 3-x+y>0 \\ 2x^4-x^3+7x^2+y+2\ge 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a=1-x \\ b=2x+y \end{cases}$, $a,b\ge 0$. Ta có : $\begin{cases} 5x+3y+1=a+3b \\ 3-x+y=b+3a \end{cases}$.

Khi đó phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi trở thành :

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt{b+3a}}\right)=2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}}=2\ (1)$$

Rõ ràng với $(a,b)=(0;0)$ là không thỏa (1). Do đó với $a,b>0$ ta đặt

$t=\frac{a}{b},t>0$ ta đưa $(1)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t+3}}+\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{3t+1}}=2$.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có :

- $\begin{cases}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+3}}=\sqrt{\frac{t}{t+1}\cdot\frac{t+1}{t+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{t}{t+1}+\frac{t+1}{t+3}\right)\\ \frac{1}{\sqrt{t+3}}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{t+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{t+3}\right)\end{cases}\Rightarrow\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{t}{t+1}+\frac{3}{2}\right)$

- $\begin{cases}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{3t+1}}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{3t+1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2t}{3t+1}\right)\\ \frac{1}{\sqrt{3t+1}}=\sqrt{\frac{1}{t+1}\cdot\frac{t+1}{3t+1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1}+\frac{t+1}{3t+1}\right)\end{cases}\Rightarrow\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{3t+1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1}+\frac{3}{2}\right)$.

Do đó ta có: $\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t+3}}+\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{3t+1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{t+1}{t+1}+3\right)=2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $\begin{cases}t>0\\ \frac{t}{t+1}=\frac{t+1}{t+3}\\ \frac{1}{2}=\frac{2}{t+3}\\ \frac{1}{2}=\frac{2t}{3t+1}\\ \frac{1}{t+1}=\frac{t+1}{3t+1}\end{cases}\Leftrightarrow t=1$

Lúc này ta sẽ có $a=b\Leftrightarrow 1-x=2x+y\Leftrightarrow y=1-3x$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$x(1-3x)+2\sqrt{2x^4-x^3+7x^2-3x+3}=4$$

$$\Leftrightarrow x-3x^2+2\sqrt{2x^2(x^2+3)-x(x^2+3)+x^2+3}=4$$

$$\Leftrightarrow x-3x^2+2\sqrt{(x^2+3)(2x^2-x+1)}=4$$

Lại theo bất đẳng thức AM – GM ta có :

$2\sqrt{(x^2+3)(2x^2-x+1)}\le 3x^2-x+4$.

Từ đó ta có : $x-3x^2+2\sqrt{(x^2+3)(2x^2-x+1)}\le x-3x^2+3x^2-x+4=4$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$2x^2 - x + 1 = x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 4 \\ x = 2 \Rightarrow y = -5 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện và thử lại ta có nghiệm của hệ là $(x,y) = (1;4)$.

Bình luận : Đây là một bài hệ khá hay, việc nhận xét được $t = 1$ là mấu chốt của bài toán. Với nhận xét này ta sẽ chọn tách biểu thức để sử dụng bất đẳng thức AM-GM sao cho đánh giá được tốt nhất.

Ví dụ 17 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-1} + 2\sqrt{y+1} = y + \dfrac{9}{4} \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{y+1}+1} + \dfrac{y+1}{\sqrt{x-1}+1} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này cấu trúc của hệ cho ta ngay được ý tưởng ẩn phụ hóa để làm gọn hệ.

Cụ thể ta đặt : $\begin{cases} a = \sqrt{x-1} \\ b = \sqrt{y+1} \end{cases}$, $a, b \ge 0$. Khi đó hệ phương trình đã cho trở thành hệ phương trình : $\begin{cases} a + 2b = b^2 + \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{a^2}{b+1} + \dfrac{b^2}{a+1} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Với hệ mới này, gợi ý đầu tiên dễ nhận thấy đó là sử dụng phép thế để giải. Tuy nhiên rõ ràng cấu trúc hệ này nếu sử dụng phép thế như vậy rất khó để đến được thành công bởi sẽ có những phép biến đổi đại số khó khăn và bậc cao. Mặt khác cấu trúc phương trình thứ hai trong hệ cho ta liên tưởng đến hình dáng của một đánh giá quen thuộc là $\dfrac{A^2}{X} + \dfrac{B^2}{Y} \ge \dfrac{(A+B)^2}{X+Y}, \forall A, B \in \mathbb{R}, X, Y > 0$.

Do đó ta tiến tới sử dụng bổ đề này để đánh giá cho phương trình thứ hai trong hệ như sau :

$$\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1} \ge \frac{(a+b)^2}{a+b+2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \ge \frac{(a+b)^2}{a+b+2}$$

$$\Leftrightarrow 3(a+b)^2 - (a+b) - 2 \le 0 \Leftrightarrow a + b \le 1 \Leftrightarrow a \le 1 - b.$$

Với đánh giá này, kết hợp với phương trình thứ nhất ta có :

$$a = b^2 - 2b + \frac{5}{4} \Rightarrow b^2 - 2b + \frac{5}{4} \le 1 - b \Leftrightarrow (2b-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow 2b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}.$$

Và tới đây bài toán đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -1 \end{cases}$

Nhận thấy hệ không có nghiệm $(x,y)=(1;-1)$.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x-1} \\ b = \sqrt{y+1} \end{cases}$, $a,b > 0$.

Lúc đó hệ phương trình đã cho trở thành hệ: $\begin{cases} a + 2b = b^2 + \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{a^2}{b+1} + \dfrac{b^2}{a+1} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Ta có : $\dfrac{A^2}{X} + \dfrac{B^2}{Y} \geq \dfrac{(A+B)^2}{X+Y} (*), \forall A,B \in \mathbb{R}, X,Y > 0$.

Thật vậy : $(*) \Leftrightarrow \left(A^2Y + B^2X\right)(X+Y) \geq (A+B)^2 XY$

$$\Leftrightarrow A^2Y - 2ABXY + B^2X \geq 0 \Leftrightarrow (AY - BX)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{A}{X} = \dfrac{B}{Y}$.

Áp dụng bổ đề này ta có : $\dfrac{a^2}{b+1} + \dfrac{b^2}{a+1} \geq \dfrac{(a+b)^2}{a+b+2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \geq \dfrac{(a+b)^2}{a+b+2}$

$$\Leftrightarrow 3(a+b)^2 - (a+b) - 2 \leq 0 \Leftrightarrow a + b \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 1 - b.$$

Với đánh giá này, kết hợp với phương trình thứ nhất ta có :

$a = b^2 - 2b + \dfrac{5}{4} \Rightarrow b^2 - 2b + \dfrac{5}{4} \leq 1 - b \Leftrightarrow (2b-1)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow 2b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

Với $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{y+1} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{4} \\ y = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$.

Đối chiếu và thử lại ta có nghiệm của hệ là $(x,y) = \left(\dfrac{5}{4}; -\dfrac{3}{4}\right)$

Bình luận : Bài toán là một bài toán hay, hình thức đơn giản nhưng để giải được nó ta cần kết hợp cả hai yếu tố là ẩn phụ hóa và đánh giá. Một bài toán nếu không có sự tỉnh táo nhất định thì sẽ rất khó để giải quyết. Bài toán này, do chúng tôi đề xuất.

Ví dụ 18 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4+4y^2+6y+2=4x^2y+x^2+2x\sqrt{2y+1}\,(1) \\ 2\sqrt{x^2-5}+3\sqrt[3]{2y-7}=4y-3x\,(2) \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích : Với hệ này, từ phương trình thứ nhất ta nhận thấy có chứa biểu thức dạng ab nên ta sẽ nghỉ đến đánh giá quen thuộc mà ta đã dùng nhiều lần trong loại hệ này là $ab\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$.

Ta có : $(x^2-2y)^2-x^2+6+2=2x\sqrt{2y+1}\le x^2+2y+1(3)$

$\Leftrightarrow(x^2-2y)^2-2(x^2-2y)+1\le0\Leftrightarrow(x^2-2y-1)^2\le0\Leftrightarrow x^2=2y+1$.

Và tới đây chỉ còn lại phương án thế và giải phương trình còn lại.

Lời giải : Điều kiện: $\begin{cases}2y+1\ge0\\x^2-5\ge0\end{cases}$

Phương trình (1) được viết lại :

$$(x^2-2y)^2-x^2+6+2=2x\sqrt{2y+1}\le x^2+2y+1(3)$$

$$\Leftrightarrow(x^2-2y)^2-2(x^2-2y)+1\le0\Leftrightarrow(x^2-2y-1)^2\le0\Leftrightarrow x^2=2y+1$$

Mặt khác, dấu đẳng thức tại (3) xảy ra khi: $x=\sqrt{2y+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=2y+1\\x\ge0\end{cases}$

Thay vào phương trình (2) ta được: $2\sqrt{x^2-5}+3\sqrt[3]{x^2-8}=2(x^2-1)-3x$

Ta có :

$$VP=2x^2-3x-2=\sqrt{4(x^2-5)}+3\sqrt[3]{1.1.(x^2-8)}\le\frac{4+x^2-5}{2}+(1+1+x^2-8)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}(x-3)^2\le0\Leftrightarrow x=3(TMDK)\Rightarrow y=4(TMDK)$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm: $(x;y)=(3;4)$.

Bình luận : Bài toán sử dụng đánh giá trên toàn hệ. Một bài toán khá hay.

Ví dụ 19 : Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+2x-2=\sqrt{-y^2-4y-2}\\6x-y-11+\sqrt{-2x^2-4x+10}=0\end{cases}\quad(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Với hệ này, ta nhận thấy từng phương trình trong hệ không thể giải quyết được. Do đó ta đẩy ý tưởng đánh giá trên từng phương trình rồi phối hợp lại với nhau là cách khả quan nhất. Do cả hai phương trình đều chứa các căn bậc hai nên chúng ta sẽ sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ để đánh giá khử căn là lựa chọn tối ưu nhất.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} -2x^2-4x+10\ge 0 \\ -y^2-4y-2\ge 0 \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có :

$$x^2+2x-2=\sqrt{-y^2-4y-2}\le \frac{1-y^2-4y-2}{2}\Rightarrow 2x^2+4x+y^2+4y-3\le 0\ (1)$$

$$y-6x+11=\sqrt{-2x^2-4x+10}=\frac{\sqrt{4\left(10-4x-2x^2\right)}}{2}\le \frac{4+10-4x-2x^2}{2}.$$

Suy ra : $x^2-10x+2y+15\le 0\ (2)$.

Lấy (1) + (2) vế theo vế ta có :

$$3x^2-6x+y^2+6y+12\le 0\Leftrightarrow 3(x-1)^2+(y+3)^2\le 0\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y+3=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện và thử lại ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(1;-3)$.

Bình luận : Bài hệ sử dụng đánh giá và kết hợp với việc đánh giá qua dạng

$$A^2+B^2\le 0\Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}.$$

Ví dụ 20 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+y-1=\sqrt{2\left(y^2-2y+x+2\right)} \\ \sqrt{x(x+y)}+\sqrt{(x-1)(y+1)}=\dfrac{x^2-x+y+1}{\sqrt{x-1}} \end{cases}\ (x,y\in \mathbb{R})$$

Phân tích : Với hệ này, cấu trúc của phương trình thứ nhất rất gợi ảnh bất đẳng thức $B.C.S$ vì ta sẽ nhận thấy $y^2-2y+x+2=(y-1)^2+x+1$.

Vậy áp dụng bất đẳng thức $B.C.S$ ta có: $\sqrt{x+1}+y-1\le \sqrt{(1+1)\left(y^2-2y+x+2\right)}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x-1}=y-1$.

Mặt khác ta nhận thấy phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình :

$$\sqrt{\left(x^2-x\right)(x+y)}+(x-1)\sqrt{y+1}=x^2-x+y+1.$$

Tới đây ta sử dụng đánh giá quen thuộc $ab\le \dfrac{a^2+b^2}{2}$. Ta có các đánh giá sau :

$$\begin{cases} \sqrt{\left(x^2-x\right)(x+y)}\le \dfrac{x^2-x+x+1}{2} \\ (x-1)\sqrt{y+1}\le \dfrac{x^2-2x+1+y+1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \sqrt{\left(x^2-x\right)\left(x+1\right)}+\left(x-1\right)\sqrt{y+1}\le x^2-x+y+1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $\begin{cases}\sqrt{x^2-x}=\sqrt{x+y}\\ x-1=\sqrt{y+1}\end{cases}\Leftrightarrow \sqrt{y+1}=x-1$.

Khi đó kết hợp lại ta sẽ có hệ phương trình : $\begin{cases}\sqrt{x-1}=y-1\\ \sqrt{y+1}=x-1\end{cases}$. Hệ này giải quyết khá đơn giản.

Vậy xem như hệ đã được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}x>1\\ y\ge -1\end{cases}$.

Ta biến đổi hệ phương trình đã cho trở thành hệ phương trình :

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+y-1=\sqrt{2\left(y^2-2y+x+2\right)}\\ \sqrt{\left(x^2-x\right)\left(x+y\right)}+\left(x-1\right)\sqrt{y+1}=x^2-x+y+1\end{cases}.$$

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S ta có : $\sqrt{x+1}+y-1\le\sqrt{\left(1+1\right)\left(y^2-2y+x+2\right)}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x-1}=y-1$.

Sử dụng đánh giá: $ab\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$. Ta có các đánh giá sau :

$$\begin{cases}\sqrt{\left(x^2-x\right)\left(x+y\right)}\le\dfrac{x^2-x+x+1}{2}\\ \left(x-1\right)\sqrt{y+1}\le\dfrac{x^2-2x+1+y+1}{2}\end{cases}$$

$\Rightarrow \sqrt{\left(x^2-x\right)\left(x+1\right)}+\left(x-1\right)\sqrt{y+1}\le x^2-x+y+1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $\begin{cases}\sqrt{x^2-x}=\sqrt{x+y}\\ x-1=\sqrt{y+1}\end{cases}\Leftrightarrow \sqrt{y+1}=x-1$.

Khi đó kết hợp lại ta sẽ có hệ phương trình : $\begin{cases}\sqrt{x-1}=y-1\\ \sqrt{y+1}=x-1\end{cases}\ \left(x\ge1,y\ge1\right)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=\sqrt{y+1}-\sqrt{x+1}\\ \sqrt{x+1}=y-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}\right)=0\\ \sqrt{x+1}=y-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}\right)=0 \\ \sqrt{x+1}=y-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \sqrt{x+1}=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x+1=(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x(x-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(3;3)$.

Bình luận : Để giải quyết bài hệ này, ta sử dụng bất đẳng thức và đánh giá khá quen thuộc. Hệ cuối cùng đưa về giúp ta giải một hệ rất cơ bản. Đây là một hệ rất hay và thú vị.

Ví dụ 21: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y(3x+43)=10\sqrt{(7y+4)(3x+4)} \\ (3x-7y)\sqrt{3x+4}=(3x-6y-5)\sqrt{7y+4} \end{cases}, \ (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích: Với hệ này, dấu ẩn ẩn phụ hóa cũng khá rõ ràng. Tuy nhiên, khi chúng ta ẩn phụ hóa thì hệ này cũng không thể giải đơn giản được. Hãy quan sát ở phương trình thứ hai trong hệ ta có dấu hiệu để liên hiệp đó là :

$$(3x+4)-(7y+4)=3x-7y.$$

Do đó ta sẽ cố gắng tách cho được đại lượng $3x-7y$ ở phương trình thứ hai trong hệ với hy vọng bắt được nhân tử chung.

Cụ thể ta có biến đổi cho phương trình thứ hai trong hệ như sau :

$$(3x-7y)\sqrt{3x+4}=(3x-7y+y-5)\sqrt{7y+4}$$

$$\Leftrightarrow (3x-7y)\left(\sqrt{3x+4}-\sqrt{7y+4}\right)=(y-5)\sqrt{7y+4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-7y)^2}{\sqrt{3x+4}+\sqrt{7y+4}}=(y-5)\sqrt{7y+4}.$$

Ở phép biến đổi liên hiệp cuối cùng, tuy chúng ta không đạt được mục đích là bắt được nhân tử chung nhưng chúng ta lại thu được sự đánh giá miền nghiệm cho y. Cụ thể từ đây ta có : $y-5\ge 0$.

Mặt khác từ phương trình thứ nhất trong hệ theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$10\sqrt{(7y+4)(3x+4)}=5\cdot 2\sqrt{(7y+4)(3x+4)}\le 5(3x+4+7y+4).$$

Từ đó ta có : $y(3x+43)\le 5(3x+8)+35y \Leftrightarrow (3x+8)(y-5)\le 0$.

Với điều kiện của bài toán từ đây ta lại có : $y-5\le 0$. Kết hợp với các đánh giá ta được $y=5$. Từ đây hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện: $\begin{cases}3x+4\ge 0\\7y+4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{4}{3}\\y\ge -\dfrac{7}{4}\end{cases}$.

Nhận thấy $(x,y)=\left(-\dfrac{4}{3};-\dfrac{7}{4}\right)$ không thỏa hệ. Do đó ta chỉ cần xét $x>-\dfrac{4}{3},\ y>-\dfrac{7}{4}$.

Từ phương trình thứ hai ta có biến đổi sau :

$$(3x-7y)\sqrt{3x+4}=(3x-7y+y-5)\sqrt{7y+4}$$

$$\Leftrightarrow(3x-7y)\left(\sqrt{3x+4}-\sqrt{7y+4}\right)=(y-5)\sqrt{7y+4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(3x-7y)^2}{\sqrt{3x+4}+\sqrt{7y+4}}=(y-5)\sqrt{7y+4}.$$

Từ đây ta suy ra : $y-5\ge 0$.

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có :

$$10\sqrt{(7y+4)(3x+4)}=5\cdot 2\sqrt{(7y+4)(3x+4)}\le 5(3x+4+7y+4)$$

Từ đó ta có : $y(3x+43)\le 5(3x+8)+35y\Leftrightarrow(3x+8)(y-5)\le 0\ (1)$

Do đó $3x+8>0$ nên từ (1) ta có $y-5\le 0$.

Vậy qua các đánh giá ta có được : $\begin{cases}y-5\ge 0\\y-5\le 0\\3x+4=7y+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5\\3x+4=39\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{35}{3}\\y=5\end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện và thử lại ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left(\dfrac{35}{3};5\right)$.

Bình luận : Bài toán này được giải dựa trên các kỹ năng liên hiệp, đánh giá miền nghiệm và sử dụng bất đẳng thức cơ bản. Một bài toán khá hay. Tuy lời giải tưởng chừng như đơn giản nhưng lại ẩn chứa rất nhiều điều có ích cho chúng ta sau này.

Ví dụ 22: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{4x^3+4xy^2}{2x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2-xy+y^2}=2x+y\\2(2x-y)\sqrt{x-y}=x^2-5xy+4x+y-1\end{cases},\ (x,y\in\mathbb{R})$$

(Thi thử Toanhoc24h)

Phân tích: Với hệ này, ta nhận thấy từ phương trình thứ hai chúng ta có thể đặt ẩn phụ hóa căn thức và hy vọng phân tích được nhân tử.

Cụ thể ta đặt $u=\sqrt{x-y},u\ge 0$. Ta có : $y=x-u^2$

Khi đó phương trình thứ hai trở thành phương trình:

$$2\left(x+u^2\right)u=x^2-5x\left(x-u^2\right)+5x-u^2-1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-\left(5u^2+3\right)x+2u^3+u^2+1=0\ (*)$$

Kiểm tra phương trình này ta nhận thấy phương trình này tách được nhân tử nhưng không tối ưu do có delta không chính phương.

Quay lại với phương trình thứ nhất trong hệ, ta có phép biến đổi sau :

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}=2x+y-\frac{4x^3+4xy^2}{2x^2+xy+y^2}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-xy+y^2}=y\left(\frac{4x^2-xy+y^2}{2x^2+xy+y^2}\right)$$

Từ đây ta suy ra được $y>0$. Mặt khác từ điều kiện $x\ge y\Rightarrow x>0$.

Lại để ý ta có phép biến đổi đại số quen thuộc sau :

$$x^2-xy+y^2=\frac{1}{4}(x+y)^2+\frac{3}{4}(x-y)^2$$

Do đó ta có đánh giá quen thuộc sau :

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}=\sqrt{\frac{1}{4}(x+y)^2+\frac{3}{4}(x-y)^2}\ge\frac{1}{2}(x+y).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$. Nhận thấy với $x=y$ thì phương trình thứ nhất luôn đúng.

Do đó ta sẽ đề xuất một đánh giá sau : $\dfrac{4x^3+4xy^2}{2x^2-xy+y^2}\ge\dfrac{3x+y}{2}\ (1)$.

Thật vậy, ta có $(1)\Leftrightarrow 8x^3+8xy^2\ge(3x+y)\left(2x^2-xy+y^2\right)\Leftrightarrow(x-y)^2(2x-y)\ge 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $2x-y=x+(x-y)>0$.

Dấu đẳng thức xảy khi và chỉ khi $x=y$.

Vậy từ đó ta có: $\dfrac{4x^3+4xy^2}{2x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2-xy+y^2}\ge\dfrac{1}{2}(x+y)+\dfrac{1}{2}(3x+y)=2x+y$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$. Và như thế hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $x\ge y$.

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}=2x+y-\frac{4x^3+4xy^2}{2x^2+xy+y^2}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-xy+y^2}=y\left(\frac{4x^2-xy+y^2}{2x^2+xy+y^2}\right)$$

Do : $\begin{cases}x^2-xy+y^2>0\\4x^2-xy+y^2>0\\2x^2+xy+y^2>0\end{cases}$ nên ta suy ra : $y>0$. Vì $\begin{cases}x\ge y\\y>0\end{cases}\Rightarrow x>0$.

Mặt khác ta có các đánh giá sau :

⊕ $\sqrt{x^2-xy+y^2}=\sqrt{\frac{1}{4}(x+y)^2+\frac{3}{4}(x-y)^2}\ge\frac{1}{2}(x+y)$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

⊕ $\frac{4x^3+4xy^2}{2x^2-xy+y^2}\ge\frac{3x+y}{2}$ (1).

Thật vậy, ta có

$(1)\Leftrightarrow 8x^3+8xy^2\ge(3x+y)\left(2x^2-xy+y^2\right)\Leftrightarrow(x-y)^2(2x-y)\ge0$.

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $2x-y=x+(x-y)>0$.

Dấu đẳng thức xảy khi và chỉ khi $x=y$.

Từ hai đánh giá ta có :

$$\frac{4x^3+4xy^2}{2x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2-xy+y^2}\ge\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(3x+y)=2x+y$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$4x^2-5x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=1\\ x=\frac{1}{4}\Rightarrow y=\frac{1}{4}\end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=\left\{(1;1);\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)\right\}$.

Bình luận : Đây là một toán khá hay, tác giả đã đưa ra những vấn đề rất thú vị. Lời giải trong bài toán được chúng tôi đưa ra thuần về phương án đánh giá dựa trên các đánh giá quen thuộc và đánh giá có được từ việc tư duy dấu bằng xảy ra khi $x=y$. Để có đánh giá (1) ta thử phép đánh giá có được nhờ phép tách sau :

$$2x+y=\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(3x+y).$$

Tuy nhiên, ngoài lời giải thuần đánh giá như trên thì từ cấu trúc phương trình thứ nhất ta có thể nghỉ đến phép liên hiệp cũng rất tự nhiên.

Cụ thể ta có dùng liên hiệp như sau :

$$\frac{4x^3+4xy^2}{2x^2+xy+y^2}-2x+\sqrt{x^2-xy+y^2}-y=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x(x-y)}{\sqrt{x^2-xy+y^2}+y}+\frac{2yx(x-y)}{2x^2+xy+y^2}=0$$

$$\Leftrightarrow x(x-y)\left(2x^2+xy-y^2-2y\sqrt{x^2-xy+y^2}\right)=0\ (i).$$

Với $x>0, y>0$. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có :

$$2y\sqrt{x^2-xy+y^2}\le x^2-xy+2y^2$$

Từ đó ta có :

$$2x^2+xy-y^2-2y\sqrt{x^2-xy+y^2}$$
$$\ge 2x^2+xy-y^2-x^2-xy-y^2=(x-y)(x+3y)\ge 0$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$. Do đó từ (i) $\Leftrightarrow$ x = y.

Mặt khác, không khó để nhận thấy cấu trúc của phương trình thứ nhất cũng mang dáng dấp đẳng cấp, do đó như đã đề cập trong phần đặt ẩn phụ ta cũng có thể tính đến phương án đặt ẩn phụ để giải quyết bài toán.

Cụ thể ta biến đổi phương trình thứ nhất về phương trình :

$$\left(2x^2+xy+y^2\right)\sqrt{x^2-xy+y^2}=y^3+4x^2y-xy^2$$

Đặt $y=tx>0$, ta có : $x\left(2+t+t^2\right)\sqrt{t^2-t+1}=x\left(t^3+4t-t^2\right)$

$$\Leftrightarrow\left(2+t+t^2\right)^2\left(t^2-t+1\right)=\left(t^3+4t-t^2\right)^2\Leftrightarrow(t-1)^2\left(3t^3+t^2+8t+4\right)=0$$

Chú ý rằng ta có $t>0$ nên $t=1$.

Ví dụ 23: Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+6\sqrt{xy}-y=6\\ x+\dfrac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2}=\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}+3\end{cases}$ $(x, y\in\mathbb{R})$

(Thi thử math.vn)

Phân tích: Với hệ này, nhận định ban đầu cấu tạo của phương trình thứ hai trong hệ dễ làm học sinh nghỉ đến kiểu đẳng cấp. Tuy nhiên, nó không phải vậy. Ở phương trình thứ nhất trong hệ tuy hình thức đơn giản nhưng cũng chẳng giúp ta được gì, cấu tạo phương trình thứ hai thì càng khủng hơn. Do đó để giải quyết hệ ta sẽ đẩy ý tưởng kết hợp cả hai phương trình trong hệ để giải quyết. Vấn đề là kết hợp theo ý tưởng nào là có lợi nhất??

Nhận định thứ nhất đó là nếu $x=y$ thì cả hai căn thức trong từng phương trình trong hệ đều thoát căn. Và từ phương trình thứ nhất ta lại có $x=1\Rightarrow y=1$. Thế vào phương trình thứ hai ta thấy thỏa. Do đó ta dự đoán được hệ sẽ có nghiệm là (x, y) = (1,1).

Nhận định thứ hai đó là nếu $x\le 0, y\le 0$ thì phương trình thứ hai trong hệ vô nghiệm. Do đó nếu hệ có nghiệm thì nghiệm đó phải thỏa $x>0, y>0$

Với hai nhận định này thì từ $\sqrt{xy}$ có trong phương trình thứ nhất làm ta liên tưởng đến đánh giá bất đẳng thức AM-GM để phá căn và bảo toàn nhận định đã đặt ra.

Khi đó, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có : $6\sqrt{xy} \le 3(x+y)$

Từ đó ta có : $6 = x + 6\sqrt{xy} - y \le x + 3(x+y) - y \Rightarrow 2x + y \ge 3$

Mặt khác từ phương trình thứ hai ta sử dụng đánh giá quen thuộc sau đây :

$$xy \le \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Khi đó ta sẽ có : $x + \dfrac{6(x^3+y^3)}{x^2+xy+y^2} \ge x + \dfrac{6(x^3+y^3)}{x^2+y^2+\dfrac{x^2+y^2}{2}} = \dfrac{4(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$

Tiếp theo ta sẽ đi đánh giá bất đẳng thức sau : $\dfrac{4(x^3+y^3)}{x^2+y^2} \ge 2\sqrt{2(x^2+y^2)}$ $(*)$.

Thật vậy, ta có $(*) \Leftrightarrow 2(x^3+y^3) \ge (x^2+y^2)\sqrt{2(x^2+y^2)}$

$\Leftrightarrow 2(x^3+y^3) \ge (x^2+y^2)^2(x^2+y^2) \Leftrightarrow x^6 - 3x^4y^2 + 4x^3y^3 + 3x^2y^4 + y^6 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(x^4 + 2x^3y + 2xy^3 + y^4) \ge 0$ (luôn đúng $\forall x, y > 0$)

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Với các đánh giá này ta có :

$3 = x + \dfrac{6(x^3+y^3)}{x^2+xy+y^2} - \sqrt{2(x^2+y^2)}$

$\ge x + 2\sqrt{2(x^2+y^2)} - \sqrt{2(x^2+y^2)} = x + \sqrt{2(x^2+y^2)}$

Mặt khác ta lại có : $\sqrt{2(x^2+y^2)} \ge x + y$.

Do đó ta có : $3 \ge x + x + y \Leftrightarrow 2x + y \le 3$.

Vậy qua các đánh giá ta có được $\begin{cases} 2x+y \ge 3 \\ 2x+y \le 3 \\ x = y \end{cases}$. Và tới đây ta đã giải quyết được bài toán hệ này.

Lời giải : Điều kiện: $xy \ge 0, x^2 + y^2 \ge 0$.

Vì $x \le 0, y \le 0$ không thỏa hệ nên ta chỉ cần xét $x > 0, y > 0$.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có : $6\sqrt{xy} \le 3(x+y)$.

Do đó từ phương trình thứ nhất ta có :

$6 = x + 6\sqrt{xy} - y \le x + 3(x+y) - y \Rightarrow 2x + y \ge 3$.

Mặt khác ta có : $xy \le \dfrac{x^2+y^2}{2}$. Do đó từ phương trình thứ hai trong hệ ta có :

$$x+\frac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2} \ge x+\frac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2+\frac{x^2+y^2}{2}}=\frac{4\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}.$$

Ta sẽ đi chứng minh : $\dfrac{4\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2} \ge 2\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\ (*)$.

Thật vậy, ta có $(*) \Leftrightarrow 2\left(x^3+y^3\right) \ge \left(x^2+y^2\right)\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$

$\Leftrightarrow 2\left(x^3+y^3\right) \ge \left(x^2+y^2\right)^2\left(x^2+y^2\right) \Leftrightarrow x^6-3x^4y^2+4x^3y^3+3x^2y^4+y^6 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2\left(x^4+2x^3y+2xy^3+y^4\right) \ge 0$ (luôn đúng $\forall x,y>0$)

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Với các đánh giá này ta có :

$$3=x+\frac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\ge x+2\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}=x+\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$$

Mặt khác ta lại có : $\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)} \ge x+y$.

Do đó ta có : $3 \ge x+x+y \Leftrightarrow 2x+y \le 3$.

Vậy qua các đánh giá ta có được $\begin{cases} 2x+y \ge 3 \\ 2x+y \le 3 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=3 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(1;1)$.

Bình luận : Bài toán này là một bài toán hay và khó. Để giải nó đòi hỏi người giải cần độ khéo léo và chọn các đánh giá sao cho phù hợp. Các bạn chú ý rằng tư tưởng để xuất hiện đánh giá (*) chính là do kết hợp giữa hai yếu tố nhận định $x=y$, khử căn thức $\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$ và mục đích tạo ra được $2x+y$. Có một điều thú vị từ bài toán này đó là nguồn khởi ban đầu của nó là một bài toán cực trị hai biến, nhưng sau đó tác giả đã chỉnh biên lại thành một bài hệ. Và sự chỉnh biên này đã tạo một điểm son mới cho bài toán ban đầu.

Ví dụ 24: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y\sqrt{x-1}+3\sqrt{x-y^2}=2x+y \\ (x+5y-4)\sqrt{x-y^2}=2xy-2y \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

(Thi thử Toanhoc24h)

Phân tích: Với hệ này, ta nhận thấy toàn bộ cấu trúc của hệ liên quan đến hai căn thức $\sqrt{x-1},\sqrt{x-y^2}$. Tuy nhiên đại lượng căn thức $\sqrt{x-y^2}$ lại xuất hiện nhiều hơn, mặt khác nhận thấy phương trình thứ hai chỉ chứa duy nhất một căn thức nên ta có thể nghỉ đến ẩn phụ hóa hy vọng bắt được nhân tử và thực hiện phép thế.

Đặt $t=\sqrt{x-y^2}$, $t\ge 0$. Ta có $x=t^2+y^2$.

Khi đó phương trình thứ hai trở thành: $\left(t^2+y^2+5y-4\right)t=2\left(t^2+y^2\right)y-2y$

$\Leftrightarrow t^3-2yt^2+\left(y^2+5y-4\right)t-2y^3+2y=0\ (*)$

Kiểm tra phương trình này thấy phương trình tách được nhân tử và theo hướng phân tích nhân tử ở phần phương pháp giải hệ bằng phương pháp nhân tử hóa ta có được : $(*)\Leftrightarrow (t-2y+2)\left(t^2-2t+y^2+y\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-y^2}-2y+2\right)\left(x-2\sqrt{x-y^2}+y\right)=0.$$

Tới đây ta có được hai nhân tử để thực hiện phép thế. Tuy nhiên ta không nên vội vàng mà ta cần để ý tới phương trình thứ nhất trong hệ bên vế trái của hệ đều chứa các đại lượng ở dạng ab nên ta nghỉ đến phép đánh giá quen thuộc mà ta hay dùng đó là $ab\le\frac{a^2+b^2}{2},\forall a,b\in\mathbb{R}$ để thực hiện đánh giá xem có loại bớt được nhân tử nào không?

Sử dụng đánh giá ta có : $2x+y\le\frac{y^2+x-1}{2}+\frac{3\left(x-y^2+1\right)}{2}=2x-y^2+1$.

Từ đó ta có : $y^2+y-1\le 0\Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\le y\le\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Từ nhận định này ta có được : $3-\sqrt{5}\le 2-2y\le 3+\sqrt{5}\Rightarrow \sqrt{x-y^2}-2y+2>0$.

Với nhận xét này hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ phương trình :

$$\begin{cases} y\sqrt{x-1}+3\sqrt{x-y^2}=2x+y \\ x-2\sqrt{x-y^2}+y=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2y\sqrt{x-1}+3(x+y)=2x+y \\ 2\sqrt{x^2-y}=x+y \end{cases}.$$

Hệ mới này hoàn toàn giải quyết được nên xem như hệ đã cho đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x-y^2\ge 0 \\ x\ge 1 \end{cases}$.

Đặt: $t=\sqrt{x-y^2}$, $t\ge 0$. Ta có $x=t^2+y^2$.

Khi đó phương trình thứ hai trở thành:

$$\left(t^2+y^2+5y-4\right)t=2\left(t^2+y^2\right)y-2y \Leftrightarrow t^3-2yt^2+\left(y^2+5y-4\right)t-2y^3+2y=0$$

$$\Leftrightarrow \left(t-2y+2\right)\left(t^2-2t+y^2+y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-y^2}-2y+2\right)\left(x-2\sqrt{x-y^2}+y\right)=0 .(1).$$

Mặt khác sử dụng đánh giá $ab\le\dfrac{a^2+b^2}{2},\forall a,b\in\mathbb{R}$, ta có :

$$2x+y\le\frac{y^2+x-1}{2}+\frac{3\left(x-y^2+1\right)}{2}=2x-y^2+1.$$

Từ đó ta có : $y^2+y-1\le 0\Leftrightarrow\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\le y\le\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Từ nhận định này ta có được : $3-\sqrt{5}\le 2-2y\le 3+\sqrt{5}\Rightarrow\sqrt{x-y^2}-2y+2>0$.

Với nhận xét này hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ phương trình :

$$\begin{cases}y\sqrt{x-1}+3\sqrt{x-y^2}=2x+y\\ x-2\sqrt{x-y^2}+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y\sqrt{x-1}+3(x+y)=4x+2y\\ 2\sqrt{x^2-y}=x+y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2y\sqrt{x-1}=x-y\\ 2\sqrt{x-y^2}=x+y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4y^2(x-1)=x^2-2xy+y^2\\ 4\left(x-y^2\right)=x^2+2xy+y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2(2y+1)xy+5y^2=0\\ x^2+2(y-2)x+5y^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(y^2+y-1\right)=0\\ x^2+2(y-2)x+5y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases}y^2+y-1=0\\ x^2+2(y-2)x+5y^2=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases}y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ x^2+2\cdot\dfrac{\sqrt{5}-5}{2}\cdot x+\left(\dfrac{\sqrt{5}-5}{2}\right)^2=0\end{cases}\\ \begin{cases}y=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\\ x^2-2\cdot\dfrac{\sqrt{5}+5}{2}\cdot x+\left(\dfrac{\sqrt{5}+5}{2}\right)^2=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases}y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}y=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{\sqrt{5}+5}{2}\end{cases}\end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện va thử lại ta có nghiệm của hệ là :

$$(x,y)=\left\{(0;0);\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}.$$

Bình luận : Đây là một bài toán khá hay, bài toán có sự kết hợp giữa ẩn phụ phân tích nhân tử, đánh giá và hằng đẳng thức. Nội dung bài toán tuy không mới nhưng lại khá đặc sắc. Bằng những nhận định tinh tế tác giả đã khống chế được những kỉ thuật cơ bản trong một bài toán, điều đó đã làm cho bài toán về tổng thể có nét đẹp rất riêng.

Ví dụ 25: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2+y^3+y^6=\sqrt{xy-x^2y^2} \\ 4xy^3+y^3+\dfrac{1}{2}=2x^2+\sqrt{1+(2x-y)^2} \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích: Với hệ này, cấu trúc của hệ làm cho ta để ý đến hai đại lượng trong căn thức ở cả hai phương trình đó là một đại lượng $xy-x^2y^2$ mang dáng dấp của một bình phương thiếu, đại lượng còn lại $1+(2x-y)^2$ hoàn toàn đánh giá được. Do đó để giải hệ này ta sẽ bắt đầu từ những nhận định này để đưa ra các đánh giá thích hợp.

Cụ thể ta có : $\sqrt{xy-x^2y^2}=\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}-xy+x^2y^2\right)}=\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-xy\right)^2}\le\frac{1}{2}$.

Từ đánh giá này thì từ phương trình thứ nhất ta sẽ có : $2x^2+y^3+y^6\le\frac{1}{2}$.

Tới đây ta để ý nếu ta cộng hai vế đánh giá vừa có được cho đại lượng y^3+4xy^3 rồi cộng chéo vế theo vế của đánh giá với phương trình thứ hai ta sẽ khử được đại lượng y^3. Khi đó ta sẽ có các đại lượng x^2,xy^3,y^6 (không kể hệ số) mang dáng dấp hằng đẳng thức nên có thể sử dụng tiếp được các đánh giá nào đó.

Ta thử phép giả định sau từ đánh giá : $2x^2+2y^3+y^6+4xy^3\le\frac{1}{2}+y^3+4xy^3$.

Cộng chéo vế theo vế đánh giá này với phương trình thứ hai ta thu được :

$$\frac{1}{2}+y^3+4xy^3+4xy^3+y^3+\frac{1}{2}\ge 2x^2+2y^3+y^6+2x^2+4xy^3+\sqrt{1+(2x-y)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1+8xy^3\ge 4x^2+y^6+\sqrt{1+(2x-y)^2}\Leftrightarrow\left(y^3-2x\right)^2+\sqrt{1+(2x-y)^2}\le 1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y^3-2x=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}.$$

Và tới đây hệ đã được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải: Điều kiện $xy - x^2y^2 \geq 0$ (*)

Ta có $y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(xy - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow y^6 + 2y^3 + 2x^2 + 4xy^3 \leq \frac{1}{2} + y^3 + 4xy^3$

Cộng chéo vế theo vế đánh giá này với phương trình thứ hai ta thu được :

$y^6 + 2y^3 + 2x^2 + 4xy^3 + 2x^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2} \leq 1 + 2y^3 + 8xy^3$

$\Leftrightarrow y^6 + 4x^2 - 4xy^3 + \sqrt{1 + (2x - y)^2} \leq 1 \Leftrightarrow \left(y^3 - 2x\right)^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2} \leq 1$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} y - 2x = 0 \\ y^3 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - y = 0 \\ x = \frac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Thử lại ta thấy, nghiệm của hệ đã cho là $(x;y) = \left(-\frac{1}{2}; -1\right)$.

Bình luận: Đây là một hệ cũng khá khó vì khi thực hiện phép đánh giá bước 1 xong cần có một độ quan sát tinh tế mới có thể thực hiện được bước đánh giá tiếp theo nếu không thì chúng ta cũng rất khó đi đến lời giải trọn vẹn cho bài toán.

Ví dụ 26: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{y}{\sqrt{x} + y} - \frac{x}{\left(y + \sqrt{x}\right)^2} = \frac{y^4}{\left(x + y^2\right)^2} \\ \sqrt{y + \sqrt{x - 1}} = 32(x - 2y + 1)\sqrt{2y - 2} \end{cases}$ $(x, y \in \in \mathbb{R})$

Phân tích: Với hệ này, ta nhận định được để giải quyết hệ này, ta cần bắt đầu từ phương trình thứ nhất trong hệ. Và cũng từ phương trình này ta nhận thấy ta có thể ẩn phụ hóa cho phương trình được gọn gàng hơn thông qua phép chia cho một đại lượng thích hợp tương ứng trên từng phân số.

Cụ thể ta biến đổi phương trình về dạng : $\frac{1}{\frac{\sqrt{x}}{y} + 1} - \frac{1}{\left(\frac{y}{\sqrt{x}} + 1\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{x}{y^2} + 1\right)^2}$.

Tới đây ta đặt $a = \frac{x}{y^2}, b = \frac{y}{\sqrt{x}} (a, b > 0)$.

Khi đó ta sẽ được phương trình : $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} = \frac{1}{ab+1}$

Để giải phương trình này chúng ta có thể sử dụng phép biến đổi tương đương, tuy nhiên ở đây chúng tôi sử dụng đánh giá trực tiếp bằng bất đẳng thức B.C.S trực tiếp để giải.

Cụ thể ta sử dụng bất đẳng thức B.C.S đánh giá như sau :

$$\begin{cases}(ab+1)\left(\frac{a}{b}+1\right)\ge(a+1)^2\\(ab+1)\left(\frac{b}{a}+1\right)\ge(b+1)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{(a+1)^2}\ge\frac{b}{(a+b)(ab+1)}\\\frac{1}{(b+1)^2}\ge\frac{a}{(a+b)(ab+1)}\end{cases}$$

Cộng vế theo vế các đánh giá ta sẽ có được : $\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\ge\frac{1}{ab+1}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}ab=\frac{a}{b}\\ab=\frac{b}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y^2$.

Lời giải : Điều kiện $\begin{cases}x\ge1\\y\ge1\\y+\sqrt{x-1}\ge0\end{cases}$

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1}{\left(\frac{x}{y^2}+1\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{y}{\sqrt{x}}+1\right)^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{x}}{y}+1}$$

Đặt $a=\frac{x}{y^2};b=\frac{y}{\sqrt{x}}\ (a,b>0)$ ta có $\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}=\frac{1}{ab+1}$ (*)

Theo bất đẳng thức B.C.S ta có

$$\begin{cases}(ab+1)\left(\frac{a}{b}+1\right)\ge(a+1)^2\\(ab+1)\left(\frac{b}{a}+1\right)\ge(b+1)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{(a+1)^2}\ge\frac{b}{a+b}.\frac{1}{ab+1}\\\frac{1}{(b+1)^2}\ge\frac{a}{a+b}.\frac{1}{ab+1}\end{cases}$$

Suy ra $VT(*)\ge\frac{a+b}{(a+b)(ab+1)}=\frac{1}{ab+1}=VP(*)$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}ab=\frac{a}{b}\\ab=\frac{b}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\a=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y^2$

Với $x=y^2$ thay trở lại ta có phương trình :

$$\sqrt{y+\sqrt{y-1}}=32(y-1)^2\sqrt{2y-2}\ \Leftrightarrow y+\sqrt{y^2-1}=2(4y-4)^5$$

Đặt : $4y-4=u\left(u\ge 0\right)$. Phương trình đã cho trở thành :

$$2u^5-\frac{u+4}{4}-\sqrt{\left(\frac{u+4}{4}\right)^2-1}=0\Leftrightarrow 8u^5=\sqrt{u^2+8u}+u+4\left(*\right)$$

+) Rõ ràng $u=0$ không là nghiệm của phương trình (*)

+) Với $u\ne 0$, phương trình (*) tương đương với : $8=\frac{4}{u^5}+\frac{1}{u^4}+\sqrt{\frac{1}{u^8}+\frac{8}{u^9}}$

Hàm số : $f\left(a\right)=\frac{4}{u^5}+\frac{1}{u^4}+\sqrt{\frac{1}{u^8}+\frac{8}{u^9}}$, nghịch biến trên $\left(0;+\infty\right)$ và $f(1)=0$

Suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất $u=1$.

Thay trở lại ta có nghiệm của hệ phương trình đã cho là $\left(x;y\right)=\left(\frac{25}{16};\frac{5}{4}\right)$.

Bình luận : Bài toán được giải dựa trên sự phối hợp giữa đánh giá bằng bất đẳng thức quen thuộc và hàm số. Tuy nhiên, chúng ta vẫn có thể giải bằng phương pháp biến đổi tương đương kết hợp với phương pháp nhân lượng liên hiệp để tìm nghiệm. Bình diện chung, đây là một bài toán hay vì có thể gợi mở được nhiều lối đi và với lối đi nào thì bài toán luôn tạo được một nét riêng. Các bạn hãy thử sức mình với phương án biến đổi tương đương và nhân lượng liên hiệp xem thử nhé !

Ví dụ 27 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-xy+y^2}=\sqrt{y^2-y+1}\\ \sqrt{8\left(x+1\right)^2+9}=\left(xy+y+1\right)\sqrt{x^2+2y(x+1)+1}+2\end{cases}\quad\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$$

Phân tích :Với hệ này, rõ ràng từ phương trình thứ hai ta không thể khai thác được gì từ đây. Do đó ta chuyển sang phương trình thứ nhất, quan sát thấy rằng ba đại lượng trong căn đều là các đại lượng ở dạng bình phương thiếu. Chính sự nhận định định này làm cho liên tưởng đến bất đẳng thức Mincopski hay còn gọi là bất đẳng thức về véctơ.

Cụ thể ta biến đổi phương trình thứ nhất về phương trình :

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-y+1}=\sqrt{x^2+x+1}$$

Nhận xét ta có : $y^2-y+1=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$; $x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2$

hoặc $x^2-xy+y^2=\left(\frac{1}{2}x-y\right)^2+\frac{3}{4}x^2$

Mặt khác ta có bất đẳng thức Mincopski có dạng như sau :

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{\left(a+c\right)^2+\left(b+d\right)^2}$$

Do đó nếu ta xem $a=y-\frac{1}{2}, b=\frac{\sqrt{3}}{2}, c=x-\frac{1}{2}y$, $d=\frac{\sqrt{3}}{2}y$ thì bất đẳng thức không xảy ra so với đề bài.

Còn nếu ta chọn $a=y-\frac{1}{2}, b=\frac{\sqrt{3}}{2}, c=\frac{1}{2}x-y$, $d=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ thì bất đẳng thức xảy ra so với đề bài.

Từ nhận xét này ta tiến tới đánh giá sau :

$$\sqrt{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}x-y\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}$$

$$\geq\sqrt{\left(y-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x-y\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}=\sqrt{x^2+x+1}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $\frac{\sqrt{3}}{2}x\left(y-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}x-y\right)$

$\Leftrightarrow xy+y=x$. Và lúc này ta chỉ cần thực hiện phép thế vào phương trình thứ hai xem như hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $x^2+2y(x+1)+1\geq 0$.

Phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình :

$$\sqrt{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}x-y\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}=\sqrt{x^2+x+1}$$

Áp dụng bất đẳng thức Mincopski ta có :

$$\sqrt{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}x-y\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}\geq\sqrt{\left(y-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x-y\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}$$

$$\geq\sqrt{x^2+x+1}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$\frac{\sqrt{3}}{2}x\left(y-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}x-y\right)\Leftrightarrow xy+y=x$

Từ đây ta có điều kiện $x\neq -1$

Thay vào phương trình thứ hai ta được phương trình :

$\sqrt{8(x+1)^2+9}=(x+1)\sqrt{(x+1)^2}+2\Leftrightarrow\sqrt{8(x+1)^2+9}=(x+1)|x+1|+2$

Đặt $t=x+1$, lúc đó phương trình vừa biến đổi trở thành phương trình :

$\sqrt{8t^2+9}=t|t|+2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}t>0\\ \sqrt{8t^2+9}=t^2+2\end{cases}\\ \begin{cases}t<0\\ \sqrt{8t^2+9}=2-t^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}t>0\\ t^4-4t^2-5=0\end{cases}\\ \begin{cases}t\le 0\\ 2-t^2\ge 0\\ t^4-12t^2-5=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}t>0\\ t^2=5\end{cases}\\ \begin{cases}t^2\le 2\\ t^2=6\pm\sqrt{41}\end{cases}(vn)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow t=\sqrt{5} \Leftrightarrow x=-1+\sqrt{5}$$

Với $x=-1+\sqrt{5}$, ta có : $y=\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}+1}=\dfrac{5-\sqrt{5}}{5}$.

Đối chiếu điều kiện, thử lại ta có nghiệm của hệ : $(x,y)=\left(-1+\sqrt{5};\dfrac{5-\sqrt{5}}{5}\right)$.

Bình luận : Bài toán trên được giải dựa trên yếu tố áp dụng bất đẳng thức Mincopski để đánh giá. Để áp dụng được đánh giá này ta thường gặp các bài toán mà dấu hiệu của nó là các đại lượng dưới căn thường chứa các bình phương thiếu hoặc các bình phương dư (nói cách khác chứa dạng độ dài của một véctơ)cộng hưởng với một đại lượng nào đó thỏa điều kiện là độ dài của một véctơ tổng của hai véctơ kia. Bài toán này còn chú ý ở cách giải phương trình.

Ví dụ 28 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{1-2y-x^2}+x-1=\sqrt{2\left(x^2-y^2+2\right)}\\ \sqrt{1+2x-y^2}-y-1=\sqrt{2\left(y^2-x^2+2\right)}\end{cases}\ (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích : Với hệ này, chúng ta hãy để ý nếu trên từng phương trình chúng ta tách riêng để sử dụng một lối đi nào đó thì rất khó để hoàn thành. Vì sao có nhận định như vậy, câu trả lời chính là chúng ta hãy để ý tới các phép toán sau :

$\oplus$ $1-2y-x^2+(y+1)^2=y^2-x^2+2$

$\oplus$ $1+2x-y^2+(x-1)^2=x^2-y^2+2$.

Với hai phép toán từ nhận xét này, ta sẽ đề xuất phối hợp cả hai phương trình lại bằng phép cộng và sử dụng bất đẳng thức B.C.S để đánh giá .

Cụ thể cộng vế theo vế hai phương trình ta có :

$$\sqrt{1-2y-x^2}-(y+1)+\sqrt{1+2x-y^2}+x-1=\sqrt{2\left(x^2-y^2+2\right)}+\sqrt{2\left(y^2-x^2+2\right)}$$

Sử dụng bất đẳng thức B.C.S ta có :

$$\begin{cases}\sqrt{1-2y-x^2}-(y+1)\le\sqrt{\left(1^2+(-1)^2\right)\left(1-2y-x^2+(y+1)^2\right)}=\sqrt{2\left(y^2-x^2+2\right)}\\ \sqrt{1+2x-y^2}+(x-1)\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left(1+2x-y^2+(x-1)^2\right)}=\sqrt{2\left(x^2-y^2+2\right)}\end{cases}$$

Cộng vế theo vế ta sẽ có được dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases}\sqrt{1-2y-x^2}=-y-1\\ \sqrt{1+2x-y^2}=x-1\end{cases}.$$

Và tới đây ta xem như hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases}1-2y-x^2\ge 0\\ 1+2x-y^2\ge 0\\ x^2-y^2+2\ge 0\\ y^2-x^2+2\ge 0\end{cases}$.

Cộng vế theo vế hai phương trình ta có :

$$\sqrt{1-2y-x^2}-(y+1)+\sqrt{1+2x-y^2}+x-1=\sqrt{2\left(x^2-y^2+2\right)}+\sqrt{2\left(y^2-x^2+2\right)}$$

Sử dụng bất đẳng thức B.C.S ta có :

$$\begin{cases}\sqrt{1-2y-x^2}-(y+1)\le\sqrt{\left(1^2+(-1)^2\right)\left(1-2y-x^2+(y+1)^2\right)}=\sqrt{2\left(y^2-x^2+2\right)}\\ \sqrt{1+2x-y^2}+(x-1)\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left(1+2x-y^2+(x-1)^2\right)}=\sqrt{2\left(x^2-y^2+2\right)}\end{cases}$$

Cộng vế theo vế ta sẽ có được dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases}\sqrt{1-2y-x^2}=-y-1\\ \sqrt{1+2x-y^2}=x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1, y\le -1\\ 1-2y-x^2=y^2+2y+1\\ 1+2x-y^2=x^2-2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1, y\le -1\\ x^2+y^2+4x=0\\ x^2+y^2-4x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1, y\le -1\\ y=-x\\ x^2+y^2-4x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1, y\le -1\\ y=-x\\ x^2-2x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1, y\le -1\\ y=-x\\ x=0\vee x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-2\end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(2;-2)$.

Bình luận : Bài toán sử dụng đánh giá khi kết hợp cả hai phương trình lại với nhau. Một điểm lưu ý rằng những dạng hệ mà có kết cấu đánh giá kết hợp cả hai phương trình lại với nhau thường chia làm hai trường phái đó là cộng (trừ) rồi mới đánh giá hoặc đánh giá trên từng phương trình rồi mới cộng (trừ) đưa ra đánh giá cuối cùng. Để nhận biết kiểu hệ này thường ta dựa trên các phép toán kết hợp giữa các đại lượng có trong từng phương trình trong hệ hoặc trên từng phương trình trong hệ có các dấu hiệu sử dụng được các đánh giá cơ bản và thông qua các đánh giá này ta chưa kết luận được gì thì lúc này dấu hiệu kết hợp các đánh giá là hầu như rất khả quan, loại hệ giải theo hướng này chúng tôi đã có một ví dụ đó chính là ví dụ 19.

Ví dụ 29 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x-y+4}\left(\sqrt{x-y+2}+2\sqrt{y-x}\right)=3\sqrt{3}\\ x^3+\sqrt{2x-1}=2-\sqrt{y-2}\end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích : Với cấu trúc hệ này, chúng ta không thể xuất phát từ phương trình thứ hai trong hệ được vì các đại lượng hầu như không liên quan gì đến với nhau. Do đó chúng ta sẽ chuyển trọng tâm sang phương trình thứ nhất trong hệ. Hãy để ý rằng tuy phương trình thứ nhất chứa x,y thuần nhất nhưng ta không đặt được ẩn phụ để làm gọn phương trình vì có chứa hê số. Với cấu trúc này chúng ta có lẻ phương án có thể làm được mà dễ nghỉ đến nhất đó là liên hiệp. Muốn sử dụng được liên hiệp ta cần đoán được mối liên quan giữa hai biến x,y để thoát căn và làm cho hai vế bằng nhau. Không khó để dự đoán được mối quan hệ đó chính là $x-y+1=0\Leftrightarrow y=x+1$. Và đặc biệt để liên hiệp được với cấu trúc này có lẻ dự trù phương án liên hiệp giả định kéo theo là có tí khả quan, tuy nhiên do các đại lượng tham gia trong căn thức không giúp chúng ta nhìn nhận được gì rõ ràng cái gì chung và khả năng liên hiệp giả định kéo theo ắt sẽ cho những phép tính rắc rối về sau. Do đó với nhận định được mối quan hệ giữa hai biến x,y thì ta có thể nghỉ đến đánh giá. Nhưng để dùng được đánh giá ta cần phải chọn xem đại lượng tham gia đánh giá là những đại lượng nào và cấu trúc sắp xếp ra sao để có được đánh giá thành công. Muốn có được điều này ta cần thực hiện các bước giả định sau khi cho $y=x+1$.

⊕ Khi cho $y=x+1\Rightarrow\sqrt{x-y+2}=1$.

⊕ Khi cho $y=x+1\Rightarrow 2\sqrt{y-x}=2$.

Vậy là ta có : $\sqrt{x-y+2}=\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{y-x}}{\sqrt{2}}$. Từ nhận định này ta sẽ đẩy ý tưởng đánh giá bằng bất đẳng thức B.C.S cho tổng trong tích ở vế trái phương trình thứ nhất. Cụ thể ta có :

$$\sqrt{x-y+2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2(y-x)}\le\sqrt{(1+2)(x-y+2+2y-2x)}=\sqrt{3(y-x+2)}$$

Tới đánh giá này chúng ta vẫn chưa thu được gì rốt ráo. Tuy nhiên ta lại có nhận xét sau khi cho $y=x+1\Rightarrow\sqrt{x-y+4}=\sqrt{y-x+2}$.

Vì sau khi đánh giá bước 1 ta còn lại tích ở dạng $\sqrt{ab}$ nên ta sẽ tiếp tục xử lí tiếp đánh giá bằng bất đẳng thức AM-GM.

Cụ thể ta có : $\sqrt{x-y+4}\cdot\sqrt{y-x+2}\le\dfrac{x-y+4+y-x+2}{2}=3$.

Và với hai bước đánh giá ta đã có được: $\sqrt{x-y+4}\left(\sqrt{x-y+2}+2\sqrt{y-x}\right)\le 3\sqrt{3}$

Như vậy hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện: $\begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ y \geq 2 \\ -2 \leq x - y \leq 0 \end{cases}$.

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S ta có :

$$\sqrt{x-y+2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2(y-x)} \leq \sqrt{(1+2)(x-y+2+2y-2x)} = \sqrt{3(y-x+2)}$$

Do đó ta có :

$$\sqrt{x-y+4}\left(\sqrt{x-y+2} + 2\sqrt{y-x}\right) \leq \sqrt{3}\left(\sqrt{y-x+2} \cdot \sqrt{x-y+4}\right) \ (1)$$

Mặt khác từ điều kiện : $-2 \leq x - y \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y - x \leq 2 \Rightarrow y - x + 2 > 0$.

Do đó áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có :

$$\sqrt{y-x+2} \cdot \sqrt{x-y+4} \leq \frac{y-x+2+x-y+4}{2} = 3 \ (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta có được : $\sqrt{x-y+4}\left(\sqrt{x-y+2} + 2\sqrt{y-x}\right) \leq 3\sqrt{3}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi dấu đẳng thức ở các đánh giá $(1),(2)$ xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-y+2} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{y-x}}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{x-y+4} = \sqrt{y-x+2} \end{cases} \Leftrightarrow y = x + 1$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$x^3 + \sqrt{2x-1} = 2 - \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^3 - 1 + \sqrt{2x-1} - 1 + \sqrt{x-1} = 0 \ (x \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\underbrace{\left(\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x-1} + \frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}+1} + 1\right)}_{P} = 0$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$ vì $P > 0, \forall x \geq 1$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ đã cho là $(x, y) = (1; 2)$.

Bình luận : Bài toán này là một bài toán khá hay, tư tưởng đi đến lời giải đã được chúng tôi phân tích qua đó các bạn nhận thấy rằng từ những suy nghĩ cho những đường lối cơ bản rồi từ đó đưa ra các khó khăn gặp phải để từ đó tiến tới lựa chọn phương án phù hợp. Bài toán là sự nhận diện đánh giá bởi hai bất đẳng thức hết sức quen thuộc và việc phát hiện ra mối quan hệ giữa hai biến đã quyết định hoàn toàn đến cục diện của lời giải bài toán này.

Ví dụ 30 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3(x-y-1)\sqrt{x^2-y^2+9} = y(y-x) - 3 \\ 10y\sqrt{10-x^2} = x - y - 94 \end{cases} \ (x, y \in \mathbb{R})$$

Phân tích : Với hệ này, cấu trúc phương trình gợi ảnh đánh giá rất rõ ràng. Ở cả hai phương trình trong hệ đều gợi đến hình ảnh đánh giá quen thuộc mà ta thường dùng trong loại này đó là $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}, \forall a,b \in \mathbb{R}$.

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta áp dụng đánh giá này ta có :

$$3(x-y-1)\sqrt{x^2-y^2+9} \le \frac{(x-y-1)^2+9(x^2-y^2+9)}{2}.$$

Từ đó ta có : $2y^2-2xy-6 \le x^2+y^2+1-2xy-2x+2y+9x^2-9y^2+81$

$$\Leftrightarrow 5(x^2-y^2)-(x+y)+44 \ge 0.$$

Tiếp đến ta đánh giá cho phương trình thứ hai dựa trên đánh giá có được từ phương trình thứ nhất.

Ta có : $10y\sqrt{10-x^2} \le 10\left(\frac{y^2+10-x^2}{2}\right) = 5y^2+50-5x^2$.

Do đó ta có : $x-y-94 \le 5y^2+50-5x^2 \Leftrightarrow 5(x^2-y^2)+(x-y)-144 \le 0$.

Đánh giá này hoàn toàn không có lợi cho chúng ta vì với hai đánh giá đã có chúng ta những vấn đề không liên quan. Vậy là ở phương trình thứ hai chúng ta không thể sử dụng đánh giá của phương trình thứ nhất vào được, tuy nhiên hình thức vẫn là dạng ab ở vế trái nên ta có thể liên tưởng đến đánh giá thông qua hằng đẳng thức và cũng phải dựa trên nền đánh giá đã có ở bước đầu.

Cụ thể ta sẽ tách phương trình thứ hai về dạng phương trình :

$$5\left(y^2+2y\sqrt{10-x^2}+10-x^2\right) = -5x^2+5y^2+x-y-44$$

$$\Leftrightarrow 5\left(y+\sqrt{10-x^2}\right)^2 = -5(x^2-y^2)+x-y-44.$$

Từ đây ta có : $-5(x^2-y^2)+x-y-44 \ge 0 \Leftrightarrow 5(x^2-y^2)-(x-y)+44 \le 0$.

Và lúc này đã có : $\begin{cases} 5(x^2-y^2)-(x-y)+44 \ge 0 \\ 5(x^2-y^2)-(x+y)+44 \le 0 \end{cases}$, như thế phép đánh giá đã công và hệ đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x^2-y^2+9 \ge 0 \\ 10-x^2 \ge 0 \end{cases}$.

Sử dụng đánh giá $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}, \forall a,b \in \mathbb{R}$. Ta có :

$$3(x-y-1)\sqrt{x^2-y^2+9}\le\frac{(x-y-1)^2+9\left(x^2-y^2+9\right)}{2}.$$

Từ đó ta có : $2y^2-2xy-6\le x^2+y^2+1-2xy-2x+2y+9x^2-9y^2+81$

$$\Leftrightarrow 5\left(x^2-y^2\right)-(x+y)+44\ge 0\ (1).$$

Mặt khác từ phương trình thứ hai ta có được biến đổi :

$$5\left(y^2+2y\sqrt{10-x^2}+10-x^2\right)=-5x^2+5y^2+x-y-44$$

$$\Leftrightarrow 5\left(y+\sqrt{10-x^2}\right)^2=-5\left(x^2-y^2\right)+x-y-44.$$

Từ đây ta có : $-5\left(x^2-y^2\right)+x-y-44\ge 0\Leftrightarrow 5\left(x^2-y^2\right)-(x-y)+44\le 0\ (2)$

Từ $(1),(2)$ ta có :

$$\begin{cases}x-y-1=3\sqrt{x^2-y^2+9}\\ y=-\sqrt{10-x^2}\\ 5\left(x^2-y^2\right)-(x-y)+44=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1+\sqrt{10-x^2}=3\sqrt{2x^2-1}\\ y=-\sqrt{10-x^2}\\ 5\left(x^2-y^2\right)-(x-y)+44=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}10-x^2=9\left(2x^2-1\right)+6(1-x)\sqrt{2x^2-1}+(1-x)^2\\ y=-\sqrt{10-x^2}\\ 5\left(x^2-y^2\right)-(x-y)+44=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(1-x)(10x+9)=3(1-x)\sqrt{2x^2-1}\\ y=-\sqrt{10-x^2}\\ 5\left(x^2-y^2\right)-(x-y)+44=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}1-x=0\\ 10x+9=3\sqrt{2x^2-1}\end{array}\right.\\ y=-\sqrt{10-x^2}\\ 5\left(x^2-y^2\right)-(x-y)+44=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\ \begin{cases}10x+9\ge 0\\ 41x^2+90x+45=0\end{cases}\end{array}\right.\\ y=-\sqrt{10-x^2}\\ 5\left(x^2-y^2\right)-(x-y)+44=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{-45+6\sqrt5}{41}\end{array}\right.\\ y=-\sqrt{10-x^2}\\ 5\left(x^2-y^2\right)-(x-y)+44=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-3\end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện và thử lại ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(1;-3)$.

Bình luận : Đây là một bài toán tư tưởng đánh giá đã rõ nhưng thực hiện đánh giá bằng cách nào có lợi thì lại khó. Tuy nhiên trên phương diện định dạng chung ở vế trái của mỗi phương trình vẫn cho chúng ta những lối đi đánh gia quen thuộc. Về bình diện chung thì cả hai phương trình trong hệ vẫn có thể sử dụng hằng đẳng thức để đánh giá toàn bài cũng được. Quan trọng ở đây là chúng ta cần chọn đại lượng đánh giá sao cho hợp lí và hiệu quả.

Vi dụ 32 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x+2}+\sqrt{3(2y-2)}=(x+5y)\sqrt{x+2y}\\(y-1)\sqrt{x-2y+8}=(y-3)\sqrt{x+2y}\end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Phân tích : Với hệ này ta nhận thấy tuy toàn bộ hệ chứa rất nhiều căn thức nhưng cả hai phương trình trong hệ đều chứa $\sqrt{x+2y}$ nên theo lẻ tự nhiên ta sẽ xét hai trường hợp cho đại lượng trong căn thức này.

Nếu $x+2y=0$ thì hệ sẽ trở thành : $\begin{cases}\sqrt{x+2}+\sqrt{3(2y-2)}=0\\(y-1)\sqrt{x-2y+8}=0\end{cases}$.

Với hệ này không có gì khó để giải quyết.

Nếu $x+2y>0$ thì từ phương trình thứ nhất ta để ý thấy được rằng :

$$x+2+2y-2=x+2y.$$

Từ đây ta đẩy ý tưởng sử dụng bất đẳng thức B.C.S để đánh giá cho phương trình thứ nhất.

Ta có : $\sqrt{x+2}+\sqrt{3(2y-2)}\le\sqrt{(1+3)(x+2+2y-2)}=2\sqrt{x+2y}$.

Từ đây ta có: $(x+5y)\sqrt{x+2y}\le 2\sqrt{x+2y}\Leftrightarrow x+5y\le 2$.

Mặt khác từ phương trình thứ hai trong hệ ta có phép biến đổi sau :

$$\frac{y-3}{y-1}=\sqrt{\frac{x-2y+8}{x+2y}}.$$

Sử dung bất đẳng thức AM- GM ta có đánh giá sau :

$$\sqrt{\frac{x-2y+8}{x+2y}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x-2y+8}{x+2y}+1\right)=\frac{x+4}{x+2y}.$$

Từ đây ta có : $\dfrac{y-3}{y-1}\ge\dfrac{x+4}{x+2y}\Leftrightarrow(y-3)(x+2y)\ge(x+4)(y-1)$

$\Leftrightarrow x+5y\ge y^2+2\ge 2\Rightarrow x+5y\ge 2$.

Với đánh giá này thì xem như trường hợp $x+2y>0$ cũng đã được giải quyết.

Lời giải : Điều kiện : $\begin{cases} x \ge -2 \\ y \ge 1 \\ x - 2y + 8 \ge 0 \end{cases}$.

Trường hợp 1 : $x + 2y = 0$. Lúc đó hệ phương trình đã cho trở thành hệ :

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{3(2y-2)} = 0 \\ (y-1)\sqrt{x-2y+8} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-1=0 \\ \sqrt{x+2} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2y-8 \\ \sqrt{2y-6} + \sqrt{3(2y-2)} = 0 \end{cases} (\text{vn}) \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -2 \end{cases}$ (thỏa).

Trường hợp 2 : $x + 2y > 0, y > 1$. Khi đó phương trình thứ hai được biến đổi thành phương trình : $\dfrac{y-3}{y-1} = \sqrt{\dfrac{x-2y+8}{x+2y}}$.

Sử dung bất đẳng thức AM- GM ta có đánh giá sau :

$$\sqrt{\frac{x-2y+8}{x+2y}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x-2y+8}{x+2y} + 1\right) = \frac{x+4}{x+2y}.$$

Từ đây ta có : $\dfrac{y-3}{y-1} \ge \dfrac{x+4}{x+2y} \Leftrightarrow (y-3)(x+2y) \ge (x+4)(y-1)$

$\Leftrightarrow x + 5y \ge y^2 + 2 \ge 2 \Rightarrow x + 5y \ge 2 \ (*)$

Mặt khác từ phương trình thứ nhất áp dụng bất đẳng thức B.C.S

Ta có : $\sqrt{x+2} + \sqrt{3(2y-2)} \le \sqrt{(1+3)(x+2+2y-2)} = 2\sqrt{x+2y}$.

Từ đây ta có : $(x+5y)\sqrt{x+2y} \le 2\sqrt{x+2y} \Leftrightarrow x + 5y \le 2 \ (*)$.

Từ (*), (*) suy ra hệ đã cho tương đương với hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 3\dfrac{x+2}{x+2y} = \dfrac{2y-2}{x+2y} \\ \dfrac{x-2y+8}{x+2y} = 1 \\ y = 0 \\ x + 5y = 2 \end{cases} \quad (\text{ hệ vô nghiệm}).$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x, y) = (-2; 1)$.

Bình luận : Bài toán dựa trên tính chất nhân tử chung của cả hai phương trình và xét từng trường hợp. Các đánh giá có được trong bài toán là những đánh giá quen thuộc thường gặp.

CHƯƠNG II. SUY LUẬN TÌM LỜI GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG KỸ NĂNG ĐẶC BIỆT HÓA

Trong toán học cũng như trong đời sống chúng ta, có những khẳng định khá thú vị, đó là: Nếu một khẳng định hay một quy luật nào đó đúng với mọi trường hợp thì nó cũng đúng với những trường hợp riêng lẻ. Tuy nhiên điều ngược lại chưa chắc đã xảy ra.

Trong cuộc sống, chúng ta rất ít bắt gặp điều gì đó đúng với mọi trường hợp, nhưng chúng ta lại tìm thấy những sự giống nhau kì lạ giữa những trường hợp riêng lẻ nào đó.

Trong khoa học mà đơn cử là những chương trình dự báo thời tiết, dự báo bão… người ta đã sử dụng tư duy đặc biệt hóa trong toán học một cách rất hiệu quả.

Họ đo đạc, tính toán cho những trường hợp riêng lẻ rồi bằng sự suy luận, dự đoán và những công cụ hỗ trợ khác, họ tìm được hay dự báo được một quy luật nào đó của tự nhiên.

Bài toán Hệ phương trình là một bài toán khó, hiện nay đa số các bạn học sinh đều giải quyết nó dựa vào kinh nghiệm bản thân thông qua việc giải nhiều bài tập mà chưa thực sự có một hướng phân tích hay dự báo nào cho việc giải toán Do vậy trong cuốn sách này, tôi dành hẳn một chương với mong muốn sẽ giúp các bạn tìm ra một hướng đi bằng những suy luận và dự báo khi đứng trước một hệ phương trình.

A. TÌM MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC BIẾN TRÊN MỘT PHƯƠNG TRÌNH CỦA HỆ.

I. Hệ phương trình chứa đa thức bậc hai khả quy.

Bài toán 1.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2+10x+6=y^2+y & (1) \\ x^3-2xy+y^2=9 & (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích.

Sử dụng phép thử các giá trị đặc biệt lên phương trình (1), ta có:

+) Cho $x=0\Rightarrow y^2+y-6=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-3 \end{array}\right.$

Ta nhận được $(x;y)=\{A_1(0;2),\ A_2(0;-3)\}$

+) Cho $y=0\Rightarrow 2x^2+5x+3=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Ta nhận được $(x;y)=\left\{B_1(-1;0),B_2\left(-\dfrac{3}{2};0\right)\right\}$

+ Cho $x=1\Rightarrow y^2+y-20=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=4\\y=-5\end{array}\right.$

Ta nhận được $(x;y)=\{C_1(1;4),C_2(1;-5)\}$

Suy luận và dự đoán. *Do phương trình (1) là một đa thức bậc 2, do vậy nếu (1) phân tích được thì nó là tích của các đa thức bậc nhất. Lúc đó ta có các phương trình đường thẳng:*

$A_1B_1: 2x-y+2=0,\ A_1B_2: 4x-3y+6=0,$

$A_2B_1: 3x+y+3=0,\ A_2B_2: 2x+y+3=0$

Ta nhận thấy điểm $C_1\in(A_1B_1)$, nên ta dự đoán mối liên hệ của các biến x, y trong phương trình (1) là $y = 2x + 2$.

Lời giải. Đặt 2x + 2 = a, thay vào PT(1) cho ta:

$$(a-2)^2+5(a-2)+6=y^2+y\Leftrightarrow a^2+a=y^2+y\Leftrightarrow(a-y)(a+y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=y\\a+y+1=0\end{array}\right.$$

+) Với $a=y\Rightarrow y=2x+2$ thay vào (2) ta được $x^3+4x-5=0\Leftrightarrow x=1$. Trong trường hợp này hệ đã cho có nghiệm (x;y) = (1;4).

+) Với a + y = 1 $\Rightarrow$ y = -2x – 3 thay vào (2) ta được $x^3+8x^2+18x=0\Leftrightarrow x=0$. Trong trường hợp này hệ đã cho có nghiệm (x;y) = (0;-3)

Vậy nghiệm của hệ đã cho là (x;y) = {(0;-3);(1;4)}

Bình luận.

Nhận thấy đa thức ở phương trình (1) là đa thức bậc hai, do vậy ta dễ dàng kiểm chứng đa thức đó có khả quy hay không nhờ kỹ thuật Đen-ta chính phương:

Viết lại phương trình (1) thành $4x^2+10x-y^2-y+6=0\ (*)$. *Xem x là ẩn số, y là tham số ta có* $\Delta'_x=25+4(y^2+y-6)=(2y+1)^2$

Khi đó nghiệm của phương trình (*) là $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-10+\sqrt{\Delta'_y}}{4}=\dfrac{y-2}{2}\\x=\dfrac{-10-\sqrt{\Delta'_y}}{4}=\dfrac{-y-3}{2}\end{array}\right.$

Bài toán 2.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x^2-3xy+3y^2-9x+3y+4=0 & (1)\\3y^2-6xy+2x-10y+3=0 & (2)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích.

- Xét phương trình (1):

+) Cho $x=0\Rightarrow 3y^2+3y+4=0$ (Vô nghiệm)

Suy luận và dự đoán: *Nếu đa thức (1) đưa được về dạng tích, chứng tỏ nó là tích các bậc nhất. Vì thế với các trường hợp $x=0$ (hoặc $y=0$) ta thường nhận được các giá trị hữu tỷ của y (hoặc x). Vì vậy ta dự đoán (1) không có dạng tích.*

- Xét phương trình (2):

+) Cho $x=0\Rightarrow 3y^2-10y+3=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Ta nhận được các giá trị của cặp $(x;y)=\left\{A_1(0;3),\ A_2\left(0;\frac{1}{3}\right)\right\}$

+) Cho $y=0\Rightarrow 2x+3=0\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

Ta nhận được $(x;y)=B_1\left(-\frac{3}{2};0\right)$

+) Cho y = 1 $\Rightarrow$ x = -1. Ta nhận được $(x;y)=C_1(-1;1)$.

Suy luận và dự đoán. *Đa thức (2) là đa thức bậc hai, do vậy nếu nó khả quy ta dự đoán nó là tích các bậc nhất. Lúc đó:*

$A_1B_1: 2x-y+3=0;\ A_2B_1: 2x-9y+3=0$

Nhận thấy $C_1\in(A_1B_1)$ nên ta dự đoán mối quan hệ giữa các biến x, y là y = 2x + 3.

Lời giải. Đặt a = 2x + 3, thay vào (2) ta có:

$$3y^2-3ay-y+a=0\Leftrightarrow(a-y)(3y-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=y \\ 3y=1 \end{array}\right.$$

+) Với $3y-1=0\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}$, thay vào phương trình (1) ta có :

$$3x^2-10x+\frac{16}{3}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{3} \\ x=\frac{8}{3} \end{array}\right..$$

Trong trường hợp này hệ ban đầu có các nghiệm $(x;y)=\left\{\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right),\left(\frac{8}{3};\frac{1}{3}\right)\right\}$.

+) Với a = y $\Rightarrow$ y = 2x + 3 thay vào phương trình (1) ta được phương trình $15x^2+27x+31=0$ (Vô nghiệm).

Kết luận. Hệ ban đầu có nghiệm $(x;y)=\left\{\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right),\left(\frac{8}{3};\frac{1}{3}\right)\right\}$.

Bài toán 3.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}6x^2+x+4y=3y^2+7xy+1 & (1)\\ x^2+y^2+2=x(y-4)+3y & (2)\end{cases}$ $(x,y\in R)$

Phân tích.

Sử dụng phép thử các giá trị đặc biệt lên phương trình (1), ta có :

+) Cho $x=0\Rightarrow 3y^2-4y+1=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\ y=\frac{1}{3}\end{array}\right.$

Ta nhận được các giá trị $(x;y)=\left\{A_1(0;1),\ A_2\left(0;\frac{1}{3}\right)\right\}$

+) Cho $y=0\Rightarrow 6x^2+x-1=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}\\ x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Ta nhận được các giá trị $(x;y)=\left\{B_1\left(\frac{1}{3};0\right),B_2\left(-\frac{1}{2};0\right)\right\}$

+) Cho $x=1\Rightarrow y^2+y-2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\ y=-2\end{array}\right.$

Ta nhận được các giá trị $(x;y)=\{C_1(1;1),C_2(1;-2)\}$

Suy luận và dự đoán.

Ta có phương trình các đường thẳng:

$A_1B_1: 3x+y-1=0;\ A_1B_2: 2x-y+1=0$

$A_2B_1: 3x+3y-1=0;\ A_2B_2: 2x-3y+1=0$

Nhận thấy $C_2\in(A_1B_1)$, ta dự đoán mối quan hệ giữa các biến x, y là

$3x+y-1=0\Rightarrow y=1-3x$

Lời giải: Đặt a = 1 – 3x, thay vào phương trình (1) cho ta:

+) Với a = y ⇒ y = 1 – 3x thay vào (2) ta được $13x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{6}{13}\\ x=0\end{array}\right.$.

Trong trường hợp này hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left\{\left(-\frac{6}{13};\frac{31}{13}\right),(0;1)\right\}$.

+) Với $9y+2a-5=0\Rightarrow y=\dfrac{2x+1}{3}$ thay vào (2) ta được

$$7x^2+19x+10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-\dfrac{5}{7}\end{array}\right..$$

Trong trường hợp này hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left\{(-2;-1),\left(-\dfrac{5}{7};-\dfrac{1}{7}\right)\right\}$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=\left\{(-2;-1),\left(-\dfrac{5}{7};-\dfrac{1}{7}\right),\left(-\dfrac{6}{13};\dfrac{31}{13}\right),(0;1)\right\}$.

Bài toán 4.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{y}=2 & (1)\\ x^2-y^2+3x+y=-2 & (2)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Xét phương trình (2):

+) Cho $x=0\Rightarrow y^2-y-2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1\\y=2\end{array}\right.$

Ta nhận được các giá trị $(x;y)=\{A_1(0;-1),\ A_2(0;2)\}$.

+) Cho $y=0\Rightarrow x^2+3x+2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-2\end{array}\right.$

Ta nhận được các giá trị $(x;y)=\{B_1(-1;0),B_2(-2;0)\}$

+) Cho $y=1\Rightarrow x^2+3x+2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-2\end{array}\right.$

Ta nhận được các giá trị $(x;y)=\{C_1(-1;1),C_2(-2;1)\}$.

Suy luận và dự đoán.

Ta có các phương trình đường thẳng:

$A_1B_1: x+y+1=0; A_1B_2: x+2y+2=0$

$A_2B_1: 2x-y+2=0;\ A_2B_2: x-y+2=0$

Nhận thấy $C_2\in(A_1B_1)$, ta dự đoán mối quan hệ giữa các biến x, y là $x+y+1=0$

Lời giải: Điều kiện $\begin{cases}y\ge 0\\x\ge -1\end{cases}$

Đặt a = -x - 1, thay vào (2) ta được: $a^2-y^2-a+y=0\Leftrightarrow(a-y)(y+a-1)=0$

+) Với a = y ⇒ x + y + 1 = 0 ⇒ $\sqrt{-y}+\sqrt{y}=2$ (vô nghiệm)

+) Với y + a – 1 = 0 ⇒ y = x + 2 thế vào phương trình (1) ta có:

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=2\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x+3}-1\right)+\left(\sqrt{x+2}-1\right)+\sqrt{x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x+2}{\sqrt{2x+3}+1}+\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+1}+\sqrt{x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+1}\left(\frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+3}+1}+\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}+1}+1\right)=0\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow y=1$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (x;y) = (-1;1).

Bài toán 5. *(Trích TSĐH khối B – 2013)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0 & (1)\\ 4x^2-y^2+x+4=\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+4y} & (2)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích: Xét phương trình (1):

+) Cho $x=0\Rightarrow y^2-2y+1=0\Rightarrow y=1$

Ta nhận được $(x;y)=A_1(0;1)$

+) Cho $y=0\Rightarrow 2x^2+3x+1=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Ta nhận được các giá trị $(x;y)=\left\{B_1(-1;0),B_2\left(-\frac{1}{2};0\right)\right\}$

+) Cho x = 1 ⇒ $y^2-5y+6=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=2\\ y=3\end{array}\right.$

Ta nhận được các giá trị $(x;y)=\{C_1(1;2),C_2(1;3)\}$.

Suy luận và dự đoán.

Ta có các phương trình đường thẳng:

$A_1B_1: x-y+1=0;\ A_1B_2: 2x-y+1=0$

Nhận thấy $C_1\in(A_1B_1)$, ta dự đoán mối quan hệ của x, y là $x-y+1=0$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases}2x+y\ge 0\\ x+4y\ge 0\end{cases}$

Đặt a = x + 1, thay vào (1) cho ta:

$$2a^2+y^2-3ay+y-a=0\Leftrightarrow(a-y)(2a-y-1)=0$$

+) Với a = y ⇒ y = x + 1, thay vào (2) ta được $3x^2-x+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}$

$$\Leftrightarrow 3(x^2-x)+(x+1-\sqrt{3x+1})+(x+2-\sqrt{5x+4})=0$$

$$(x^2-x)\left(3+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right)=0$$

Do $3+\dfrac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\dfrac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}>0,\forall x\ge\dfrac{1}{3}$

Nên phương trình tương đương $x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=1\\x=1\Rightarrow y=2\end{array}\right.$

+) Với $2a-y=1\Rightarrow\ y=2x+1$, thay vào (2) ta được

$$3-3x=\sqrt{4x+1}+\sqrt{9x+4}\Leftrightarrow 3x+\left(\sqrt{4x+1}-1\right)+\left(\sqrt{9x+4}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x+\frac{4x}{\sqrt{4x+1}+1}+\frac{9x}{\sqrt{9x+4}+2}=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(3+\frac{4}{\sqrt{4x+1}+1}+\frac{9}{\sqrt{9x+4}+2}\right)=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=1$$

Đối chiếu điều kiện thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình là $(x;y)=\{(0;1),(1;2)\}$.

NHẬN XÉT.

Với một đa thức bậc hai, ta có thể dễ dàng kiểm chứng nó là khả quy hay bất khả quy nhờ kỹ thuật Delta chính phương. Tuy nhiên với kỹ năng đặc biệt hóa chúng ta lại có thêm một các nhìn nhận mới về cách đưa một đa thức bậc hai về dạng tích và quan trọng hơn nó sẽ giúp chúng ta giải quyết những bài toán khó hơn sẽ nêu sau đây.

II. Hệ phương trình chứa đa thức bậc cao khả quy.

Bài toán 6.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-y^3+3x^2+4=3(y-2x) & (1)\\ x^4-4y^2+8(x+y)=0 & (2)\end{cases}\ (x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích: Xét phương trình (1):

+) Cho $x=0\Rightarrow y^3+3y-4=0\Rightarrow y=1$

Ta nhận được $(x, y) = A_1(0;1)$

+) Cho $y=0\Rightarrow x^3+3x^2+6x+4=0\Rightarrow x=-1$

Ta nhận được $(x, y) = B_1(-1;0)$

+) Cho $x=1\Rightarrow y^3+3y-14=0\Rightarrow y=2$

Ta nhận được $(x,y) = C_1(1;2)$

Suy luận và dự đoán.

Phương trình (1) chứa đa thức bậc 3, nếu nó khả quy nó có thể là tích của một đa thức bậc 2 và một đa thức bậc nhất.

Phương trình đường thẳng $A_1B_1: x - y + 1 = 0$

Nhận thấy $C_1 \in (A_1B_1)$, từ đó ta dự đoán mối quan hệ giữa x, y là x – y + 1 = 0

Lời giải: Đặt a = x + 1, thay vào (1) cho ta:

$$a^3 - y^3 + 3(a - y) = 0 \Leftrightarrow (a - y)\left(a^2 + ay + y^2 + 3\right) = 0 \Leftrightarrow a = y$$

+) Với a = y ⇒ y = x + 1 thế vào (2) ta được

$$x^4 - 4x^2 + 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^4 - (2x - 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 2x - 2)(x^2 - 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 - \sqrt{3} \Rightarrow y = -\sqrt{3} \\ x = -1 + \sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = \left\{(-1 - \sqrt{3}; -\sqrt{3}), (-1 + \sqrt{3}; \sqrt{3})\right\}$.

Bài toán 7.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2(y^3 - x^3) = 6x^2 + 7x - y + 3 & (1) \\ 4\sqrt{3 - y} + 2\sqrt{2(1 + y)} = \sqrt{9x^2 + 16} & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Xét phương trình (1):

+) Cho $x = 0 \Rightarrow 2y^3 + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1$

Ta nhận được $(x; y) = A_1(0; 1)$

+) Cho $y = 0 \Rightarrow 2x^3 + 6x^2 + 7x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1$

Ta nhận được $(x; y) = B_1(-1; 0)$.

+) Cho $x = 1 \Rightarrow 2y^3 + y - 18 = 0 \Rightarrow y = 2$

Ta nhận được $(x; y) = C_1(1; 2)$

Suy luận và dự đoán.

Phương trình đường thẳng $A_1B_1: x - y + 1 = 0$

Nhận thấy $C_1 \in (A_1B_1)$ nên ta dự đoán mối quan hệ giữa x,y là x – y + 1 = 0

Lời giải. Điều kiện $-1 \le y \le 3$

Đặt a = x + 1, thay vào (1) cho ta

$$2\left(y^3 - a^3\right) + (y - a) = 0 \Leftrightarrow (y - a)\left(2y^2 + 2ya + 2a^2 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow a = y$$

Với a = y ⇒ y = x + 1 thế vào (2) ta được $4\sqrt{2 - x} + 2\sqrt{2(2 - x)} = \sqrt{9x^2 + 16}$

Điều kiện -2≤ x ≤ 2 bình phương hai vế ta có

$32 + 16\sqrt{8-2x^2} - 9x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow 4(8-2x^2) + 16\sqrt{8-2x^2} - x^2 - 8x = 0$

Đặt $t = 2\sqrt{8-2x^2}$ $(t \geq 0)$

Phương trình trở thành $t^2 + 8t - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = x \\ t + x + 8 = 0 \quad \text{VN}(-2 \leq x \leq 2) \end{array}\right.$

$2\sqrt{8-2x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \dfrac{32}{9} \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) = \left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3}; \dfrac{3+4\sqrt{2}}{3}\right)$.

Bài toán 8.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)(x+y+y^2) = x(y+1) & (1) \\ 5\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x+1} = 3y - 5\sqrt{y} + 2 & (2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích: Xét phương trình (1):

+) Cho $x = 0 \Rightarrow y^2(1+y) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -1 \end{array}\right.$

Ta nhận được $(x;y) = \{A_1(0;0), A_2(0;-1)\}$

+) Cho $y = 0 \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Ta nhận được $(x;y) = B_1(1;0)$

+) Cho $y = 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Ta nhận được $(x;y) = \{C_1(-1;1), C_2(2;1)\}$

Suy luận và dự đoán.

Phương trình các đường thẳng $A_1B_1 : y = 0;$ $A_2B_1 : x - y - 1 = 0$

Ta nhận thấy $C_2 \in A_1B_2$, nên ta dự đoán mối quan hệ giữa x, y là x – y – 1 = 0

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x \geq 1 \end{array}\right. \\ y \geq 0 \end{cases}$

TH1: $x = -1 \Rightarrow y = 1$

TH2: $x \geq 1$:

Đặt a = x – 1, thay vào (1) cho ta:

$$\left(y^3-ay^2+ay-a^2\right)+\left(y-a\right)=0\Leftrightarrow\left(y-a\right)\left(y^2+a+1=0\right)$$

+) Với $a=y\Rightarrow y=x-1$ thế vào phương trình (2) ta có

$$5\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x+1}=3x-1-5\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}+1)+(\sqrt{x+1}+1)=3x \Leftrightarrow (\sqrt{x+1}+1)(5\sqrt{x-1}+1)=3x$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{x-1}+1=3(\sqrt{x+1}-1) \text{ do } x\ge 1$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{x-1}+4=3\sqrt{x+1}\Leftrightarrow 20\sqrt{x-1}=9-8x$$

$$\Leftrightarrow\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{9}{8}\\64x^2-544x+481=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{9}{8}\\x=\dfrac{34\pm15\sqrt{3}}{8}\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{34-15\sqrt{3}}{8}\Rightarrow y=\frac{26-15\sqrt{3}}{8}$$

+) Với $y^2+a+1=0\Rightarrow x+y^2=0$ (loại do $x\ge1$)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left\{(-1;1),\left(\dfrac{34-15\sqrt{3}}{8};\dfrac{26-15\sqrt{3}}{8}\right)\right\}$.

Bài toán 9.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(3+2\sqrt{y^2+4}\right)(6x+5)=16 & (1)\\ y^3-3x\left(y^2-2y+6\right)-18x^2+6y=0 & (2)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích: Xét phương trình (2):

+) Cho $x=0\Rightarrow y=0$

Ta nhận được $(x;y)=A_1(0;0)$

+) Cho $y=0\Rightarrow x^2+x=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$

Ta nhận được $(x;y)=B_1(-1;0)$

+) Cho $y=1\Rightarrow 18x^2+15x-7=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{3}\\x=-\dfrac{7}{6}\end{array}\right.$

Ta nhận được $(x;y)=\left\{C_1\left(\dfrac{1}{3};1\right),C_2\left(-\dfrac{7}{6};1\right)\right\}$

Suy luận và dự đoán.

Phương trình đường thẳng $A_1B_1: y=0$

Nhận thấy các điểm $C_1, C_2 \notin A_1B_1$.

Câu hỏi đặt ra là: *Phải chăng đa thức trên là không khả quy ?*

Ta dự báo rằng, nếu đa thức bậc ba là khả quy nó có thể là tích của một đa thức bậc nhất và một đa thức bậc hai, tuy nhiên việc thử trường hợp y = 0chúng ta nhận được một giá trị giống với trường hợp x = 0, điều đó khiến chúng ta liên tưởng rằng đa thức bậc nhất đó đặc biệt chăng ? (y = kx)

Bây giờ chúng ta sẽ thử trường hợp khác để thay thế cho trường hợp x = 0

+) Cho x = 1 $\Rightarrow$ $y^3-3y^2+12y-36=0 \Rightarrow y=3$

Ta nhận được $(x;y)=D_1(1;3)$.

Ta có các đường thẳng : $A_1B_1: y=0;\ A_1C_1: y=3x;\ A_1C_2: 6x+7y$

Nhận thấy $D_1 \in A_1C_1 \Rightarrow$ ta dự đoán mối quan hệ giữa các biến là y = 3x

Lời giải. Đặt 3x = a, thay vào (2) ta được:

$$\left(y^3-ay^2\right)+\left(2ay-2a^2\right)-6a+6y=0 \Leftrightarrow (y-a)\left(y^2+2a+6\right)=0$$

+) Với y = a $\Rightarrow$ y = 3x ta có phương trình

$$\left(3+2\sqrt{9x^2+4}\right)(6x+5)=16 \Leftrightarrow \left(3+\sqrt{36x^2+16}\right)(6x+5)=16$$

Đặt $t=6x$ khi đó

$$\left(3+\sqrt{t^2+16}\right)(t+5)=16 \Leftrightarrow \left(3+\sqrt{t^2+16}\right)(t+3)+2\left(\sqrt{t^2+16}-5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3+\sqrt{t^2+16}\right)(t+3)+2\frac{t^2-9}{\sqrt{t^2+16}+5}=0$$

$$\Leftrightarrow (t+3)\left(3+\sqrt{t^2+16}+\frac{2t-6}{\sqrt{t^2+16}+5}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{3}{2} \\ 3+\frac{t^2+2t+10+5\sqrt{t^2+16}}{\sqrt{t^2+16}+5}=0\ (VN) \end{array}\right.$$

+) Với $y^2+2a+6=0 \Rightarrow y^2+6x+6=0$

Từ PT(1) có VP > 0 $\Rightarrow$ VT > 0 suy ra $6x+5>0 \Rightarrow y^2+6x+6>0$

Hay trường hợp này không xảy ra.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

Bài toán 10.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2+4y^2+8=x(x+2) & (1) \\ x+y+3=3\sqrt{2y-1} & (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích.

Xét phương trình (1):

+) Cho $x=0 \Rightarrow y^2+2=0$ (VN). Không tồn tại điểm A_1

+) Cho $y=0\Rightarrow x^2+2x-8=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=2\end{array}\right.$

Ta nhận được $(x;y)=\{B_1(-2;0),\ B_2(4;0)\}$

+) Cho $x=1\Rightarrow 5y^2+6=0$ (VN). Không tồn tại điểm C_1

+) Cho $y=1\Rightarrow x^2+x-12=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-4\end{array}\right.$

Suy luận và dự đoán.

Khi cho các giá trị đặc biệt của x, ta nhận thấy A_1, C_1 không tồn tại, điều đó có thể do đa thức bậc nhất này đặc biệt (x = k).

Khi cho các giá trị của y khác nhau, ta đều nhận được giá trị x = -4. Ta dự đoán một nhân tử trong tích đó là (x + 4)

Lời giải. Điều kiện $y\ge\frac{1}{2}$

Từ phương trình (1) ta có :

$$(x+4)y^2-(x+4)(x-2)=0\Leftrightarrow(x+4)\left(y^2-x+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y^2+2\\x=-4\end{array}\right.$$

TH1: x = -4, thế vào phương trình (2) của hệ ta có

$$y-1=3\sqrt{2y-1}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge1\\y^2-20y+10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge1\\y=10\pm3\sqrt{10}\end{cases}\Rightarrow y=10+3\sqrt{10}$$

TH2: $x=y^2+2$, thế vào phương trình (2) của hệ ta có

$$y^2+y+5=3\sqrt{2y-1}\Leftrightarrow y^2-y+\frac{15}{4}+\left(2y-1-3\sqrt{2y-1}+\frac{9}{4}\right)=0$$

$$\left(y^2-y+\frac{15}{4}\right)+\left(\sqrt{2y-1}-\frac{3}{2}\right)^2=0\ \ (VN)$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left(-4;\,10+3\sqrt{10}\right)$.

Bài toán 11. *(Trích TSĐH- Khối A 2012)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y & (1)\\x^2+y^2-x+y=\frac{1}{2} & (2)\end{cases}$

Phân tích.

Xét phương trình (1):

+) Cho $x=0\Rightarrow y^3+3y^2-9y-22=0\Rightarrow y=-2$

Ta nhận được giá trị hữu tỷ $(x;y)=A_1(0;-2)$

+) Cho $y=0\Rightarrow x^3-3x^2-9x+22=0\Rightarrow x=2$

Ta nhận được giá trị hữu tỷ $(x;y)=B_1(2;0)$

+) Cho $x=1\Rightarrow y^3+3y^2-9y-11=0\Rightarrow y=-1$

Ta nhận được giá trị hữu tỷ $C_1(1;-1)$

Suy luận và dự đoán.

Phương trình đường thẳng $A_1B_1: x-y-2=0$. Nhận thấy $C_1\in(A_1B_1)$ do vậy ta dự đoán mối quan hệ giữa x, y là x – y – 2 = 0

Lời giải.

Đặt x – 2 = a, thay vào phương trình (1) ta được $a^3+3a^2-9a=y^3+3y^2-9y$

$\Leftrightarrow(a-y)\left(a^2+ay+y^2+3a+3y-9\right)=0$

+) Với a = y ⇒ y = x – 2 thay vào phương trình (2) ta có:

$$4x^2-8x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x=\frac{3}{2}\end{array}\right.$$

Suy ra $(x;y)=\left\{\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)\right\}.$

+) Với $a^2+ay+y^2+3a+3y-9=0$, thay x = a + 2 vào phương trình (2) ta có hệ:

$$\begin{cases}a^2+ay+y^2+3a+3y-9=0\\a^2+y^2+3a+y+\frac{3}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ay+2y-\frac{21}{2}=0\\a^2+y^2+3a+y+\frac{3}{2}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{21-4y}{2y}\\a^2+3a+\left(\frac{21}{2(a+2)}\right)^2+\left(\frac{21}{2(a+2)}\right)+\frac{3}{2}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{21}{2(a+2)}\\4a^4+28a^3+70a^2+114a+549=0\ (*)\end{cases}$$

Ta có: $4a^2\left(a^2+7a+\frac{49}{4}\right)+\left(21a^2+114a+549\right)>0$ nên (*) vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\left\{\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)\right\}.$

Bình luận.

- Bằng cách thiết lập biệt thức Delta cho phương trình (2), ta có thể tìm điều kiện chặt của các biến như sau :

+) Xem x là ẩn số : $\Rightarrow \Delta_x = 3 - 4\left(y^2 + y\right) \ge 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} \le y \le \frac{1}{2}$

+) Xem y là ẩn số $\Rightarrow \Delta_y = 3 - 4\left(x^2 - x\right) \ge 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{5}{2} \le a \le -\frac{1}{2}$

Lúc đó : $a^2 + ay + y^2 + 3a + 3y - 9 = (a+3)(a+y) + (3y-9) < 0$

Vì $a + 3 > 0,\ a + y \le 0,\ 3y \le \frac{3}{2}$ nên ta dễ dàng loại bỏ trường hợp này.

- Bài toán được giải quyết như lời giải trên để chứng tỏ rằng ta có thể giải quyết trọn vẹn bài toán trên mà không cần sử dụng đến việc tìm điều kiện chặt của các biến. Việc sử dụng máy tính bỏ túi CasiO để giải phương trình bậc 4, các bạn có thể xem ở phụ lục.

Bài toán 12. *(Tạp chí TH&TT – tháng 01 năm 2015)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 + y^3 + 2x^2 + y^2 = xy(2x + 3y + 4) & (1) \\ \dfrac{x^2+1}{y} + \dfrac{y^2+1}{x} = \dfrac{10}{3} & (2) \end{cases}$

Phân tích : Xét phương trình (1):

+) Cho $x = 0 \Rightarrow y^3 + y^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -1 \end{array}\right.$

Ta nhận được $(x;y) = \{A_1(0;0),\ A_2(0;-1)\}$

+) Cho $y = 0 \Rightarrow 2x^3 + 2x^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Ta nhận được $(x;y) = B_1(-1;0)$

+) Cho $x = 1 \Rightarrow y^3 - 2y^2 - 6y + 4 = 0 \Rightarrow y = -2$

Ta nhận được $(x;y) = C_1(1;-2)$

+) Cho $y = 1 \Rightarrow 2x^3 - 7x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Ta nhận được $(x;y) = D_1(-2;1)$

Phân tích và suy luận.

Nhận thấy nếu đa thức bậc ba khả quy, nó có thể chứa một đa thức bậc nhất. Từ đó ta có các phương trình đường thẳng $A_1B_1 : y = 0;\ A_2B_1 : x + y + 1 = 0$

Dễ thấy $C_1, D_1 \in A_2B_1$ nên ta dự đoán mối quan hệ giữa các biến là $x + y + 1 = 0$.

Lời giải. Điều kiện $x, y \neq 0.$

Từ (1) ta có : $2x^3 + y^3 + 2x^2 + y^2 = 4xy(x+y+1) - 2x^2y - xy^2$

$\Leftrightarrow 2x^2(x+y+1) + y^2(x+y+1) - 4xy(x+y+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x+y+1)(2x^2+y^2-4xy) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x+y+1=0 \\ 2x^2+y^2-4xy=0 \end{array}\right.$

+) Với x + y = -1. Kết hợp với phương trình (2) ta tìm được xy = -6

Lúc đó nghiệm của hệ đã cho là $(x;y) = \{(2;-3),(-3;2)\}$

+) Với $4xy = 2x^2 + y^2 \Rightarrow 4xy \geq x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow xy \geq 0$

Kết hợp với phương trình (2) suy ra x, y > 0. Do đó:

$\Rightarrow VT(2) = \frac{x^2+1}{y} + \frac{y^2+1}{x} \geq \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{2x}{y}.\frac{2y}{x}} = 4 > \frac{10}{3} > VP(2)$

Hay trường hợp này không có nghiệm.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y) = \{(2;-3),(-3;2)\}$.

Bài toán 13. *(Trích TSĐH khối A năm 2011)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x+y) = 0 & (1) \\ xy(x^2+y^2) + 2 = (x+y)^2 & (2) \end{cases}$

Phân tích.

Nếu đa thức ở phương trình (1) khả quy, lúc đó do đa thức là bậc hai đối với ẩn x nên biệt thức Δ_x phải chính phương. Ta dễ dàng kiểm chứng nó không có điều này.

Xét phương trình (2):

+) Cho x = 0 ⇒ $y^2 = 2$

+) Cho y = 0 ⇒ $x^2 = 2$

+) Cho $x = 1 \Rightarrow y^3 - y^2 - y + 1 = 0 \Rightarrow y^2 = 1$

Suy luận và dự đoán.

Nhận thấy đa thức ở phương trình (2) có bậc 4, do đó nếu nó khả quy thường là tích của hai đa thức bậc nhất và bậc 3 hoặc là tích của hai đa thức bậc 2.

Với việc xét với các giá trị x – 0, y = 0 chúng ta không nhận được các giá trị hữu tỷ, do vậy ta sẽ loại trừ khả năng nó là tích của một bậc nhất và bậc 3.

Hơn nữa chúng ta lại nhận được $(x^2;y^2) = \{A_1(0;2), B_1(2;0), C_1(1;1)\}$

Lúc đó phương trình đường thẳng $A_1B_1 : X + Y = 2$ và $C_1 \in (A_1B_1)$ trong đó $X = x^2, Y = y^2$. Từ đó ta dự đoán mối quan hệ giữa chúng là $x^2 + y^2 = 2$

Lời giải : Ta có

$$(2)\Leftrightarrow xy\left(x^2+y^2\right)+2=x^2+y^2+2xy\Leftrightarrow\left(x^2+y^2-2\right)\left(xy-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}xy=1\\x^2+y^2=2\end{array}\right.$$

+) Với $xy=1\Rightarrow x=\frac{1}{y}$, thay vào (1) cho ta $y^4-2y^2+1=0\Leftrightarrow y=\pm1$

Ta suy ra các nghiệm $(x;y)=\{(1;1),(-1;-1)\}$.

+) Với $x^2+y^2=2$

$$\begin{cases}x^2+y^2=2\\5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=2\\5x^2y-4xy^2+3y^3-\left(x^2+y^2\right)(x+y)=0\end{cases}$$

Đây là một phương trình đẳng cấp $5x^2y-4xy^2+3y^3-\left(x^2+y^2\right)(x+y)=0$

- Xét y = 0 không phải là nghiệm
- Với $y\neq0$ chia cả hai vế cho y^3 ta được

$$5\left(\frac{x}{y}\right)^2-4\frac{x}{y}+3-\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2+1\right)\left(\frac{x}{y}+1\right)=0$$

Đặt $t=\frac{x}{y}$ khi đó ta được phương trình $t^3-4t^2+5t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=2\end{array}\right.$

- Với $t=1\Leftrightarrow x=y$ suy ra : $(x;y)=(1;1)$ hoặc $(x;y)=(-1;-1)$
- Với $t=2\Leftrightarrow x=2y$ từ $x^2+y^2=2$

Suy ra $(x;y)=\left(\frac{2\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$ hoặc $(x;y)=\left(\frac{-2\sqrt{10}}{5};\frac{-\sqrt{10}}{5}\right)$

Vậy, hệ có nghiệm $(x;y)=\left\{(1;1),\ (-1;-1),\ \left(\frac{2\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5}\right),\ \left(\frac{-2\sqrt{10}}{5};\frac{-\sqrt{10}}{5}\right)\right\}$.

Bài toán 14.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x-y+1}+\sqrt{2-y}=x & (1)\\xy\left(x^2+y-3\right)=(x+1)\left(x^2-2\right)+y. & (2)\end{cases}$

Phân tích : Xét phương trình (2):

+) Cho $x=0\Rightarrow y^2=2$

Trường hợp này cho chúng ta dự đoán, nếu đa thức bậc 4 ở (2) khả quy nó sẽ không đưa về được tích của một đa thức bậc nhất và bậc 3. (Do y không có giá trị hữu tỷ)

+) Cho $y=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^2=2 \end{array}\right.$

+) Cho $x=1 \Rightarrow y^2-3y+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=1 \end{array}\right.$

Trường hợp này chứng tỏ nó không thể là mối quan hệ giữa x^2 và y^2 vì nếu điều đó xảy ra giá trị nhận được của y phải là $y=\pm\alpha$.

+) Cho $y=1 \Rightarrow x^2=1$

Suy luận và dự đoán.

- Đa thức bậc 4 này không là tích của một đa thức bậc nhất và bậc 3.
- Đa thức này không có mối quan hệ giữa x^2, y^2.
- Nhận thấy $(x^2, y)=\{A_1(2;0), B_1(1;1)\}$, như vậy nhiều khả năng xảy ra mối quan hệ giữa x^2 và y. Ta sẽ thử một vài trường hợp khác để kiểm chứng điều này.

+) Cho $y=-1 \Rightarrow 2x^3+x^2-6x-3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ x^2=3 \end{array}\right.$

Ta lại nhận được $(x^2;y)=C_1(3;-1)$

- Khi đó phương trình đường thẳng $A_1B_1: X+Y=2, (X=x^2, Y=y)$ và $C_1 \in A_1B_1$.

Từ đó ta dự đoán mối quan hệ giữa các biến là $x^2+y=2$

Lời giải.

$(2) \Leftrightarrow xy(x^2+y-2)=x^3+x^2-2x-2+y+xy$

$\Leftrightarrow xy(x^2+y-2)=(x^2+y-2)+x(x^2+y-2)$

$\Leftrightarrow (x^2+y-2)(xy-x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y-2=0 \\ xy-x-1=0 \end{array}\right.$

+) Với $x^2+y-2=0 \Rightarrow y=2-x^2$

Thay vào (1) ta được

$\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2}=x \Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(Do từ (1) suy ra điều kiện có nghiệm của phương trình là $x \ge 0$)

+) Với $xy-x-1=0 \Rightarrow y=\frac{x+1}{x}$ thay vào (1) cho ta : $\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}=x$

- Khi $x \in [-1;0)$, phương trình đã cho vô nghiệm.
- Khi $x \ge 1$:

Ta có :

$$\begin{cases} \sqrt{x-\frac{1}{x}} \underset{AM-GM}{\le} \dfrac{1+x-\frac{1}{x}}{2} \\ \sqrt{1-\frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{1}{x}(x-1)} \underset{AM-GM}{\le} \dfrac{\frac{1}{x}+x-1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow VT = \sqrt{x-\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}} \le \frac{1+x-\frac{1}{x}}{2} + \frac{\frac{1}{x}+x-1}{2} = x = VP$$

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2-x-1=0 \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y) = \left\{\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$

NHẬN XÉT.

Như đã nêu ở phần mở đầu: Những cái đúng với một vài trường hợp chưa hẳn đã xảy ra với tất cả các trường hợp. Do đó để có những suy luận mang tính Logic thì việc có thời gian để thử được nhiều giá trị sẽ cho chúng ta đến gần hơn với những phán đoán chính xác.

III. Tìm mối quan hệ giữa các biến với phương trình hai ẩn chứa căn thức.

Bài toán 15.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x^2+3x-y} - \sqrt{4x+y^2} = x+1 & (1) \\ 4\sqrt{2x+1}+x-2y+2=0 & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích.

Dễ dàng nhận ra phương trình (2) không thể có mối quan hệ nào khác giữa các biến vì $(2) \Rightarrow y = \dfrac{4\sqrt{2x+1}+x+2}{2}$

Với phương trình (1):

+) Cho $x=0 \Rightarrow 2\sqrt{-y}-\sqrt{y^2}=1 \Rightarrow y=-1$

Ta nhận được $(x;y) = A_1(0;-1)$

+) Cho $y=0 \Rightarrow 2\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{4x}=x+1 \Rightarrow x=1$

Ta nhận được $(x;y) = B_1(1;0)$

+) Cho $y=1 \Rightarrow 2\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{4x+1}=x+1 \Rightarrow x=2$

Ta nhận được $(x;y) = C_1(2;1)$

Suy luận và dự đoán.

Ta có phương trình đường thẳng $A_1B_1: x-y-1=0$ và điểm $C_1 \in (A_1B_1)$ nên ta dự đoán mối quan hệ giữa các biến là $x-y-1=0$.

Lời giải. Điều kiện $x \ge -\frac{1}{2}$.

Phương trình (2) tương đương $4\sqrt{2x+1}-2(x+y)+3x+2=0$ do $3x+2>0 \Rightarrow x+y>0$.

Mặt khác từ phương trình (1) ta có

$$\left(\sqrt{x^2+3x-y}-\sqrt{4x+y^2}\right)+\left(\sqrt{x^2+3x-y}-x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+3x-y}+\sqrt{4x+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3x-y}+x+1}\right)=0 \quad (*)$$

Do $x \ge -\frac{1}{2} \Rightarrow x+1>0$ và $x+y>0$ nên

$$\frac{x+y}{\sqrt{x^2+3x-y}+\sqrt{4x+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3x-y}+x+1}>0$$

. Vì vậy (*) $\Leftrightarrow y=x-1$

Thế vào phương trình (2) suy ra

$$4\sqrt{2x+1}-x+4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ 16(2x+1)=(x-4)^2 \end{cases} \Rightarrow x=40 \Rightarrow y=39$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(40;39)$.

Lưu ý.

- *Trong việc thử các giá trị, chúng ta thường bắt gặp phương trình vô tỷ, chúng ta không nên trực tiếp giải các phương trình vô tỷ đó vì nó khiến chúng ta mất nhiều thời gian.*
- *Để xử lý các phương trình vô tỷ này ta nên đoán nghiệm: Nghiệm số làm cho giá trị trong căn là số chính phương, hoặc ta có thể sử dụng máy tính bỏ túi CasiO để dò nghiệm (Xem cách sử dụng ở Phụ lục).*

Bài toán 16.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x+1}-\sqrt{2y+1}=y-x & (1) \\ \sqrt[3]{2y^4+10x^2-4x-4}=2y & (2) \end{cases}$ $(x,y \in \mathbb{R})$

Phân tích: Xét phương trình (1):

+) Cho $x=0 \Rightarrow 1-\sqrt{2y+1}=y \Rightarrow y=0$

Ta nhận được $(x;y)=A_1(0;0)$

+) Cho $y=0 \Rightarrow \sqrt{2x+1}=1-x \Rightarrow x=0$

+) Cho $x=1 \Rightarrow \sqrt{3}-\sqrt{2y+1}=y-1 \Rightarrow y=1$

Ta nhận được $(x;y)=B_1(1;1)$

+) Cho $x=2 \Rightarrow \sqrt{5}-\sqrt{2y+1}=y-2 \Rightarrow y=2$

Ta nhận được $(x;y)=C_1(2;2)$

Từ đó ta dự đoán mối quan hệ giữa các biến là $x=y$

Lời giải. Điều kiện $x;y \ge -\frac{1}{2}$

Ta có $(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2y+1}\right)+(x-y)=0 \Leftrightarrow \frac{2(x-y)}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}}+(x-y)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}}+1\right)=0 \Leftrightarrow x=y$

Thế vào phương trình (2) ta được $2x=\sqrt[3]{2x^4+10x^2-4x-4}$

$\Leftrightarrow x^4-4x^3+5x^2-2x-2=0 \Leftrightarrow \left(x^4-4x^3+4x^2\right)+\left(x^2-2x\right)-2=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-2x\right)^2+\left(x^2-2x\right)-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x=1 \\ x^2-2x=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-1=0 \\ x^2-2x+2=0\ \ (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left(1\pm\sqrt{2};1\pm\sqrt{2}\right)$.

Bài toán 17.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-y^2+1=2\left(\sqrt{y}-\sqrt{x+1}-x\right) \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y-3}+x-y=2 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích: Xét phương trình (1):

+) Cho $x=0 \Rightarrow -y^2+1=2\left(\sqrt{y}-1\right) \Rightarrow y=1$

Ta nhận được $(x;y)=A_1(0;1)$.

+) Cho $y=0 \Rightarrow x^2+1=-2\left(\sqrt{x+1}+x\right) \Rightarrow x=-1$

Ta nhận được $(x;y)=B_1(-1;0)$

+) Cho $x=3 \Rightarrow 10-y^2=2\left(\sqrt{y}-5\right) \Rightarrow y=4$

Ta nhận được $(x;y)=C_1(3;4)$

Suy luận và dự đoán.

Phương trình đường thẳng $A_1B_1: x-y+1=0$ và $C_1 \in (A_1B_1)$. Từ đó ta dự đoán

Mối quan hệ giữa các biến là $x-y-1=0$.

Để xử lý phương trình (1) chúng ta có nhiều cách, chẳng hạn:

Cách 1.

+) Hệ không có nghiệm $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

+) Với $\begin{cases} x>-1 \\ y>0 \end{cases}$, ta có:

$$(x+1)^2-y^2+2\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{y}\right)=0 \Leftrightarrow (x+1-y)(x+1+y)+\frac{2(x+1-y)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y}}=0$$

$$(x-y+1)\left[(x+y+1)+\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y}}\right]=0 \Leftrightarrow x-y+1=0$$

Do với điều kiện $\begin{cases} x+1>0 \\ y>0 \end{cases} \Rightarrow (x+y+1)+\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y}}>0$

Cách 2. Từ phương trình (1) ta có $(x+1)^2+2\sqrt{x+1}=y^2+2\sqrt{y}$

Xét hàm số $f(t)=t^2+2\sqrt{t} \quad (t\ge 0) \Rightarrow f'(t)=2t+\dfrac{1}{\sqrt{t}}>0 \ \forall t>0$

Hàm số đồng biến $t\ge 0$, khi đó ta có $f(x+1)=f(y) \Leftrightarrow y=x+1$

Khi $x-y+1=0$ thay vào phương trình (2) ta có:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-2}=5-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 5 \\ x^2-x-2=(5-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=4\ (TM)$$

Vậy, hệ có nghiệm là $(x;y)=(3;4)$.

Bài toán 18.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+3=2\sqrt{(3y-x)(y+1)} & (1) \\ \sqrt{\dfrac{x+5}{2}}+xy=\sqrt{3y-2}+2y+2 & (2) \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích : Nhận thấy phương trình (1) sau khi nâng lên lũy thừa hai vế thì bản chất của PT(1) cũng là một đa thức bậc hai, do vậy ta có thể dễ dàng kiểm chứng nó có khả quy hay không nhờ kỹ thuật Đen-ta chính phương.

Như vậy:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+3\ge 0 \\ (x+3)^2=4(3y-x)(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3\ge 0 \\ (2y-x-1)(x+6y+9)=0 \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x\ge -5 \\ y\ge \dfrac{2}{3} \\ 3y-x\ge 0 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \ge 0 \\ (x+3)^2 = 4(3y-x)(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \ge 0 \\ (2y-x-1)(x+6y+9) = 0 \end{cases}$

Kết hợp điều kiện $\begin{cases} x \ge -3 \\ y \ge \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x+6y+9>0$ nên

$(2y-x-1)(x+6y+9)=0 \Leftrightarrow 2y-x-1=0$

+) Với $x=2y-1$. Thế vào phương trình (2) ta có

$\sqrt{3y-2}-\sqrt{y+2}=2y^2-3y-2 \Leftrightarrow \dfrac{2(y-2)}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}}=(y-2)(2y+1)$

$\Leftrightarrow (y-2)\left[(2y+1)\left(\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}\right)-2\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \Rightarrow x=3 \\ (2y+1)\left(\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}\right)-2=0 \ \ (*) \end{array}\right.$

Theo điều kiện ta có $y \ge \dfrac{2}{3} \Rightarrow (2y+1)\left(\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}\right) \ge \left(\dfrac{4}{3}+1\right)\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}+2}\right)>2$

nên phương trình (*) vô nghiệm

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(3;2)$.

Bài toán 19.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y(x-1)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y} & (1) \\ \left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2y-x+6}\right)\left(\sqrt{2y-1}-3\right)=4 & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Phân tích : Xét phương trình (1) :

+) Cho $x=0 \Rightarrow \sqrt{-y}=y+\sqrt{y} \Rightarrow y=0$

Ta nhận được $(x;y)=A_1(0;0)$

+) Cho $x=1 \Rightarrow 2=y+\sqrt{y} \Rightarrow y=1$

Ta nhận được $(x;y)=B_1(1;1)$.

+) Cho $x=2 \Rightarrow \sqrt{y+2}+\sqrt{2}=y+\sqrt{y} \Rightarrow y=2$

Ta nhận được $(x;y)=C_1(2;2)$.

Suy luận và dự đoán.

Từ các kết quả trên ta dự đoán mối quan hệ giữa các biến là $x=y$.

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge \dfrac{1}{2} \\ x+y(x-1) \ge 0 \\ 2y-x+6 \ge 0 \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có $\sqrt{x+y(x-1)}-y+\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$

$\Leftrightarrow \frac{x+xy-y-y^2}{\sqrt{x+y(x-1)}+y}+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0 \Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1+y}{\sqrt{x+y(x-1)}+y}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=y$

Do $\frac{1+y}{\sqrt{x+y(x-1)}+y}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}>0\ \ \forall x\ge 0;\ y\ge \frac{1}{2}$

Thế vào phương trình (2) ta có $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)=4$ (*)

Từ phương trình suy ra $\sqrt{2x-1}-3>0 \Leftrightarrow x>5$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}>0$

Ta có $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}+\frac{1}{2\sqrt{x+6}}>0$ hàm số luôn đồng biến

Tương tự $g(x)=\sqrt{2x-1}-3>0 \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}>0$ hàm số luôn đồng biến

Khi đó hàm số $f(x)g(x)=\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)$

Hàm số luôn đông biến

Nên phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x=7$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(7;7)$.

Bài toán 20. *(Trích TSĐH – Khối B năm 2014)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(1-y)\sqrt{x-y}+x=2+(x-y-1)\sqrt{y} & (1)\\ 2y^2-3x+6y+1=2\sqrt{x-2y}-\sqrt{4x-5y-3} & (2)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích: Xét phương trình (1):

+) Cho $x=0 \Rightarrow (1-y)\sqrt{-y}=2-(y+1)\sqrt{y}$ (Vô nghiệm)

+) Cho $y=0 \Rightarrow \sqrt{x}+x=2 \Rightarrow x=1$

Ta nhận được giá trị $(x;y)=A_1(0;1)$

+) Cho $y=1 \Rightarrow x=2+(x-2)$ (Nghiệm đúng với mọi x).

Điều này dẫn đến một nhân tử của tích chắc chắn là $(y-1)$.

+) Cho $x=1 \Rightarrow (1-y)\sqrt{1-y}=1-y\sqrt{y} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=0\\ y=1\end{array}\right.$

Ta nhận được $(x;y)=B_1(1;0)$.

Vì trường hợp $(x;y)=(1;1)$ đã rơi phép thử thứ hai.

+) Cho $y=2 \Rightarrow -\sqrt{x-2}+x=2+(x-3)\sqrt{2} \Rightarrow x=3$

Ta nhận được $(x;y)=C_1(3;2)$

+) Cho $y=3\Rightarrow -2\sqrt{x-3}+x=2+(x-4)\sqrt{3}\Rightarrow x=4$

Ta nhận được $D_1(4;3)$

Suy luận và dự đoán.

- Phương trình (1) có một nhân tử chắc chắn là $(y-1)$
- Phương trình đường thẳng $B_1C_1: x-y-1=0$ và điểm $D_1\in(B_1C_1)$ nên ta dự đoán mối quan hệ giữa các biến là $x-y-1=0$.
- Ta không dùng được điểm A_1 nữa vì nó rơi vào kết quả của phép thử thứ ba.
- Kết quả của phép thử thứ nhất không có giá trị của y là bởi điều kiện $x\ge y\ge 0$.

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} y\ge 0\\ x\ge 2y\\ 4x\ge 5y+3\end{cases}$ (*)

Ta có phương trình (1)

$$\Leftrightarrow (1-y)\left(\sqrt{x-y}-1\right)+(x-y-1)\left(1-\sqrt{y}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-y)(x-y-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x-y}+1}+\frac{1}{1+\sqrt{y}}\right)=0\ (3)$$

Do $\dfrac{1}{\sqrt{x-y}+1}+\dfrac{1}{1+\sqrt{y}}>0$ nên $(3)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\\ y=x-1\end{array}\right.$

Với $y=1$ phương trình (2) trở thành $9-3x=0\Leftrightarrow x=3$

Với $y=x-1$ khi đó điều kiện (*) trở thành $1\le x\le 2$

Thế vào phương trình (2) ta có $2x^2-x-3=\sqrt{2-x}$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-x-1\right)+\left(x-1-\sqrt{2-x}\right)=0\Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)\left(2+\frac{1}{x-1+\sqrt{2-x}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Kết hợp điều kiện (*) $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left\{(3;1),\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

Bài toán 21. *(Trích TSĐH Khối A – 2010)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(4x^2+1\right)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 & (1)\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 & (2)\end{cases}$

Phân tích. Xét phương trình (1):

+) Cho $x=0\Rightarrow y=\dfrac{5}{2}$ (Do $y\le\dfrac{5}{2}$)

Ta nhận được $(x;y)=\left\{\ A_1\left(0;\frac{5}{2}\right)\right\}$

+) Cho $y=0\Rightarrow\left(4x^2+1\right)x-3\sqrt{5}=0\Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}}{2}$

Ta nhận được $(x;y)=B_1\left(\frac{\sqrt{5}}{2};0\right)$

+) Cho $y=2\Rightarrow\left(4x^2+1\right)x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

Ta nhận được $(x;y)=C_1\left(\frac{1}{2};2\right)$

Suy luận và dự đoán.

- Ta nhận thấy, không thể xây dựng mối quan hệ giữa các biến bằng viết phương trình đường thẳng các đường thẳng A_1B_1 được, do C_1 sẽ không thuộcđường thẳng đó vì giá trị của cặp $C_1(x;y)$ hữu tỷ.
- Trong phương trình (1) chứa $\sqrt{5-2y}$, nên mối quan hệ này có thể là mối quan hệ giữa căn thức $\sqrt{5-2y}$ và biến x ? Đặt $Y=\sqrt{5-2y}$

+) Cho $x=0\Rightarrow Y=0$

+) Cho $Y=0\Rightarrow x=0$

+) Với $y=2\Rightarrow Y=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

+) Cho $y=-2\Rightarrow Y=3\Rightarrow\left(4x^2+1\right)x-15=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$

Ta có các cặp $(x;\text{Y})=\left\{A_1(0;0),B_1\left(\frac{1}{2};1\right),C_1\left(\frac{3}{2};3\right)\right\}$

Phương trình đường thẳng $A_1B_1:2x=Y$ và $C_1\in\left(A_1B_1\right)$.

Do vậy ta dự đoán được mối quan hệ này là $2x=Y$ hay $2x=\sqrt{5-2y}$

Lời giải. Điều kiện. $\begin{cases}x\le\frac{3}{4}\\ y\le\frac{5}{2}\end{cases}$

Đến đây chúng ta có nhiều cách để xử lý phương trình (1), chẳng hạn:

Cách 1. Đặt $\sqrt{5-2y}=a(a\ge0)\Rightarrow y=\frac{5-a^2}{2}$

Thay vào phương trình (1) ta nhận được

$\left(4x^2+1\right)x+\left(\frac{5-a^2}{2}-3\right)a=0\Leftrightarrow\left(8x^3-a^3\right)+(2x-a)=0$

$\Leftrightarrow(2x-a)\left(4x^2+4xa+a^2+1\right)=0\Leftrightarrow 2x=a$

Cách 2.

$PT(1) \Leftrightarrow (4x^2+1).2x = (5-2y+1)\sqrt{5-2y}$

Xét hàm số đại diện $f(t)=(t^2+1)t$, dễ thấy hàm đồng biến trên R, nên

$$f(2x)=f\left(\sqrt{5-2y}\right) \Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ y=\dfrac{5-4x^2}{2} \end{cases}$$

Từ đó ta thay $y=\dfrac{5-4x^2}{2}$ vào phương trình (2) có:

$4x^2+\left(\dfrac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0 \quad (*)$.

Xét hàm số $g(x)=4x^2+\left(\dfrac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7,\ x\in\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$

Có $g'(x)=8x-8x\left(\dfrac{5}{2}-2x^2\right)^2-\dfrac{4}{\sqrt{3-4x}}=4x(4x^2-3)-\dfrac{4}{\sqrt{3-4x}}<0$

Nên $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$, đồng thời $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$. Nên phương trình này có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}$.

Suy ra hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

Bình luận.

Để giải phương trình (*) ta có thể sử dụng PP nhân lượng liên hợp. Vấn đề nằm ở việc tìm nghiệm của phương trình này (Xem phần Mục Lục).

Bài toán 22.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (3y-7)\sqrt{3y-1}=(3x-4)\sqrt{3x+2} & (1) \\ \sqrt[3]{3y-1}.\sqrt{3y-5}=8x-12 & (2) \end{cases}$

Phân tích.

Xét phương trình (1):

+) Cho $x=0 \Rightarrow (3y-7)\sqrt{3y-1}=-4\sqrt{2} \Rightarrow y=1$

Ta nhận được $(x;y)=A_1(0;1)$

+) Cho $x=1 \Rightarrow (3y-7)\sqrt{3y-1}=-\sqrt{5} \Rightarrow y=2$

Ta nhận được $(x;y)=B_1(1;2)$

+) Cho $x=2 \Rightarrow (3y-7)\sqrt{3y-1}=2\sqrt{8} \Rightarrow y=3$

Ta nhận được $(x;y)=C_1(2;3)$

Suy luận và dự đoán.

Phương trình đường thẳng $A_1B_1: x-y+1=0$ và $C_1 \in A_1B_1$ do đó ta dự đoán mối quan hệ giữa các biến là $x-y+1=0$.

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \geq -\dfrac{2}{3} \\ y \geq \dfrac{5}{3}. \end{cases}$

Từ phương trình (2) suy ra $8x-12 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{3}{2}$.

Để xử lý phương trình (1) chúng ta có nhiều cách. Chẳng hạn:

Cách 1. Đặt $u=\sqrt{3y-1}\,(u \geq 2),\ v=\sqrt{3x+2}\,\left(v \geq \sqrt{7}\right)$

Từ phương trình (1) cho ta

$u^3-6u=v^3-6v \Leftrightarrow (u-v)\left(u^2+uv+v^2-6\right)=0 \Leftrightarrow u=v \Rightarrow y=x+1$,

do $\begin{cases} u \geq 2 \\ v \geq \sqrt{7} \end{cases} \Rightarrow u^2+v^2+uv-6>0$.

Cách 2. $(1) \Leftrightarrow (3y-7)\sqrt{3y-1}=\left[(3x+3)-7\right]\sqrt{(3x+3)-1}$

Do $y \geq \dfrac{5}{3} \Rightarrow 3y \geq 5;\ x \geq \dfrac{3}{2} \Rightarrow 3x+3 \geq \dfrac{15}{2}$

Xét hàm số đại diện $f(t)=(t-7)\sqrt{t-1}$, $t \geq 5$

Ta có $f'(t)=\sqrt{t-1}+\dfrac{t-7}{2\sqrt{t-1}}=\dfrac{3t-9}{2\sqrt{t-1}}>0, \forall t \geq 5.$

Nên từ $f(3y)=f(3x+3) \Leftrightarrow y=x+1$

+) Với $y=x+1$, thay vào (2) ta có $\sqrt[3]{3x+2}.\sqrt{3x-2}=8x-12\ (*)$.

Đặt $\sqrt{3x-2}=a\ \left(a \geq \sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)$. Phương trình đã cho trở thàn

$$a\sqrt[3]{a^2+4}=\frac{8\left(a^2+2\right)}{3}-12 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}+\frac{4}{a^3}}+\frac{20}{a^2}=8.$$

Hàm số $f(a)=3\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{a^3}}+\dfrac{20}{a^2}$, nghịch biến trên $\left[\sqrt{\dfrac{5}{2}};+\infty\right)$ và $f(2)=0$

Suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất x = 2.

Hay hệ phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x=2 \\ y=3. \end{cases}$

Bài toán 23.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2 & (1) \\ 27x^6=x^3-8y+2 & (2) \end{cases}$

Phân tích: Xét phương trình (1):

+) Cho $x=0 \Rightarrow y+\sqrt{y^2+1}=1 \Rightarrow y=0$

Ta nhận được $(x;y)=A_1(0;0)$

+) Cho $y=-1 \Rightarrow \left(-1+\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)=2 \Rightarrow x=2$

Ta nhận được $(x;y)=B_1(2;-1)$

+) Cho $y=1 \Rightarrow \left(1+\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)=2 \Rightarrow x=-2$

Ta nhận được $(x;y)=C_1(-2;1)$

Suy luận và dự đoán.

Phương trình đường thẳng $A_1B_1 : x=-2y$ và $C_1 \in A_1B_1$ nên ta dự đoán mối quan hệ đó là $x+2y=0$.

Lời giải. Từ phương trình (1) ta có $\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+4}=\sqrt{(-2y)^2+4}+(-2y)$

Hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+4}+t$ đồng biến trên R nên $(1) \Leftrightarrow x=-2y$

Thế vào (2) ta có $27x^6=x^3+4x+3 \Leftrightarrow 3x^2=\sqrt[3]{x^3+4x+3}$

$\Leftrightarrow (x+1)^3+(x+1)=x^3+4x+3+\sqrt[3]{x^3+4x+3} \qquad (3)$

Xét hàm số $g(t)=t^3+t,\ t\in R \Rightarrow g'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in R$.

Suy ra hàm số $g(t)$ đồng biến trên R nên

$$(3) \Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{x^3+4x+2} \Leftrightarrow 3x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$$

Do đó nghiệm của hệ là $(x;y)=\left\{\left(\frac{1-\sqrt{13}}{6};\frac{-1+\sqrt{13}}{12}\right),\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6};\frac{-1-\sqrt{13}}{12}\right)\right\}$

Bài toán 24.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3y+1}+\sqrt{5x+4}=3xy-y+3 & (1) \\ \sqrt{2x^2+2y^2}+\sqrt{\dfrac{4\left(x^2+y^2+xy\right)}{3}}=2(x+y) & (2) \end{cases}$

Phân tích.

Ta dễ dàng nhận thấy tính đẳng cấp ở phương trình thứ (2) của hệ. Vấn đề bây giờ còn lại là tìm hằng số α để $x=\alpha y$.

Xét phương trình (2) :

+) Cho $x=1 \Rightarrow \sqrt{2y^2+2}+\sqrt{\dfrac{4y^2+4y+4}{3}}=2+2y \Rightarrow y=1$

Dự đoán $x=y$.

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} y \ge -\dfrac{1}{3} \\ x \ge -\dfrac{4}{5} \end{cases}$

Nhận thấy $(x;y)=(0;0)$ là một nghiệm của hệ phương trình.

Để xử lý phương trình (2) ta có nhiều cách :

Cách 1. Do $VT(2)>0 \Rightarrow VP(2)=x+y>0$. Khi đó :

$$(2) \Leftrightarrow \left[\sqrt{2x^2+2y^2}-(x+y)\right]+\left[\sqrt{\frac{4\left(x^2+y^2+xy\right)}{3}}-(x+y)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{\sqrt{2x^2+2y^2}+x+y}+\frac{(x-y)^2}{\sqrt{\frac{4\left(x^2+y^2+xy\right)}{3}}+x+y}=0$$

$$\Leftrightarrow x=y,\ do\ \frac{1}{\sqrt{2x^2+2y^2}+x+y}+\frac{1}{\sqrt{\frac{4\left(x^2+y^2+xy\right)}{3}}+x+y}>0, \forall x+y>0$$

Cách 2.

$$VT(2)=\sqrt{(x+y)^2+(x-y)^2}+\sqrt{(x+y)^2+\frac{(x-y)^2}{3}}\ge |x+y|+|x+y|\ge 2(x+y)=VP(2)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x+y\ge 0 \end{cases}$

Các 3. Đặt $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}\left(S^2\ge 4P\right)$. Khi đó PT(2) trở thành:

$$\sqrt{2\left(S^2-2P\right)}+\sqrt{\frac{4\left(S^2-P\right)}{3}}=2S \Leftrightarrow \begin{cases} S\ge 0 \\ \dfrac{2S^2+16P}{3}=2\sqrt{\dfrac{8}{3}\left(S^2-2P\right)\left(S^2-P\right)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S\ge 0 \\ 16P^2+88PS^2-23S^4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S\ge 0,\ S^2\ge -8P \\ \left[\begin{array}{l} S^2=4P \\ S^2=-\dfrac{4}{23}P \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow S^2=4P$$

Do khi $S^2=-\dfrac{4}{23}P$: $\begin{cases} S^2\ge 4P \\ S^2\ge -8P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{4}{23}P\ge 4P \\ -\dfrac{4}{23}P\ge -8P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P\le 0 \\ P\ge 0 \end{cases} \Rightarrow P=0$ (Không xảy ra)

+) Với $x=y$ thay vào phương trình (1) cho ta:

$$\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}=3x^2-x+3$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)+\left(x+2-\sqrt{5x+4}\right)+3\left(x^2-x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{x^2-x}{x+2+\sqrt{5x+4}}+3\left(x^2-x\right)=0 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Do $\Leftrightarrow \frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}+3>0, \forall x \geq -\frac{1}{3}$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=\{(0;0),(1;1)\}$.

Bài toán 25.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=xy\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)} & (1) \\ 4\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=9(y-1)\sqrt{2x-2} & (2) \end{cases}$

Phân tích: Ta nhận thấy tính đẳng cấp ở phương trình (1), vấn đề còn lại là ta cần tìm hằng số α thỏa mãn $x=\alpha y$.

+) Cho $x=1 \Rightarrow y^3+1=y\sqrt{2+2y^2} \Rightarrow y=1$. Từ đó ta suy luận rằng mối quan hệ giữa các biến là $x=y$.

Lời giải. Điều kiện $x \geq 1$. Từ phương trình (2) ta có:

$VT(2) \geq 0 \Rightarrow VP(2) \geq 0 \Rightarrow y \geq 1$

Để xử lý phương trình (1) ta cũng có nhiều cách, chẳng hạn:

Cách 1.

$$(1) \Leftrightarrow xy\left(\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}-x-y\right)+x^2(y-x)+y^2(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy(x-y)^2}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}+x+y}-(x-y)^2(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2\left(\frac{xy}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}+x+y}-(x+y)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-y)^2=0 \\ xy=(x+y)^2+(x+y)\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)} \end{array}\right.$$

Chú ý là:

$$xy=(x+y)^2+(x+y)\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)} \Leftrightarrow -\left(x^2+y^2+xy\right)=(x+y)\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$$

Không có giá trị $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$ thỏa mãn.

Cách 2. Đặt $x=ty\ (t>0)$, ta có:

$$x^3\left(1+t^3\right)=tx^3\sqrt{2\left(1+t^2\right)} \Leftrightarrow \left(1+t^3\right)=t\sqrt{2\left(1+t^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow t^6-2t^4+2t^3-2t^2+1=0 \Leftrightarrow \left(t^2-2t+1\right)\left(t^4+2t^3+t^2+2t+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow t=1,\ do\ t>0$$

Hay $x=y$.

Cách 3.

$$\left(x^3+y^3\right)\left(x+y\right)\underset{BCS}{\geq}\left(x^2+y^2\right)^2=\frac{\left(x^2+y^2\right)}{2}\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\geq\frac{2xy}{2}.\sqrt{\left(x+y\right)^2}\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}=xy\left(x+y\right)\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)},\ do\ x,y\geq 1.$$

Hay $x^3+y^3\geq xy\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y$.

+) Với $x=y$, thay vào phương trình (2) cho ta:

$$4\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=9\left(x-1\right)\sqrt{2x-2}\Leftrightarrow 8\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=81\left(x-1\right)^3$$

Đặt $x-1=a\left(a\geq 0\right)$, ta có: $81a^3-8a-8=8\sqrt{a^2+2a}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+2a}\left(3\sqrt{a^2+2a}-4\right)+81a^3-6a^2-20a-8=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+2a}\,\frac{\left(3a-2\right)\left(3a+8\right)}{3\sqrt{a^2+2a}+4}+\left(3a-2\right)\left(27a^2+16a+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(3a-2\right)\left[2\sqrt{a^2+2a}\,\frac{\left(3a+8\right)}{3\sqrt{a^2+2a}+4}+\left(27a^2+16a+4\right)\right]=0\Leftrightarrow a=\frac{2}{3}$$

Với $a=\frac{2}{3}\Rightarrow x=\frac{5}{3}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right)$.

Bài toán 26. ***(Trích TSĐH - khối A năm 2014)***

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}=12 & (1)\\ x^3-8x-1=2\sqrt{y-2} & (2)\end{cases}\quad\left(x,y\in R\right)$

Phân tích.

- Với phương trình (2): Sau khi nâng lên lũy thừa, ta nhận được phương trình bậc nhất đối với ẩn y, vậy nên ta sẽ không thể tìm được mối quan hệ nào nữa từ phương trình này.
- Với phương trình (1).

+) Cho $x=0\Rightarrow\sqrt{12y}=12\Rightarrow y=12$

Ta nhận được $\left(x;y\right)=A_1\left(0;12\right)$.

+) Cho $y=0\Rightarrow x\sqrt{12}=12\Rightarrow x=\sqrt{12}$.

Ta nhận được $\left(x;y\right)=B_1\left(\sqrt{12};0\right)$

+) Cho $x=1\Rightarrow\sqrt{12-y}+\sqrt{11y}=12\Rightarrow y=11$.

Ta nhận được $\left(x;y\right)=C_1\left(1;11\right)$

+) Cho $y=1 \Rightarrow x\sqrt{11}+\sqrt{12-x^2}=12 \Rightarrow x=\sqrt{11}$

Ta nhận được $(x;y)=D_1\left(\sqrt{11};1\right)$

Suy luận và dự đoán.

Thông thường (1) chỉ có thể được quy về tích các đa thức bậc nhất, hoặc không khả quy (do bậc của nó bằng 2).

Vậy ta suy đoán đa thức bậc hai đó là gì ?

+) Có thể nó không chứa nhân tử bậc nhất, do xuất hiện giá trị căn thức khi cho giá trị $y=0$.

+) Nó không là mối quan hệ giữa $x^2;y^2$ do không xuất hiện $x=\pm a$ hoặc $y=\pm a$.

+) Từ phép thử thứ hai và thứ tư, ta đoán rằng có thể mối quan hệ ta cần tìm là mối quan hệ giữa $\left(y;x^2\right)$

Ta có $\left(X=x^2;Y=y\right)=\left\{(0;12),(12;0),(1;11),(11;1)\right\}$. Viết phương trình đường thẳng, ta nhận được $X+Y=12 \Rightarrow x^2+y=12.\ \left(X=x^2,\ Y=y\right)$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases}2\le y\le 12\\ -2\sqrt{3}\le x\le 2\sqrt{3}\end{cases}$

Để xử lý phương trình (1) ta có nhiều cách , chẳng hạn :

<u>Cách 1.</u>

$$x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}=12$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-2x\sqrt{12-y}+12-y\right)+\left(y-2\sqrt{y\left(12-x^2\right)}+12-x^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{12-y}\right)^2+\left(\sqrt{y}-\sqrt{12-x^2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x=\sqrt{12-y}\\ \sqrt{y}=\sqrt{12-x^2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ y=12-x^2\end{cases}$$

<u>Cách 2.</u>

$$\begin{cases}x\sqrt{12-y}\le \dfrac{x^2+12-y}{2}\\ \sqrt{y\left(12-x^2\right)}\underset{AM-GM}{\le}\dfrac{y+12-x^2}{2}\end{cases} \Rightarrow VT(1)\le \frac{x^2+12-y}{2}+\frac{y+12-x^2}{2}=12=VP(1)$$

Chú ý là khi áp dụng bất đẳng thức AM-GM, từ $\begin{cases}y\ge 2\\ y\left(12-x^2\right)\ge 0\end{cases} \Rightarrow \left(12-x^2\right)\ge 0$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}x=\sqrt{12-y}\\ \sqrt{y}=\sqrt{12-x^2}\end{cases}$

<u>Cách 3</u>.

$$x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}=12 \Leftrightarrow x\sqrt{12-y}=12-\sqrt{y\left(12-x^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\left(12-\sqrt{y\left(12-x^2\right)}\right)\ge 0 \\ x^2\left(12-y\right)=144-24\sqrt{y\left(12-x^2\right)}+y\left(12-x^2\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\left(144-12y+x^2y\right)\ge 0 \\ \left(12-x^2\right)-2\sqrt{y\left(12-x^2\right)}+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \left(\sqrt{y}-\sqrt{12-x^2}\right)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=12-x^2 \\ x\ge 0 \end{cases}$$

Do $\begin{cases} y\ge 2 \\ y\left(12-x^2\right)\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \left(12-x^2\right)\ge 0$ nên ta có : $\sqrt{y\left(12-x^2\right)}=\sqrt{y}.\sqrt{12-x^2}$

Cách 4. Ta có :

$$x\left(\sqrt{12-y}-x\right)+\sqrt{y}\left(\sqrt{12-x^2}-\sqrt{y}\right)+y+x^2-12=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{x^2+y-12}{x+\sqrt{12-y}}\right)+\sqrt{y}\frac{12-x^2-y}{\sqrt{12-x^2}+\sqrt{y}}+\left(y+x^2-12\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y-12\right)\left(\frac{x}{x+\sqrt{12-y}}+1-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{12-x^2}+\sqrt{y}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y-12\right)\left(\frac{x}{x+\sqrt{12-y}}+\frac{\sqrt{12-x^2}}{\sqrt{12-x^2}+\sqrt{y}}\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2+y-12\right)=0$$

Do $\dfrac{x}{x+\sqrt{12-y}}+\dfrac{\sqrt{12-x^2}}{\sqrt{12-x^2}+\sqrt{y}}>0$, xem chứng minh $x\ge 0$ ở **Cách 3.**

+) Với $x^2+y-12=0 \Leftrightarrow y=12-x^2$ Thế vào phương trình (2) ta có :

$$x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2} \Leftrightarrow x^3-8x-3-2\left(\sqrt{10-x^2}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(x^2+3x+1+\frac{2\left(x+3\right)}{\sqrt{10-x^2}+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x^2+3x+1+\dfrac{2\left(x+3\right)}{\sqrt{10-x^2}+1}=0 \quad \forall x\ge 0\ \left(VN\right) \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(x;y\right)=\left(3;3\right)$.

Bài toán 27.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2y-x}+\sqrt{2x-y}+\sqrt{xy}=3 & (1) \\ \sqrt{2x\left(x+y\right)}+\sqrt{\left(x+1\right)\left(y+1\right)}=2x+y+1 & (2) \end{cases}$

Phân tích: Xét phương trình (2):

+) Cho $x=0 \Rightarrow \sqrt{y+1}=y+1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=0 \end{array}\right.$

Ta nhận được $\left(x;y\right)=\left\{A_1\left(0;0\right),\ A_2\left(0;-1\right)\right\}$

+) Cho $y=0\Rightarrow\sqrt{2x^2}+\sqrt{x+1}=2x+1\Rightarrow x=0$

Ta nhận được $(x;y)=A_1(0;0)$

+) Cho $x=1\Rightarrow 2\sqrt{2(y+1)}=y+3\Rightarrow y=1$

Ta nhận được $C_1(1;1)$

+) Cho $x=2\Rightarrow 2\sqrt{(y+2)}+\sqrt{3(y+1)}=y+5\Rightarrow y=2$

Ta nhận được $(x;y)=D_1(2;2)$.

Phân tích và dự đoán.

- (2) có bậc nhất do vậy mối quan hệ nếu có có thể chỉ là bậc nhất. Từ các phép thử trên ta dự đoán $x=y$.
- **Chú ý.** *Khi thử các giá trị, chúng ta nên thử trên miền xác định của hệ phương trình để tránh trường hợp hệ đã cho là các bất đẳng thức chặt làm phép thử vô nghiệm.*

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases}2y-x\ge 0\\2x+y\ge 0\\xy\ge 0\\2x(x+y)\ge 0\\(x+1)(y+1)\ge 0\end{cases}$

Từ điều kiện $\begin{cases}2y-x\ge 0\\2x-y\ge 0\\xy\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2(x+y)-(x+y)\ge 0\\xy\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y\ge 0\\xy\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0\\y\ge 0\end{cases}$ (*)

Với điều kiện (*) ta có:

$$VT(2)=\sqrt{2x}\sqrt{x+y}+\sqrt{x+1}.\sqrt{y+1}\underset{AM-GM}{\le}\frac{2x+x+y}{2}+\frac{x+1+y+1}{2}=2x+y+1=VP(2)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2x}=\sqrt{x+y}\\\sqrt{x+1}=\sqrt{y+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x,y\ge 0\\x=y\end{cases}$

+) Với $\begin{cases}x=y\\x,y\ge 0\end{cases}$ thay vào phương trình (1) cho ta : $2\sqrt{x}+x-3=0\Leftrightarrow x=1$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;1)$.

Bài toán 27. ***(Thi thử chuyên Hưng Yên năm 2014)***

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(1-y)\sqrt{x^2+2y^2}=x+2y+3xy & (1)\\\sqrt{y+1}+\sqrt{x^2+2y^2}=2y-x & (2)\end{cases}$

Phân tích: Xét phương trình (1):

+) Cho $y=0\Rightarrow|x|=x$ (nghiệm đúng $\forall x\ge 0$).

Chúng ta có một nhân tử cho phương trình (1) đó là: y

+) Cho $y=1\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$. Ta nhận được $(x;y)=A_1\left(-\frac{1}{2};1\right)$

+) Cho $y=2\Rightarrow\sqrt{x^2+8}+7x+4=0\Rightarrow x=-1$

Ta nhận được $(x;y)=B_1(-1;2)$.

+) Cho $y=3\Rightarrow 2\sqrt{x^2+18}=10x+6\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

Ta nhận được $(x;y)=C_1\left(-\frac{3}{2};3\right)$

Suy luận và dự đoán.

Phương trình đường thẳng $A_1B_1: y+2x=0$ và $C_1\in(A_1B_1)$

Ta dự đoán một nhân tử nữa là $(y+2x)$.

Vậy suy luận của chúng ta là phương trình (1) đưa được về dạng :

$$\left(y^2+2xy\right).G(x;y)=0$$

Lời giải. Điều kiện $y+1\ge 0$.

+) Dễ thấy $(x;y)=(0;0)$ không là nghiệm của hệ đã cho.

+) Với $(x;y)\ne(0;0)$, ta có:

$$(1)\Leftrightarrow(1-y)\left[\sqrt{x^2+2y^2}-(x+2y)\right]-\left(2y^2+4xy\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(1-y)\left(-2y^2-4xy\right)}{\sqrt{x^2+2y^2}+(x+2y)}-\left(2y^2+4xy\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2y^2+4xy\right)\left(\frac{1-y}{\sqrt{x^2+2y^2}+(x+2y)}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2y^2+4xy=0\\-(x+y+1)=\sqrt{x^2+2y^2}\end{array}\right.$$

- Với $y=0$, thay vào (2) ta có: $1+|x|+x=0$ (Vô nghiệm)
- Với $y=-2x$, thay vào (2) ta có:

$$\sqrt{1-2x}+3|x|+5x=0\Leftrightarrow x=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

Lúc đó $(x;y)=\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

- Với $-(x+y+1)=\sqrt{x^2+2y^2}$, thay vào (2) cho ta :

$\sqrt{y+1}=3y+1\Leftrightarrow y=0$, tương tự như trên ta có $1+|x|+x=0$ (Vô nghiệm)

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Chú ý. *Việc sử dụng cách ghép:* $\sqrt{x^2+2y^2}-(x+2y)$ *nhằm mục đích khử bậc nhất ở* $VP(2)$ *do nhân tử chúng ta nhận được có bậc 2.*

Bài toán 28. ***(Thi thử Toán Học 24h)***

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+1)\sqrt{\dfrac{3y-x+2}{x+y+2}}=\dfrac{x^2+y^2}{x+y}+1 & (1)\\ \sqrt{x+y-1}+\sqrt{5-2x}=4xy-12y+7 & (2)\end{cases}$

Phân tích : Từ phương trình (1) :

+) Cho $x=0\Rightarrow\sqrt{\dfrac{3y+2}{y+2}}=y+1\Rightarrow y=0$

+) Cho $x=1\Rightarrow\ 2\sqrt{\dfrac{3y+1}{y+3}}=\dfrac{y^2+1}{y+1}+1\Rightarrow y=1$

+) Cho $x=-1\Rightarrow\dfrac{y^2+1}{y-1}+1=0\Rightarrow y=-1$

Dự đoán : $\boxed{x=y}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases}5-2x\ge 0\\ x+y-1\ge 0\\ 3y-x+2\ge 0\end{cases}$

Với điều kiện $x+y\ge 1\Rightarrow\ VP(1)\ge 0$ nên $VT(1)\ge 0\Rightarrow x+1\ge 0$

Lại có $VP(1)=\dfrac{x^2+y^2}{x+y}+1\ge\dfrac{(x+y)^2}{2(x+y)}+1=\dfrac{x+y}{2}+1$

và $VT(1)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4(x+1)^2(3y-x+2)}{x+y+2}}\le\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\left[2(x+1)+2(x+1)+3y-x+2\right]^3}{27(x+y+2)}}=\dfrac{x+y+2}{2}$

Từ đó suy ra $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ 2(x+1)=3y-x+2\end{cases}\Leftrightarrow x=y$

Với $x=y$, thay vào (2) ta có $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-2x}=4x^2-12x+7$

$\Leftrightarrow 2\left(4x^2-12x+5\right)+\sqrt{2x-1}\left(\dfrac{2x-5}{\sqrt{2x-1}+2}\right)+\sqrt{5-2x}\left(\dfrac{1-2x}{\sqrt{5-2x}+2}\right)=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{(2x-1)(5-2x)}\left(2\sqrt{(2x-1)(5-2x)}+\dfrac{\sqrt{5-2x}}{\sqrt{2x-1}+2}+\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{5-2x}+2}\right)=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=\left\{\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2}\right)\right\}$.

Bài toán 29. ***(Thi thử Toán Học 24h)***

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(\sqrt{xy+x}-y+3\right)\sqrt{9-(x-y)^2}=8\sqrt{2} & (1) \\ \sqrt{2x-x^2}-x=\sqrt{2y-y^2}-3y & (2) \end{cases}$

Phân tích : Xét phương trình (1) :

+) Cho $y=0 \Rightarrow \left(\sqrt{x}+3\right)\sqrt{9-x^2}=8\sqrt{2} \Rightarrow x=1$

Ta nhận được $(x;y)=A_1(1;0)$.

+) Cho $x=0 \Rightarrow (3-y)\sqrt{9-y^2}=8\sqrt{2} \Rightarrow y=-1$

Ta nhận được $(x;y)=B_1(0;-1)$

+) Cho $y=1 \Rightarrow x=2$, ta nhận được $C_1(2;1)$.

Suy luận và dự đoán.

Phương trình đường thẳng $A_1B_1 : x-y-1=0$ và $C_1 \in (A_1B_1)$ ta dự đoán mối liên hệ giữa các biến là $x=y+1$.

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} 0 \le x, y \le 2 \\ |x-y| \le 3 \end{cases}$

Khi đó $\sqrt{xy+x}=\sqrt{x}.\sqrt{y+1} \le \dfrac{x+y+1}{2}$

Suy ra

$$VT(1) \le \left(\frac{x-y+7}{2}\right)\sqrt{9-(x-y)^2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}(x-y+7)\sqrt{72-8(x-y)^2} \le$$

$$=\frac{(x-y+7)^2+72-8(x-y)^2}{8\sqrt{2}}=\frac{121+14(x-y)-7(x-y)^2}{8\sqrt{2}}$$

$$=\frac{128-7(x-y-1)^2}{8\sqrt{2}} \le 8\sqrt{2}=VP(1)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y+1$. Hay $(1) \Leftrightarrow x=y+1$

Với $y=x-1$ thay vào (2) ta có phương trình :

$$\sqrt{1-y^2}-\sqrt{2y-y^2}+(2y-1)=0 \Leftrightarrow (2y-1)\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}+\sqrt{2y-y^2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{2} \\ \sqrt{1-y^2}+\sqrt{2y-y^2}=1 \end{array}\right.$$

+) Với $y=\dfrac{1}{2} \Rightarrow (x;y)=\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

+) Với $\sqrt{1-y^2}+\sqrt{2y-y^2}=1 \Rightarrow \left(2y-y^2\right)=1-2\sqrt{1-y^2}+\left(1-y^2\right)$

$\Leftrightarrow 1-y=\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}\right.$

Thử lại ta thấy $y=0, y=1$ là các nghiệm của phương trình trên.

$\Rightarrow (x;y)=\{(1;0),(2;1)\}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\left\{(1;0),(2;1),\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)\right\}$.

Chú ý.

Khi giải phương trình $\sqrt{1-y^2}+\sqrt{2y-y^2}=1$ *bằng phép biến đổi hệ quả như trên thì việc thử lại nghiệm là cần thiết (để tránh trường hợp phương trình hệ quả có nghiệm ngoại lai).*

Bài toán 30.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}}+\dfrac{1}{\sqrt{y+3x}}\right)=2 & (1) \\ \dfrac{2-y}{4}=\sqrt{2x-3}-\sqrt[3]{y-1} & (2) \end{cases}$

Phân tích và dự đoán.

Từ phương trình (1) lần lượt cho các giá trị $\begin{cases} x=0 \to y=0 \\ x=1 \to y=1 \\ x=2 \to y=2 \end{cases}$ ta dự đoán mối quan hệ giữa các biến là $x=y$.

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \ge \dfrac{3}{2} \\ y \ge 0 \end{cases}$

Ta có

- $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3y}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{x+y}{x+3y}\right) \\ \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+3y}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2y}{x+3y}\right) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+3y}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{3}{2}\right) \quad (3)$
- Hoàn toàn tương tự cho ta $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{y+3x}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x+y}+\dfrac{3}{2}\right) \quad (4)$

Lấy (3)+(4) theo từng vế cho ta :

$VT(1) \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y}+\frac{3}{2}\right)=2=VP(1)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y$.

Với $x=y$ thay vào phương trình (2) ta được:

$$\frac{x-2}{4}+\sqrt{2x-3}-\sqrt[3]{x-1}=0\ (*)\left(x\ge\frac{3}{2}\right)$$

Xét hàm số: $f(x)=\frac{x-2}{4}+\sqrt{2x-3}-\sqrt[3]{x-1}\ \left(x\ge\frac{3}{2}\right)$, ta có:

$f'(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{2x-3}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}>0,\ \forall x\ge\frac{3}{2}$. Suy ra $f(x)$ đồng biến, mà $f(2)=0$

Nên phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x=2$.

Từ đó suy ra $(x;y)=(2;2)$ là nghiệm của hệ đã cho.

Bài toán 31. ***(Thi thử Toán Học 24h)***

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+5y-4)\sqrt{x-y^2}=2xy-2y & (1)\\ y\sqrt{x-1}+3\sqrt{x-y^2}=2x+y & (2)\end{cases}$

Phân tích.

Xét phương trình (1):

+) Cho $x=0\Rightarrow(5y-4)\sqrt{-y^2}=-2y\Rightarrow y=0$

Ta nhận được $(x;y)=A_1(0;0)$.

+) Cho $y=0\Rightarrow(x-4)\sqrt{x}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$

Ta nhận được $(x;y)=B_1(4;0)$.

+) Cho $x=1\Rightarrow(5y-3)\sqrt{1-y^2}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=\pm1\\y=\frac{3}{5}\end{array}\right.$

Ta nhận được $(x;y)=\left\{C_1(1;1),C_2(1;-1),C_3\left(1;\frac{3}{5}\right)\right\}$

+) Cho $y=1\Rightarrow(x+1)\sqrt{x-1}=2(x-1)\Rightarrow x=1$

Ta nhận được $(x;y)=C_1(1;1)$

+) Cho $y=-1\Rightarrow(x-9)\sqrt{x-1}=2(1-x)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=5\end{array}\right.$

Ta nhận được $(x;y)=\{C_2(1;-1),E_1(5;-1)\}$

Suy luận và dự đoán.

- Nhận thấy từ các điểm A_1,B_1,C_1,D_1 chúng ta không thiết lập được mối quan hệ bậc nhất nào.
- Trong phương trình (2) chứa $\sqrt{x-y^2}$ nên chúng ta nảy sinh ý nghĩ, có thể là mối quan hệ giữa nó với các biến x,y.

Khi đó chỉ có thể là $\sqrt{x-y^2}=ax+by+c$ (*)

+) *Điểm* $A_1 \in (*) \Rightarrow c = 0$

+) *Điểm* $B_1, C_1 \in (*) \Rightarrow a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{2\sqrt{x-y^2} = x - y}$ (a)

+) *Điểm* $B_1, C_2 \in (*) \Rightarrow a = b = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{2\sqrt{x-y^2} = x + y}$ (b)

+) *Điểm* $B_1, C_3 \in (*) \Rightarrow a = b = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{2\sqrt{x-y^2} = x + y}$ (b)

+) *Điểm* $E_1 \in (b)$, *nên ta dự đoán mối quan hệ giữa các biến là :*

$$\boxed{2\sqrt{x-y^2} = x + y}$$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \ge 1 \\ x \ge y^2 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow (x+5y-4)\left(2\sqrt{x-y^2} - x - y\right) + (x+y)^2 - 4\left(x-y^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+5y-4)\left(2\sqrt{x-y^2} - x - y\right) - \left(2\sqrt{x-y^2} + x + y\right)\left(2\sqrt{x-y^2} - x - y\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x-y^2} - x - y\right)\left(4y - 4 - 2\sqrt{x-y^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x-y^2} = x + y \\ \sqrt{x-y^2} = 2y - 2 \end{array}\right.$$

\+ Với $2\sqrt{x-y^2} = x + y$, kết hợp với (2) cho ta hệ :

$$\begin{cases} 2\sqrt{x-y^2} = x + y \\ y\sqrt{x-1} + 3\sqrt{x-y^2} = 2x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-y^2} = x + y \\ 2y\sqrt{x-1} = x - y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y \ge 0, (x-y)y \ge 0 \\ x^2 + 5y^2 + 2xy - 4x = 0 \\ x^2 + 5y^2 - 2xy - 4xy^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \ge 0, (x-y)y \ge 0 \\ x \ge 1, x \ge y^2 \\ x^2 + 5y^2 + 2xy - 4x = 0 \\ 4x\left(y - 1 - y^2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$$

+) Với $\sqrt{x-y^2} = 2y - 2$, kết hợp với (2) cho ta hệ :

$$\begin{cases} \sqrt{x-y^2} = 2y - 2 & (3) \\ y\sqrt{x-1} + 3\sqrt{x-y^2} = 2x + y & (4) \end{cases}$$

Từ (3) ta có $y \ge 1$. Áp dụng BĐT AM-GM, ta có :

$$VT(4) \le \frac{y^2 + x - 1}{2} + \frac{3}{2}\left(x - y^2 + 1\right) = 2x + 1 - y^2 < 2x + 1 \le 2x + y, \forall y \ge 1$$

Do đó hệ $\begin{cases} (3) \\ (4) \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

Bình luận.

Nếu đặt $\begin{cases}\sqrt{x-y^2}=a\\ y=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=a^2+b^2\\ y=b\end{cases}$. *Khi đó từ phương trình (1) ta nhận được:*

$$\left(a^2+b^2+5b-4\right)a=2\left(a^2+b^2\right)b-2b\Leftrightarrow(2b-a-2)\left(a^2-2a+b^2+b\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2b-a-2=0\to\sqrt{x-y^2}=2y-2\\ a^2-2a+b^2+b=0\to x+y=2\sqrt{x-y^2}\end{array}\right.$$

Bài toán 32. ***(Thi thử Toán Học 24h)***

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-1)\sqrt{x-y+1}+(x-y)\sqrt{x+3}=3x-2y-1 & (1)\\ \sqrt{y+1-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{y+x^2-x^3}=\dfrac{1}{2}\left(x^2+3\right) & (2)\end{cases}$

Phân tích.

Nhận thấy, nếu đặt $\begin{cases}\sqrt{x-y+1}=a\\ \sqrt{x+3}=b\end{cases}(a,b\ge 0)$ *ta có thể đưa (1) thànhphương trình hai ẩn chứa đa thức bậc cao :* $(a-2)b^2+\left(a^2-4\right)b-\left(a^2+a-6\right)=0\quad(*)$

Bằng ***suy luận và dự đoán ở mục II.***

Khi đó $(*)\Leftrightarrow(a-2)(b-1)(a+b+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2\\ b=1\\ a+b+3=0\end{array}\right.$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases}x-y+1\ge 0,\ x+3\ge 0\\ x\ne 0,\ y+1-\dfrac{1}{x}\ge 0,\ y+x^2-x^3\ge 0\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}\sqrt{x-y+1}=a\\ \sqrt{x+3}=b\end{cases}(a,b\ge 0)$. Thay vào phương trình (1) cho ta :

$$(a-2)b^2+\left(a^2-4\right)b-\left(a^2+a-6\right)=0\Leftrightarrow(a-2)(b-1)(a+b+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2\\ b=1\\ a+b+3=0\end{array}\right.$$

+) Với $a=2\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

+) Với $b=1\Rightarrow x=y$, thế vào (2) cho ta: $\sqrt{x+1-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{x+x^2-x^3}=\dfrac{1}{2}\left(x^2+3\right)\quad(*)$

Ta có: $VT(*)=\sqrt{x+1-\dfrac{1}{x}}+|x|\sqrt{\dfrac{1}{x}+1-x}\le\sqrt{2\left(x^2+1\right)}$

Lại có $VP(*)=\dfrac{1}{2}\left(x^2+3\right)=\dfrac{1}{2}\left[\left(x^2+1\right)+2\right]\ge\dfrac{1}{2}\left(2\sqrt{2\left(x^2+1\right)}\right)=\sqrt{2\left(x^2+1\right)}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\pm 1$

Bình luận.

- *Để xử lý phương trình (*) ta có thể đánh giá trực tiếp bằng cách sử dụng BĐT AM-GM như sau:*

$$VT(*)=\sqrt{x+1-\frac{1}{x}}+|x|\sqrt{\frac{1}{x}+1-x}\underset{AM-GM}{\le}\frac{1+x+1-\frac{1}{x}}{2}+\frac{x^2+\frac{1}{x}+1-x}{2}=\frac{x^2+3}{2}=VP(*)$$

- *Ta cũng có thể dễ dàng đưa phương trình (1) về dạng tích mà không cần sử dụng đến phép đặt ẩn phụ:*

$$(1)\Leftrightarrow(x-1)\sqrt{x-y+1}-(x-1)+(x-y)\sqrt{x+3}-2(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\frac{x-y}{\sqrt{x-y+1}+1}+(x-y)\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x-y+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=y\end{array}\right.$$

Bài toán 33. *(Thi thử Toán Học 24h)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+x\sqrt{1+y}=\sqrt{1-y^2}+1-y & (1)\\ \dfrac{4x}{y}+\dfrac{\sqrt{1-2x^2}}{1-y}=3\sqrt{3} & (2)\end{cases}$

Phân tích.

Phương trình (1) chứa hai căn thức $\sqrt{1+y}$ và $\sqrt{1-y}$ để đưa (1) về phương trình chỉ chứa một căn thức ta sử dụng phép đặt ẩn phụ:

Đặt $\begin{cases}x=a\\ \sqrt{1-y}=b\end{cases}$. *Lúc đó (1) trở thành:* $a^2+a\sqrt{2-b^2}=b\sqrt{2-b^2}+b^2$

Đến đây ta có thể hoàn toàn nhìn thấy nhân tử mà không cần sử dụng đến phép thử nào.

Lời giải: Điều kiện $\begin{cases}-1\le y<1\\ y\ne 0\\ 1-2x^2\ge 0\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}x=a\\ \sqrt{1-y}=b\end{cases}\left(a\in\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right],b\in\left(0;\sqrt{2}\right],b\ne 1\right)$

Hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases}a^2+a\sqrt{2-b^2}=b\sqrt{2-b^2}+b^2 & (3)\\ \dfrac{4a}{1-b^2}+\dfrac{\sqrt{1-2a^2}}{b^2}=3\sqrt{3} & (4)\end{cases}$

Ta có:

$$(3)\Leftrightarrow(a-b)(a+b)+\sqrt{2-b^2}(a-b)=0\Leftrightarrow(a-b)\left(a+b+\sqrt{2-b^2}\right)=0\ (*)$$

Lại có $\left(b+\sqrt{2-b^2}\right)^2=2b\sqrt{2-b^2}+2\ge 2,\forall b\in\left[0;\sqrt{2}\right]\Rightarrow b+\sqrt{2-b^2}\ge\sqrt{2}$

Do đó $a+b+\sqrt{2-b^2} \ge -\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}>0$ nên $(*) \Leftrightarrow a=b$

Với $a=b,$ thay vào (4) cho ta:

$$\frac{4b}{1-b^2}+\frac{\sqrt{1-2b^2}}{b^2}=3\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{4b}{1-b^2}+\frac{2\sqrt{1-2b^2}}{1-\left(1-2b^2\right)}=3\sqrt{3} \ (*) \ , \ b\in\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t}{1-t^2}, t\in[0;1)$ ta có: $f'(t)=\frac{1+t^2}{\left(1-t^2\right)^2}>0$, $\forall t\in[0;1)$

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $t\in[0;1)$, suy ra hai hàm $f(b)$ và $f\left(\sqrt{1-2b^2}\right)$ đồng biến. Do đó $4f(b)+2f\left(\sqrt{1-2b^2}\right)$ cũng đồng biến, đồng thời

$$4f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=3\sqrt{3} \text{ , nên } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{1-2b^2}=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow b=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{2}{3}\right)$.

Bài toán 34.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt[3]{y^2-4}+\sqrt[3]{y^2+5}+x^3=1 & (1) \\ 2y\left(\sqrt{x+3}+xy\right)=y^4+x^2-5y^2+7x+12 & (2) \end{cases}$

Phân tích và dự đoán.

Từ phương trình (2), đặt $\begin{cases} \sqrt{x+3}=a \\ y=b \end{cases}$ ta sẽ có:

$$\left(a^4-2a^2b^2+b^4\right)+\left(a^2-2ab+b^2\right)=0 \Leftrightarrow \left(a^2-b^2\right)^2+(a-b)^2=0 \Leftrightarrow a=b$$

Lời giải. Điều kiện $x\ge -3$ Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \left(y^4-2y^2x+x^2\right)+\left(y^2-2y\sqrt{x+3}+x+3\right)-6\left(y^2-x\right)+9=0$$

$$\Leftrightarrow \left(y^2-x-3\right)^2+\left(y-\sqrt{x+3}\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=x+3 \\ y=\sqrt{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0 \\ y^2=x+3 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} y^2=x+3 \\ y\ge 0 \end{cases}$ thay vào phương trình (1) ta được :

$$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+8}+x^3-1=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x-1}+1\right)+\left(\sqrt[3]{x+8}-2\right)+x^3=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{x-1}+1}+\frac{x}{\sqrt[3]{(x+8)^2}+\sqrt[3]{x+8}+4}+x^3=0 \Leftrightarrow x=0$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\left(0;\sqrt{3}\right)$.

Bình luận. *Khi một phương trình nào đó xuất hiện một hay nhiều nhị thức bậc nhất trong căn thức thì việc sử dụng ẩn phụ để đưa phương trình về đa thức bậc cao giúp chúng ta nhìn được mối quan hệ giữa các biến một cách tường minh hơn việc sử dụng các phép thử .*

Bài toán 35.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)\sqrt{4-x}+2x\sqrt{y}=2(x+y) & (1) \\ 2(x-y-1)=\sqrt{(4-x)y} & (2) \end{cases}$

Phân tích. Phương trình (1) có các căn thức chứa nhị thức bậc nhất nên ta có thể sử dụng ẩn phụ để chuyển biểu thức chứa căn về đa thức bậc cao.

Đặt $\begin{cases} \sqrt{4-x}=a \\ \sqrt{y}=b \end{cases} (a,b\ge 0)$. Khi đó ta hoàn toàn đưa (1) về dạng tích bằng cách sử dụng các phép thử như đã nêu ở mục A.II

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} y\ge 0 \\ x\le 4 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} \sqrt{4-x}=a \\ \sqrt{y}=b \end{cases} (a,b\ge 0)$

Khi đó hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} (a+2)(a+b-2)(a+b+2)=0 \\ 2(3-a^2-b^2)=ab \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ 2(a+b)^2-3ab=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ ab=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3},\ b=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3} \\ a=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3},\ b=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

Thay trở lại ta tìm được nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$(x;y)=\left\{\left(\frac{8-2\sqrt{3}}{3};\frac{4-2\sqrt{3}}{3}\right),\left(\frac{8+2\sqrt{3}}{3};\frac{4+2\sqrt{3}}{3}\right)\right\}.$$

NHẬN XÉT.

- ***Trong quá trình giải toán, nếu không bị khống chế về mặt thời gian chúng ta nên thay mối quan hệ giữa các biến x,y vừa tìm được vào phương trình. Nếu phương trình nghiệm đúng với mọi x,y thì dự đoán của chúng ta là chính xác.***
- ***Trong xu hướng ra đề thi theo các cấp độ: nhận biết, thông hiểu và vận dụng . Tôi dự đoán giáo viên ra đề thi sẽ thích sử dụng các hệ phương trình ở mục này hơn bởi nó quyết được một số vấn đề sau:***
  - ***Quen thuộc với đại đa số học sinh.***
  - ***Có thể dễ dàng tách hệ phương trình đã cho thành hai (hay nhiều) hệ phương trình mới chứa những ý đồ khó dễ khác nhau để kiểm tra kiến thức và kỹ năng của học trò.***

B. HỆ PT KHÔNG CÓ MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC BIẾN TRÊN MỘT PHƯƠNG TRÌNH.

Khi chúng ta giải toán có thể bắt gặp rất nhiều hệ phương trình không chứa mối quan hệ giữa các biến trên một phương trình, điển hình như Hệ giải được bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

Ở mục này chúng ta sẽ làm rõ thêm những hệ nào không chứa mối quan hệ giữa các biến và cách giải quyết chúng như thế nào ?

Sau đây tôi xin nêu 3 cách thông thường để xử lý lớp những hệ phương đã nêu:

I. Sử dụng phép đặt ẩn phụ.

Bài toán 1 . *(Thi thử Toán học 24h)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{y-1}}=\dfrac{2}{\sqrt{x+y}} & (1) \\ x^2+y^2+4xy-4x+2y-5=0 & (2) \end{cases}$

Phân tích.

- Chúng ta dễ dàng kiểm chứng các phương trình (1), (2) không thể đưa về dạng tích (có nhân tử).
- Do phương trình (1) chứa căn thức, vậy nên ta sẽ sử dụng các phép thử làm cho các giá trị trong căn thức chính phương:

+) Cho $x=-1$ ta có: $\begin{cases} (1)\to \dfrac{1}{\sqrt{y-1}}=1 \\ (2)\to (y-1)^2=1 \end{cases}$

+) Cho $y=2$ ta có $\begin{cases} (1)\to \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}=1 \\ (2)\to (x+2)^2=1 \end{cases}$

Chúng ta dễ dàng nhận ra sự giống nhau khi thử các giá trị ngẫu nhiên, từ đó suy đoán của chúng ta là hệ phương trình được xây dựng dựa phép đặt ẩn phụ để che giấu ý đồ giải toán.

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x>-2 \\ y>1 \\ x+y>0 \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho được viết lại thành

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{y-1}}=2 \\ 2(x+y)^2=(x+2)^2+(y-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{y-1}}=2 \\ \left(\dfrac{x+2}{x+y}\right)^2+\left(\dfrac{y-1}{x+y}\right)^2=2 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{x+2}}=a\\ \sqrt{\dfrac{x+y}{y-1}}=b\end{cases}(a,b\ge 0)$ ta có hệ $\begin{cases}a+b=2\\ a^4+b^4=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-b\\ (2-b)^4+b^4=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}$

Với $a=b=1$ thay trở lại ta có $\begin{cases}x+y=x+2\\ x+y=y-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\ x=-1\end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(-1;2)$.

Bài toán 2. ***(Thi thử Toán học 24h)***

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+y=28 & (1)\\ \sqrt{2xy+x-3}-\sqrt{x-y}=x-y+3 & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases}x-y\ge 0\\ 2xy+x-3\ge 0\end{cases}$

Hệ đã cho được viết lại thành $\begin{cases}(x-y)^2+(2xy+x)+(y-x)=28\\ \sqrt{2xy+x-3}-\sqrt{x-y}=x-y+3\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}\sqrt{2xy+x-3}=a\\ \sqrt{x-y}=b\end{cases}(a,b\ge 0)$ ta có hệ $\begin{cases}b^4+a^2-b^2=25\\ a-b=b^2+3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b^4+b^3+3b^2+3b-8=0\\ a=b^2+b+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(b-1)(b^3+2b^2+5b+8)=0\\ a=b^2+b+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\ a=5\end{cases}$

Với $\begin{cases}a=5\\ b=1\end{cases}$ thay trở lại ta có hệ $\begin{cases}2xy+x=28\\ x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4;y=3\\ x=-\dfrac{7}{2};y=-\dfrac{9}{2}\end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=\left\{\left(-\dfrac{7}{2};-\dfrac{9}{2}\right),(4;3)\right\}$.

Bài toán 3.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(2x+y-1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)=8\sqrt{x} & (1)\\ \left(\sqrt{x+3}+\sqrt{xy}\right)^2+xy=2x(6-x) & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$

- Trường hợp 1. $x=0$, suy ra hệ đã cho vô nghiệm.
- Trường hợp 2. $x\ne 0$, ta viết lại hệ phương trình đã cho thành

$$\begin{cases}(2x+y-1)\left(\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{y}+1\right)=8\\ \left(\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{y}\right)^2+(2x+y-1)=11\end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} 2x+y-1=a \\ \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{y}=b \end{cases} (b \ge 0)$ hệ trên trở thành

$$\begin{cases} a(b+1)=8 \\ a+b^2=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (11-b^2)(b+1)=8 \\ a=11-b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=2 \end{cases} (do\ b \ge 0)$$

Thay trở lại ta có $\begin{cases} 2x+y=3 \\ \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{3-2x}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=3 \\ \left(1-\sqrt{3-2x}\right)+\left(2-\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}\right)=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=3 \\ \dfrac{2(x-1)}{1+\sqrt{3-2x}}+\dfrac{3(x-1)}{2x+x\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} (do\ x \ge 0)$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=(1;1)$.

Bài toán 4. ***(Thi thử Toán học 24h)***

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+6}+2\sqrt{y^2+3}=5-x+2y & (1) \\ x\sqrt{x^2+6}-y\sqrt{y^2+3}=x^2+y^2-2 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Ta viết lại hệ phương trình đã cho thành

$$\begin{cases} \left(\sqrt{x^2+6}+x\right)+2\left(\sqrt{y^2+3}-y\right)=5 \\ x\left(\sqrt{x^2+6}-x\right)-y\left(\sqrt{y^2+3}+y\right)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x^2+6}+x\right)+2\left(\sqrt{y^2+3}-y\right)=5 \\ \dfrac{6x}{\sqrt{x^2+6}+x}-\dfrac{3y}{\sqrt{y^2+3}-y}=-2 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x^2+6}+x=a\ (a>0) \Rightarrow \sqrt{x^2+6}=a-x \Rightarrow x^2+6=a^2-2ax+x^2 \Rightarrow x=\dfrac{a^2-6}{2a} \\ \sqrt{y^2+3}-y=b\ (b>0) \Rightarrow \sqrt{y^2+3}=b+y \Rightarrow y^2+3=b^2+2by+y^2 \Rightarrow y=\dfrac{3-b^2}{2b} \end{cases}$ (*)

(Để ý là $\begin{cases} a=\sqrt{x^2+6}+x>|x|+x \ge 0 \\ b=\sqrt{y^2+3}-y>|y|-y \ge 0 \end{cases}$)

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a+2b=5 \\ \dfrac{6(a^2-6)}{2a^2}-\dfrac{3(3-b^2)}{2b^2}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=5 \\ \dfrac{36}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-2b \\ \dfrac{36}{(5-2b)^2}+\dfrac{9}{b^2}=13 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=\dfrac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

+) Với $\begin{cases} a=2 \\ b=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ thay vào (*) cho ta $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

+) Với $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$ thay vào (*) cho ta $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$

Thử lại ta thấy, nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\left\{\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{2};1\right)\right\}$.

II. Sử dụng đánh giá trên cả hai phương trình của hệ.

Bài toán 1 . ***(Thi thử K2pi.Net.Vn)***

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-1}+2\sqrt{y+1}=y+\dfrac{9}{4} & (1) \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{y+1}+1}+\dfrac{y+1}{\sqrt{x-1}+1}=\dfrac{1}{3} & (2) \end{cases}$

Phân tích.

- Đặt $\begin{cases} \sqrt{x-1}=a \\ \sqrt{y+1}=b \end{cases} (a,b\ge 0)$ và đưa hệ phương trình về dạng

$$\begin{cases} a+2b=b^2+\dfrac{5}{4} & (3) \\ \dfrac{a^2}{b+1}+\dfrac{b^2}{a+1}=\dfrac{1}{3} & (4) \end{cases}$$

- Ta nhận thấy tính đối xứng ở phương trình (4) nên sẽ dự đoán $a=b=\dfrac{1}{2}$

  Từ đó ta sẽ đánh giá phương trình (3) như sau: $a+b=\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2+1\Rightarrow a+b\ge 1$

  Ta cần đánh giá ở phương trình (4) để đạt được $a+b\le 1$.

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge -1 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x-1}=a \\ \sqrt{y+1}=b \end{cases} (a,b\ge 0)$. Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} a+2b=b^2+\dfrac{5}{4} & (3) \\ \dfrac{a^2}{b+1}+\dfrac{b^2}{a+1}=\dfrac{1}{3} & (4) \end{cases}$$

Từ (3) ta có $a+b=\left(b^2-b+\dfrac{1}{4}\right)+1\Leftrightarrow a+b=\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2+1\Rightarrow a+b\ge 1\ (*)$

Từ (4) ta lại có: $\dfrac{1}{3}=\dfrac{a^2}{b+1}+\dfrac{b^2}{a+1}\ge \dfrac{(a+b)^2}{(a+b)+2}\Rightarrow 3(a+b)^2-(a+b)-2\le 0$

$\Leftrightarrow (a+b-1)(3a+3b+2)\le 0\Leftrightarrow a+b\le 1,\ do\ a,b\ge 0\ (**)$

Từ (*) và (**) suy ra hệ phương trình $\begin{cases}(3)\\(4)\end{cases}$ tương đương với: $a=b=\frac{1}{2}$

Do vậy hệ PT đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(\frac{5}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

Bài toán 2. ***(Thi thử Mathlinks.Vn)***

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-y-1)\sqrt{2(3-y^2)}=2-xy & (1)\\ y\sqrt{5-x^2}=x-y-4 & (2)\end{cases}$

Phân tích.

Ta đoán được nghiệm $(x;y)=(2;-1)$ khi đó : $\begin{cases}(x-y-1)=\sqrt{2(3-y^2)}\\ y=-\sqrt{5-x^2}\end{cases}$

Nên ta sẽ sử dụng đánh giá ở phương trình (1) và sử dụng phân tích thành hằng đẳng thức ở phương trình (2).

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases}3-y^2\ge 0\\ 5-x^2\ge 0\end{cases}$

Áp dụng BĐT $ab\le\frac{a^2+b^2}{2},\forall a,b\in R$. Từ phương trình (1) ta có:

$$2-xy=(x-y-1)\sqrt{2(3-y^2)}\le\frac{(x-y-1)^2+6-2y^2}{2}\Rightarrow(x^2-y^2)-2(x-y)+3\ge 0\ \ (3)$$

Từ phương trình (2) ta lại có:

$$(2)\Leftrightarrow\left(y+\sqrt{5-x^2}\right)^2=-(x^2-y^2)+2(x-y)-3$$

$$\Rightarrow(x^2-y^2)-2(x-y)+3\le 0\ \ (4)$$

Từ (3), (4) suy ra hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}x-y-1=\sqrt{6-2y^2}\\ y=-\sqrt{5-x^2}\\ x^2-y^2-2(x-y)+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\le 0\\ x^2=5-y^2\\ x-y=1+\sqrt{6-2y^2}\\ (6-2y^2)-2\sqrt{6-2y^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=(2;-1)$.

✪ **Bài toán 3.**

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(4y-2)\sqrt{x-1}+2y\sqrt{3y-2}=y^2+3y & (1)\\ (4y+x-3)^3=27y(2-y) & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases}x\ge 1\\ y\ge\frac{2}{3}\end{cases}$

Từ phương trình (2) ta có:

$$\left(4y+x-3\right)^3=27\left(2y-y^2\right)=27\left[1-\left(y-1\right)^2\right]\le 27\Rightarrow 4y+x\le 6\quad (*)$$

Lại có:

$$(1)\Rightarrow y^2+3y=\left(4y-2\right)\sqrt{x-1}+2y\sqrt{3y-2}\le\left(4y-2\right)\sqrt{x-1}+\left(y^2+3y-2\right)$$

$$\Rightarrow\left(2y-1\right)\sqrt{x-1}\ge 1\Leftrightarrow 1\le\left(2y-1\right)^2\left(x-1\right),\ do\ y\ge\frac{2}{3}$$

Suy ra

$$1\le\left(2y-1\right)^2\left(x-1\right)\underset{AM-GM}{\le}\left(\frac{2y-1+2y-1+x-1}{3}\right)^3=\left(\frac{4y+x-3}{3}\right)^3\Rightarrow 4y+x\ge 6\ (**)$$

Từ (*) và (**) ta có hệ đã cho tương đương với $\begin{cases}y-1=0\\4y+x=6\\y=\sqrt{3y-2}\\2y-1=x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

Thử lại ta thấy nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=(2;1)$.

Bài toán 4.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x-1\right)\sqrt{y-2}+\left(y-1\right)\sqrt{x+2}=5 & (1)\\10x^2+5y^2-12xy-x-y=8 & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases}y\ge 2\\x\ge -3\end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có:

$$5=\left(x-1\right)\sqrt{y-2}+\left(y-1\right)\sqrt{x+2}\le\frac{\left(x-1\right)^2+y-2}{2}+\frac{\left(y-1\right)^2+\left(x+2\right)}{2}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-\left(x+y\right)-8\ge 0\qquad (3)$$

Từ phương trình (2) ta lại có:

$$10x^2+5y^2-12xy-x-y=8\Leftrightarrow x^2+y^2-\left(x+y\right)-8=-9x^2+12xy-4y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-\left(x+y\right)-8=-\left(3x-2y\right)^2\le 0\Rightarrow x^2+y^2-\left(x+y\right)-8\le 0\quad (4)$$

Từ (3), (4) cho ta hệ tương đương với $\begin{cases}x-1=\sqrt{y-2}\\y-1=\sqrt{x+2}\\3x-2y=0\\x^2+y^2-\left(x+y\right)-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=(2;3)$.

✪ **Bài toán 5.** ***(Thi thử Toán học 24h)***

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x-2}+\sqrt{2y+2}=\left(x-3y\right)\sqrt{x+y} & (1)\\\left(y+1\right)\sqrt{3x-y-4}=\left(2y+1\right)\sqrt{x+y} & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge -1 \\ 3x - y - 4 \ge 0 \end{cases}$

- Trường hợp 1. $x + y = 0$ hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} \sqrt{2x-2} + \sqrt{2y+2} = 0 \\ (y+1)\sqrt{3x-y-4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

- Trường hợp 2. $x + y > 0$ ta có:

$$PT(1) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2(x-1)}{x+y}} + \sqrt{\frac{2(y+1)}{x+y}} = x - 3y$$

$$\Rightarrow x - 3y = \sqrt{\frac{2(x-1)}{x+y}} + \sqrt{\frac{2(y+1)}{x+y}} \underset{B.C.S}{\le} \sqrt{(1+1)\left(\frac{2(x-1)}{x+y} + \frac{2(y+1)}{x+y}\right)} = 2 \quad (3)$$

Lại có:

$$PT(2) \Leftrightarrow \frac{2y+1}{y+1} = \sqrt{\frac{3x-y-4}{x+y}}, \text{ do } y \ne -1$$

$$\Rightarrow \frac{2y+1}{y+1} = \sqrt{\frac{3x-y-4}{x+y}} \underset{AM-GM}{\le} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3x-y-4}{x+y}\right) = \frac{2x-2}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow (2y+1)(x+y) \le (2x-2)(y+1) \Leftrightarrow x - 3y \ge 2y^2 + 2 \Rightarrow x - 3y \ge 2 \quad (4)$$

Kết hợp (3) và (4) suy ra hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+y} = \dfrac{y+1}{x+y} \\ \dfrac{3-y-4}{x+y} = 1 \\ y = 0 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm $(x;y) = \{(1;-1), (2;0)\}$.

✪ **Bài toán 6.** ***(Thi thử Toán học 24h)***

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4xy + x + 4\sqrt{(2-x)(y+2)} = 14 & (1) \\ x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $(2-x)(y+2) \ge 0$

Từ phương trình (2) ta có: $2 = (x+1)^2 + y^2 \ge 2(x+1)y \Rightarrow y(x+1) \le 1 \quad (*)$

đồng thời $2 = (x+1)^2 + y^2 \Rightarrow |y| \le \sqrt{2} \Rightarrow y + 2 > 0$, kết hợp điều kiện xác định suy ra $2 - x > 0$. Do đó từ (1) cho ta:

$$14 - 4xy - x = 2\sqrt{2-x}\left(2\sqrt{y+2}\right) \underset{AM-GM}{\le} (2-x) + 4(y+2) \Rightarrow y(x+1) \ge 1 \quad (**)$$

Từ (*), (**) suy ra hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} x+1=y \\ \sqrt{2-x}=2\sqrt{y+2} \\ y(x+1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

Thử lại ta thấy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=(-2;1)$.

✪ **Bài toán 7.** ***(Thi thử MathLink.Vn)***

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{\dfrac{y+1}{x+1}}+y\sqrt{\dfrac{x+1}{y+1}}=\dfrac{x+y+2xy}{2} & (1) \\ x^2+y^2-3xy+5y=4\sqrt{x}\left(\sqrt{5y-1}-\sqrt{x}\right) & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge \dfrac{1}{5} \end{cases}$

- Từ phương trình (1) ta lại có:

$$\frac{x+y+2xy}{2}=x\sqrt{\frac{y+1}{x+1}}+y\sqrt{\frac{x+1}{y+1}} \Leftrightarrow \frac{x+y+2xy}{2}=\frac{x(y+1)+y(x+1)}{\sqrt{(x+1)(y+1)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y+2xy}{2}=\frac{x+y+2xy}{\sqrt{(x+1)(y+1)}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+2xy=0 \\ (x+1)(y+1)=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x+1)(y+1)=4,\ do\ x\ge 0, y\ge \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow xy+x+y=3 \Rightarrow 3-xy=x+y\ge 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow xy+2\sqrt{xy}-3\le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{xy}-1\right)\left(\sqrt{xy}+3\right)\le 0 \Leftrightarrow xy\le 1 \qquad (*)$$

- Từ phương trình (2) ta có: $x^2+y^2-3xy+5y=4\sqrt{x}\left(\sqrt{5y-1}-\sqrt{x}\right)$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+\left[(5y-1)-4\sqrt{x}.\sqrt{5y-1}+4x\right]=xy-1$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+\left(\sqrt{5y-1}-2x\right)^2=xy-1 \Rightarrow xy\le 1 \qquad (**)$$

Từ (*), (**) suy ra hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} x=y>0 \\ xy=1 \\ \sqrt{5y-1}=2x \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;1)$.

Bài toán 8.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y}\left(\sqrt{y}+1\right)=\sqrt{x^2+y^2}+2 & (1) \\ x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=\dfrac{x^2+4y-4}{2} & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 1 \end{cases}$

- Từ phương trình (2) :

$$x^2 + 4y - 4 = x.2\sqrt{y-1} + y.2\sqrt{x-1} \le \frac{x^2+4y-4}{2} + \frac{y^2+4x-4}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+4y-4}{2} \le \frac{y^2+4x-4}{2} \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 4y - 4x \le 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-4) \le 0 \quad (*)$$

- Từ phương trình (1) :

$$\sqrt{x+y} - 2 = \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{xy+y^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}+2} = \frac{x(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{xy+y^2}} \Rightarrow (x-y)(x+y-4) \ge 0 \quad (**)$$

Suy ra hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 2\sqrt{y-1} \\ y = 2\sqrt{x-1} \\ (x-y)(x+y-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y) = (2;2)$.

Bài toán 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y+1}} + \sqrt{\dfrac{y}{x+1}} = \sqrt{\dfrac{2(x+y)}{y+1}} & (1) \\ (y-1)\sqrt{x-1} = \dfrac{x^2-y}{2} & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$

- Từ phương trình (2) ta có:

$$\frac{x^2-y}{2} = (y-1)\sqrt{x-1} \le \frac{(y-1)^2+(x-1)}{2} \Leftrightarrow (x-y)(x+y-1) \le 0$$

$$\Rightarrow x \ge y \text{ (do } \begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 0 \end{cases} \text{)}$$

- Với $x \ge y$ từ phương trình (1) cho ta:

$$VT(1) = \sqrt{\frac{x}{y+1}} + \sqrt{\frac{y}{x+1}} \underset{B.C.S}{\le} \sqrt{(1+1)\left(\frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}\right)}$$

$$\underset{do\ x \ge y}{\le} \sqrt{(1+1)\left(\frac{x}{y+1} + \frac{y}{y+1}\right)} = \sqrt{2\left(\frac{x+y}{y+1}\right)} = VP(1)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

+) Với $x = y$ thay trở lại phương trình (2) ta có: $2(x-1)\sqrt{x-1} = x(x-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ ban đầu là $(x;y) = \{(1;1),(2;2)\}$.

III. Tìm nhân tử bằng kết hợp hai phương trình của hệ.

Bài toán 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3+x^2}+2\sqrt{x}=3+\sqrt{y} & (1) \\ \sqrt{3+y^2}+2\sqrt{y}=3+\sqrt{x} & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Lấy $(1)-(2)$ theo từng vế ta có: $\sqrt{3+x^2}+3\sqrt{x}+3=\sqrt{3+y^2}+3\sqrt{y}+3 \quad (*)$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{3+t^2}+3\sqrt{t}+3,\ t \ge 0.$ Ta có:

$f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{3+t^2}}+\dfrac{3}{2\sqrt{t}}+3>0, \forall t>0$ nên hàm $f(t)$ đồng biến.

Từ $(*) \Rightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$

Với $x=y$ thay vào (1) ta được phương trình

$$\sqrt{3+x^2}+\sqrt{x}-3=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3+x^2}-2\right)+\left(\sqrt{x}-1\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{\sqrt{3+x^2}+2}+\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x+1}{\sqrt{3+x^2}+2}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)=0 \Leftrightarrow x=1$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;1)$.

Bài toán 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2+x+\sqrt{x+2}=2y^2+y+\sqrt{2y+1} & (1) \\ x^2+2y^2-2x+y-2=0 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \ge -2 \\ y \ge -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Lấy (1) – (2) theo từng vế và biến đổi ta có:

$$x^2+3x+2+\sqrt{x+2}=4y^2+2y+\sqrt{2y+1}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(x+1)+\sqrt{x+2}=4y^2+2y+\sqrt{2y+1}$$

Xét hàm số $f(t)=t^2+t+\sqrt{t+1}$, $t \ge -1$ ta có:

$$f'(t)=2t+1+\frac{1}{2\sqrt{t+1}}=2(t+1)+\frac{1}{4\sqrt{t+1}}+\frac{1}{4\sqrt{t+1}}-1$$

$$\underset{AM-GM}{\ge} 3\sqrt[3]{2(t+1).\frac{1}{16(t+1)}}-1=\frac{3}{2}-1>0$$

Hay hàm số $f(t)$ đồng biến, do vậy từ $f(x+1)=f(2y) \Leftrightarrow x+1=2y$

Với $x=2y-1$ thay vào phương trình (2) ta có $6y^2-7y+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=\dfrac{1}{6} \end{array}\right.$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left\{(1;2),\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{6}\right)\right\}$.

Bài toán 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+5}=3y+\sqrt{y^2+4} & (1)\\ x^2-y^2-3x+3y+1=0 & (2)\end{cases}$

Lời giải. Lấy $(1)+(2)$ theo từng vế ta có: $(x-1)^2+\sqrt{(x-1)^2+4}=y^2+\sqrt{y^2+4}$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t+4},\ t\ge 0$ ta có $f'(t)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{t+4}}>0,\forall t\ge 0.$

Suy ra $f(t)$ đồng biến, do đó từ $f\left((x-1)^2\right)=f\left(y^2\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-1\\ y=1-x\end{array}\right.$

+) Với $y=x-1$ thay vào (2) ta có $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow (x;y)=\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right).$

+) Với $y=1-x$ thay vào (2) ta có $x=\dfrac{3}{4}\Rightarrow (x;y)=\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{4}\right).$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\left\{\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{4}\right)\right\}.$

Bài toán 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (y+1)^2+y\sqrt{y^2+1}=x+\dfrac{3}{2} & (1)\\ x+\sqrt{x^2-2x+5}=1+2\sqrt{2x-4y+2} & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $2x-4y+2\ge 0.$

Ta có $(1)\Leftrightarrow 2x-4y+2=\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2$ thế vào phương trình (2) ta được:

$$(x-1)+\sqrt{(x-1)^2+4}=2\sqrt{\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2}\Leftrightarrow \frac{x-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}=y+\sqrt{y^2+1}$$

Xét hàm số

$$f(t)=t+\sqrt{t^2+1}\Rightarrow f'(t)=1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}>0,\ do\ \sqrt{t^2+1}>|t|\ge -t$$

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến, do vậy từ $f\left(\dfrac{x-1}{2}\right)=f(y)\Leftrightarrow x=2y+1$

Với $x=2y+1$ thay vào (1) ta có

$$\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{y^2+1}=2-y\\ \sqrt{y^2+1}=-2-y\end{array}\right.\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}$$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{4}\right).$

Bài toán 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{5y-x-y^2-1}=y-x+2 & (1)\\ \sqrt{3y-x}+2\sqrt{x-1}=x+2y-1 & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \ge 1 \\ 3y - x \ge 0 \\ 5x - y^2 - x - 1 \ge 0 \end{cases}$

Lấy $(1)+(2)$ theo từng vế ta được:

$\sqrt{5y - x - y^2 - 1} + \sqrt{3y - x} + 2\sqrt{x-1} = 3y + 1 \quad (*)$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$VT(*) \le \frac{5y - x - y^2 - 1 + 1}{2} + \frac{1 + 3y - x}{2} + 1 + (x-1) = \frac{-y^2 + 8y + 1}{2} =$$

$$= \frac{-(y^2 - 2y + 1) + 6y + 2}{2} = \frac{6y + 2 - (y-1)^2}{2} \le \frac{6y+2}{2} = 3y + 1 = VP(*)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 5y - x - y^2 - 1 = 1 \\ 3y - x = 1 \\ x - 1 = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Thử lại ta thấy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y) = (2;1)$.

Bài toán 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2x - 2 = \sqrt{-y^2 - 4y - 2} & (1) \\ 11 + y - 6x = \sqrt{10 - 4x - 2x^2} & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} -y^2 - 4y - 2 \ge 0 \\ 10 - 4x - 2x^2 \ge 0 \end{cases}$

Lấy $(1)+(2)$ theo từng vế ta được:

$x^2 - 4x + y + 9 = \sqrt{-y^2 - 4y - 2} + \sqrt{10 - 4x - 2x^2} \quad (*)$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$VP(*) = \sqrt{-y^2 - 4y - 2} + \frac{1}{2}\left(2.\sqrt{10 - 4x - 2x^2}\right) \le \frac{-y^2 - 4y - 2 + 1}{2} + \frac{10 - 4x - 2x^2 + 4}{4} =$$

$$= \frac{-2x^2 - 2y^2 - 4x - 8y + 12}{4} := A$$

Ta sẽ chứng minh $VT(*) \ge A$, thật vậy:

$$x^2 - 4x + y + 9 \ge \frac{-2x^2 - 2y^2 - 4x - 8y + 12}{4} \Leftrightarrow 6x^2 - 12x + 2y^2 + 12y + 24 \ge 0$$

$\Leftrightarrow 6(x-1)^2 + 2(y+3)^2 \ge 0$ (luôn đúng).

Từ $\begin{cases} VT(*) \ge A \\ VP(*) \le A \end{cases}$ nên $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \sqrt{-y^2 - 4y - 2} \\ 2 = \sqrt{10 - 4x - 2x^2} \\ x - 1 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y) = (1;-3)$.

Bài toán 7. ***(Thi thử Toán học 24h)***

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{xy} + \sqrt{x-2} = x + y - 2 & (1) \\ xy - 2x - y + 2 = 2\sqrt{x-2} & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \ge 2 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Lấy $(2)-(1)$ theo từng vế ta có:

$$xy - \sqrt{xy} = x + 3\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \left(xy - \sqrt{xy} + \frac{1}{4}\right) = (x-2) + 3\sqrt{x-2} + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{xy} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{x-2} + \frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{xy} - \sqrt{x-2} = 2 \\ \sqrt{xy} + \sqrt{x-2} = -1 \ (loại) \end{array}\right.$$

Với $\sqrt{xy} = 2 + \sqrt{x-2}$ thay trở lại vào hệ ta có:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x-2} = x + y - 4 \\ \sqrt{xy} = 2 + \sqrt{x-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\sqrt{xy} - 2\right) = x + y - 4 \\ \sqrt{xy} = 2 + \sqrt{x-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = 0 \\ \sqrt{xy} = 2 + \sqrt{x-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \ge 0 \\ x - 2 = \sqrt{x-2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 2 \\ x = y = 3 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y) = \{(2;2), (3;3)\}$.

Bài toán 8.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} y\sqrt{x-2} + y^2 = x - 1 & (1) \\ 3y\sqrt{x-2} - 2\sqrt{(x-2)(2y-1)} = x - 2y & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \ge 2 \\ y \ge \frac{1}{2} \end{cases}$

Lấy $(2)-(1)$ theo từng vế ta có:

$$2y\sqrt{x-2} - y^2 - 2\sqrt{(x-2)(2y-1)} - y^2 = 1 - 2y$$

$$\Leftrightarrow (x-2) - 2\sqrt{(x-2)(2y-1)} + (2y-1) - \left[y^2 - 2y\sqrt{x-2} + (x-2)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2} - \sqrt{2y-1}\right)^2 - \left(y - \sqrt{x-2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x-2} = y + \sqrt{2y-1} \\ \sqrt{2y-1} = y \end{array}\right.$$

+) Với $\sqrt{2y-1} = y^2 \Leftrightarrow y = 1$ thay vào (1) cho ta $x = 3 \Rightarrow (x;y) = (3;1)$.

+) Với $2\sqrt{x-2} = y + \sqrt{2y-1}$ thay vào (1) cho ta:

$5y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 1, do\ y \ge \frac{1}{2}$, từ đó suy ra $(x;y) = (3;1)$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y) = (3;1)$.

CHƯƠNG III. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TỔNG HỢP

A. MỘT SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG

Bài toán 1.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y-3\sqrt{x+3}=3\sqrt{y-5} & (1) \\ \sqrt{x^2+16(y-x)}+y=2\sqrt{xy} & (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 5 \\ x^2+16(y-x)\ge 0 \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có $y-5-3\sqrt{y-5}+x-3\sqrt{x+3}+5=0$

Đặt $t=\sqrt{y-5}\ge 0$

Khi đó ta có $t^2-3t+x-3\sqrt{x+3}+5=0$

$\Delta_t=9-4\left(x+5-3\sqrt{x+3}\right)\ge 0\Leftrightarrow 4(x+3)-12\sqrt{x+3}-1\le 0$

$\Leftrightarrow 0\le\sqrt{x+3}\le\dfrac{6+2\sqrt{10}}{4}\Rightarrow x<16$

Mặt khác từ (2) ta có

$\sqrt{x^2+16(y-x)}-\sqrt{xy}-\sqrt{xy}+y=0$

$\Leftrightarrow (x-y)\left(\dfrac{x-16}{\sqrt{x^2+16(y-x)}+\sqrt{xy}}\right)-(x-y)\dfrac{y}{y+\sqrt{xy}}=0$

$\Leftrightarrow (x-y)\left(\dfrac{x-16}{\sqrt{x^2+16(y-x)}+\sqrt{xy}}-\dfrac{y}{y+\sqrt{xy}}\right)=0$

Do $0\le x<16; y\ge 5\Rightarrow\dfrac{x-16}{\sqrt{x^2+16(y-x)}+\sqrt{xy}}-\dfrac{y}{y+\sqrt{xy}}<0$

Với $x=y\Rightarrow 2x=3\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}\right)$

$\Leftrightarrow 2x^2-9x+9=9\sqrt{x^2-2x-15}$

$\Rightarrow x^4-9x^3+9x^2+324=0$

$\Rightarrow (x-6)^2\left(x^2+3x+9\right)=0$

$\Rightarrow x=6$

Thử lại thỏa mãn

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=(6;6)$.

Bài toán 2.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 13\sqrt{x-1}+9\sqrt{y+2}=16x & (1) \\ (x^2+x)\sqrt{x-y+3}=2x^2+x+y+1 & (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge -2 \\ x-y+3\ge 0 \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta có $(x^2+x)\sqrt{x-y+3}=2(x^2+x)-x+y+1$

$$(x^2+x)\left(\sqrt{x-y+3}-2\right)+x-y-1=0 \Leftrightarrow (x^2+x)\frac{x-y-1}{\sqrt{x-y+3}+2}+x-y-1=0$$

$$(x-y-1)\left(\frac{x^2+x}{\sqrt{x-y+3}+2}+1\right)=0$$

Với $x\ge 1 \Rightarrow \dfrac{x^2+x}{\sqrt{x-y+3}+2}+1>0$

Nên ta có $x-y-1=0 \Leftrightarrow y=x-1$ thế vào phương trình (1) ta được

$$13\sqrt{x-1}+9\sqrt{x+1}=16x \Leftrightarrow 13\left(x-1-\sqrt{x-1}+\frac{1}{4}\right)+3\left(x+1-3\sqrt{x+1}+\frac{9}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 13\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\sqrt{x+1}-\frac{3}{2}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=\dfrac{1}{2} \\ \sqrt{x+1}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5}{4} \Rightarrow y=\frac{1}{4}\ (TM)$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=\left(\dfrac{5}{4};\dfrac{1}{4}\right)$.

Bài toán 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{4-2y}+\sqrt{5+2y-(x-1)^2}=5 & (1) \\ 3x^4+(x-y)^2=6x^3y+y^2 & (2) \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Lời giải.

Từ phương trình (2) ta có $3x^4+x^2-2xy+y^2=6x^3y+y^2$

$$\Leftrightarrow 3x^3(x-2y)+x(x-2y)=0 \Leftrightarrow x(x-2y)(3x^2+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2y \end{array}\right.$$

Với $x=0$ thế vào (1) ta có $\sqrt{4-2y}+\sqrt{4+2y}=4 \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le y\le 2 \\ \sqrt{16-4y^2}=4 \end{cases} \Leftrightarrow y=0$

Với $x=2y$ thế vào (1) ta có $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+\sqrt{4+3x-x^2}=5$ (*)

Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}\ \left(t\ge 0\right)\Rightarrow \sqrt{4+3x-x^2}=\dfrac{t^2-5}{2}$

Thế vào (*) ta có $t+\dfrac{t^2-5}{2}=5\Leftrightarrow t^2+2t-15=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3\ (L)\\ t=5\end{array}\right.$

Khi $t=5$ ta có $\sqrt{4+3x-x^2}=10\Leftrightarrow x^2-3x+96=0\ (VN)$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=(0;0)$.

Bài toán 4.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-y^2=1 & (1)\\ \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^3(x+y)^5=0 & (2)\end{cases}$ $\left(x,y\in \mathbb{R}\right)$

Lời giải. Điều kiện $\left[\begin{array}{l} x\le -1\\ x\ge 1\end{array}\right.$

Từ phương trình (1) ta có $y^2=x^2-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{x^2-1}\\ y=-\sqrt{x^2-1}\end{array}\right.$

❖ Với $y=\sqrt{x^2-1}$ hay vào phương trình (2) ta được

$(x-y)^3(x+y)^5=1\Leftrightarrow \left(x^2-y^2\right)^3(x+y)^2=1\Leftrightarrow (x+y)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=1\\ x+y=-1\end{array}\right.$

- $x+y=1\Leftrightarrow y=1-x\Rightarrow \sqrt{x^2-1}=1-x\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1\\ x^2-1=(1-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=0$
- $x+y=-1\Leftrightarrow y=-1-x\Rightarrow \sqrt{x^2-1}=-1-x\Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1\\ x^2-1=(1+x)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow y=0$

❖ Với $y=-\sqrt{x^2-1}$ hay vào phương trình (2) ta được

$(x+y)^3(x+y)^5=1\Leftrightarrow (x+y)^8=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=1\\ x+y=-1\end{array}\right.$

- $x+y=1\Leftrightarrow y=1-x\Rightarrow \sqrt{x^2-1}=x-1\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1\\ x^2-1=(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=0$
- $x+y=-1\Leftrightarrow y=-1-x\Rightarrow \sqrt{x^2-1}=x+1\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1\\ x^2-1=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow y=0$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\{(1;0),(-1;0)\}$.

Bài toán 5.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\left(x^2-1\right)+\left(xy+3\right)y=x^2+y^2 & (1) \\ \left(xy+3\right)x+y\left(y^2+1\right)=0 & (2) \end{cases}$ $\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Lời giải.

❖ Xét $x=0\Rightarrow y=0$ là nghiệm của hệ phương trình

❖ Với $x\neq 0$ khi đó từ phương trình (2) của hệ ta có $xy+3=\dfrac{-y^3-y}{x}$

Thế vào phương trình (1) suy ra

$$x\left(x^2-1\right)-\left(\frac{y^3+y}{x}\right)y=x^2+y^2\Leftrightarrow x^4-x^2-y^4-y^2=x\left(x^2+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x^4-y^4\right)-\left(x^2+y^2\right)=x\left(x^2+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2-x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=0\Rightarrow x=0;\ y=0\ \ (L) \\ x^2-y^2-x-1=0\Rightarrow y^2+1=x^2-x\ \ (*) \end{array}\right.$$

Thế (*) vào (2) ta có $y\left(x^2-x\right)+\left(xy+3\right)x=0\Leftrightarrow 2xy-y+3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{y-3}{2y}$ thế vào (2) ta có

$$y^3+y+\left(\frac{y-3}{2y}.y+3\right)\frac{y-3}{2y}=0\Leftrightarrow 4y^4+5y^2-9=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y^2=1 \\ y^2=-\dfrac{9}{4}\ \ (L) \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=1\Rightarrow x=-1 \\ y=-1\Rightarrow x=2 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=\left\{(0;0),(-1;1),(2;-1)\right\}$.

Bài toán 6.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3+3xy=1 & (1) \\ \sqrt{(4-x)(13-y)}=\dfrac{2x+3y+25}{2x+y+2} & (2) \end{cases}$ $\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} 2x+y+2\neq 0 \\ (4-x)(13-y)\geq 0 \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có

$$\Leftrightarrow x^3+y^3+3xy-1=0\Leftrightarrow(x+y)^3-3xy(x+y)+3xy-1=0$$

$$\Leftrightarrow\left[(x+y)^3-1\right]-3xy(x+y-1)=0\Leftrightarrow(x+y-1)\left[(x+y)^2+x+y+1-3xy\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x+y=1 \\ x^2+y^2-xy+x+y+1=0\ \ (*) \end{array}\right.$$

Ta có $(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2}(y+1)^2=0 \Rightarrow x=y=-1$

Thay vào phương trình thứ (2) không thỏa mãn

Với $y=1-x$ thay vào phương trình thứ hai ta có

$$\sqrt{(4-x)(12+x)}=\frac{28-x}{x+3}\ \left(\forall x:-12\le x\le 4;\ x\ne -3\right)$$

$$\Leftrightarrow (4-x)(12+x)=\left(\frac{28-x}{x+3}\right)^2 \Leftrightarrow x^4+14x^3+10x^2-272x+352=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+6x-22\right)\left(x^2+8x-16\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4\pm 4\sqrt{2} \\ x=-3\pm\sqrt{31}\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện suy ra $\left[\begin{array}{l} x=4\sqrt{2}-4 \Rightarrow y=5-4\sqrt{2} \\ x=\sqrt{31}-3 \Rightarrow y=4-\sqrt{31}\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là

$(x;y)=\left\{\left(4\sqrt{2}-4;5-4\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{31}-3;4-\sqrt{31}\right)\right\}$.

Bài toán 7.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(1+\left|\frac{x}{y}\right|\right)^4+\left(1+\left|\frac{y}{x}\right|\right)^4=32 & (1)\\ x^2+y^2+x^2y+2x+y+6=0 & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $x,y\ne 0$. Ta có:

Phương trình $(1) \Leftrightarrow \left(1+\left|\frac{x}{y}\right|\right)^4+\left(1+\left|\frac{y}{x}\right|\right)^4=(1+1)^4+\left(1+\frac{1}{1}\right)^4$

Xét hàm số $f(t)=(t+1)^4+\left(1+\frac{1}{t}\right)^4$, $t>0$.

Ta có $f'(t)=4(t+1)^3+4\left(\frac{1}{t}+t\right)^3>0, \forall t>0$ hay hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$

Do vậy $f\left(\left|\frac{x}{y}\right|\right)=f(1) \Leftrightarrow \left|\frac{x}{y}\right|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=-y.\end{array}\right.$

+) Với $x=y$ thay vào (2) ta có phương trình $x^3+2x^2+3x+6=0 \Leftrightarrow x=-2$

+) Với $x=-y$ thay vào (2) ta có phương trình $-x^3+2x^2+x+6=0 \Leftrightarrow x=3$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=\left\{(-2;-2),(3;-3)\right\}$.

Bài toán 8.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(3y-7)\sqrt{3y-1}=(3x-4)\sqrt{3x+2} & (1)\\ \sqrt[3]{3y-1}.\sqrt{3y-5}=8x-12 & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \ge -\dfrac{2}{3} \\ y \ge \dfrac{5}{3}. \end{cases}$

Từ phương trình (2) suy ra $8x - 12 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{3}{2}$.

Đặt $u = \sqrt{3y-1}\,(u \ge 2),\ v = \sqrt{3x+2}\,\left(v \ge \sqrt{7}\right)$

Từ phương trình (1) cho ta

$u^3 - 6u = v^3 - 6v \Leftrightarrow (u-v)\left(u^2 + uv + v^2 - 6\right) = 0 \Leftrightarrow u = v$,

do $\begin{cases} u \ge 2 \\ v \ge \sqrt{7} \end{cases} \Rightarrow u^2 + v^2 + uv - 6 > 0$.

Với $u = v \Rightarrow y = x + 1$, thay vào (2) ta có $\sqrt[3]{3x+2}.\sqrt{3x-2} = 8x - 12\ (*)$.

Đặt $\sqrt{3x-2} = a\left(a \ge \sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)$. Phương trình đã cho trở thành

$$a\sqrt[3]{a^2+4} = \frac{8\left(a^2+2\right)}{3} - 12 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{\frac{1}{a} + \frac{4}{a^3}} + \frac{20}{a^2} = 8.$$

Hàm số $f(a) = 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{a} + \dfrac{4}{a^3}} + \dfrac{20}{a^2}$, nghịch biến trên $\left[\sqrt{\dfrac{5}{2}}; +\infty\right)$ và $f(2) = 0$

Suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất x = 2.

Hay hệ phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$

Bài toán 9.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^4 - 4y^3 = 4\left(x\sqrt{y^2 - x^2} + 6\right) & (1) \\ x + y + \sqrt{y^2 - x^2} = 2 & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện $|y| \ge |x|\ (*)$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow x + \sqrt{y^2 - x^2} = 2 - y$

Bình phương hai vế và rút gọn ta được $x\sqrt{y^2 - x^2} = 2 - 2y$

Thế vào phương trình (1) ta có $y^4 - 4y^3 = 4(8 - 2y) \Leftrightarrow y^4 - 4y^3 + 8y - 32 = 0$

$$\left(y^2 - 2y\right)^2 - 4\left(y^2 - 2y\right) - 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 - 2y = 8 \\ y^2 - 2y = -4\ (VN) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 4 \\ y = -2 \end{array}\right.$$

Với $y=4 \Rightarrow x\sqrt{16-x^2}=-6 \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x^4-16x^2+36=0 \end{cases} \Rightarrow x=-\sqrt{8 \pm 2\sqrt{7}}$

Thỏa mãn điều kiện (*)

Với $y=-2 \Rightarrow x\sqrt{16-x^2}=6 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^4-16x^2+36=0 \end{cases} \Rightarrow x=\sqrt{8 \pm 2\sqrt{7}}$

Đối chiếu điều kiện (*) $\Rightarrow y=-2,\ x=\sqrt{8-2\sqrt{7}}$ (TM)

Thử lại ta có nghiệm của hệ phương trình là

$(x;y)=\left\{\left(-\sqrt{8 \pm 2\sqrt{7}};4\right), \left(8-2\sqrt{7};-2\right)\right\}$.

Bài toán 10.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2=\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(x^2-y^3+3y-2\right) & (1) \\ x^2+(y+1)^2=2\left(1+\dfrac{1-x^2}{y}\right) & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $y \ne 0$.

Phương trình (2) tương đương với $y\left(x^2+y^2+2y+1\right)=2\left(y+1-x^2\right)$

$\Leftrightarrow x^2(y+2)+y^3+2y^2-y-2=0 \Leftrightarrow x^2(y+2)+(y+2)\left(y^2-1\right)=0$

$\Leftrightarrow (y+2)\left(x^2+y^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ x^2+y^2-1=0 \end{array}\right.$

+) Với $y=-2$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có

$4x^2=x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ \sqrt{x^2+1}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2\sqrt{2}. \end{array}\right.$

+) Với $x^2+y^2=1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có $4\left[\left(x^2+1\right)-1\right]=\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(x^2-y^3+3y-2\right)$

$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=x^2-y^3+3y-2 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+1}-x^2+y^3-3y-2=0$

❖ Xét hàm số $f(x)=4\sqrt{x^2+1}-x^2$ với $x \in [-1;1]$.

Ta có hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và

$f'(x)=\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+1}}-2x;\quad f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x\left(\dfrac{2-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \notin [-1;1] \end{array}\right.$

Suy ra $\underset{[-1;1]}{Min} f(x)=Min\{f(-1);\ f(0);\ f(1)\}=f(0)=4$.

❖ Xét hàm số $g(y) = y^3 - 3y - 2$ với $y \in [-1;1]$. Ta có hàm số $g(y)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $g'(y) = 3y^2 - 3;\ g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$

Suy ra $\underset{[-1;1]}{Min}\, g(y) = Min\{g(-1);\, g(0);\, g(1)\} = g(0) = -4$

Từ đó ta có $f(x) + g(y) \ge 0,\ \forall x, y \in [-1;1]$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

Thử lại ta có tập nghiệm của hệ $T = \left\{(0;-2), \left(2\sqrt{2};-2\right), \left(-2\sqrt{2};-2\right), (0;1)\right\}$.

Bài toán 11. *(Trích HSG Nghệ An năm 2014)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{5x+y} + \sqrt{2x+y} = 3 & (1) \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 1 & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} 5x + y \ge 0 \\ 2x + y \ge 0 \end{cases}$

Từ phương trình (1) của hệ phương trình ta có

$\sqrt{5x+y} + \sqrt{2x+y} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{5x+y} = 3 - \sqrt{2x+y}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \sqrt{2x+y} \ge 0 \\ 5x + y = 2x + y + 9 - 6\sqrt{2x+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \sqrt{2x+y} \ge 0 & (3) \\ \sqrt{2x+y} = \dfrac{3-x}{2} & (4) \end{cases}$

Từ (4) ta có $\begin{cases} x \le 3 \\ y = \dfrac{x^2 - 14x + 9}{4} \end{cases}$

Thế vào phương trình thứ hai ta được

$\dfrac{3-x}{2} + x - \dfrac{x^2 - 14x + 9}{4} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 16x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 8 \pm \sqrt{57}$

Đối chiếu các điều kiện suy ra nghiệm thỏa mãn là $x = 8 - \sqrt{57} \Rightarrow y = \dfrac{9 - \sqrt{57}}{2}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) = \left(8 - \sqrt{57}; \dfrac{9 - \sqrt{57}}{2}\right)$.

Bài toán 12. *(Trích tạp chí TH&TT số 439 – tháng 01 năm 2014)*

Giải hệ phương trình

$\begin{cases} 4x^2 = \left(\sqrt{x^2+1} + 1\right)\left(x^2 - y^3 + 3y - 2\right) & (1) \\ \left(x^2 + y^2\right)^2 + 1 = x^2 + 2y & (2) \end{cases}$ $(x, y \in R)$

Lời giải.

Từ phương trình (2) ta có $\left(x^2 + y^2\right)^2 - \left(x^2 + y^2\right) = -\left(y^2 - 2y + 1\right)$

$\Leftrightarrow \left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 + y^2 - 1\right) = -(y-1)^2 \Rightarrow 0 \le x^2 + y^2 \le 1$. Do đó:

$$\begin{cases} x^2 \le x^2 + y^2 \le 1 \\ y^2 \le x^2 + y^2 \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases} \quad (*)$$

Từ phương trình (1) ta lại có: $4\left[\left(x^2+1\right)-1\right] = \left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(x^2 - y^3 + 3y - 2\right)$

$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x^2+1}-1\right) = x^2 - y^3 + 3y - 2 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+1} - x^2 + y^3 - 3y - 2 = 0 \quad (*)$

❖ Xét hàm số $f(x) = 4\sqrt{x^2+1} - x^2$ với $x \in [-1;1]$. Ta có hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và

$$f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} - 2x; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\left(\frac{2-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \notin [-1;1] \end{array}\right.$$

Suy ra $\underset{[-1;1]}{Min} f(x) = Min\{f(-1); f(0); f(1)\} = f(0) = 4$.

❖ Xét hàm số $g(y) = y^3 - 3y - 2$ với $y \in [-1;1]$. Ta có hàm số $g(y)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $g'(y) = 3y^2 - 3$; $g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$

Suy ra $\underset{[-1;1]}{Min} g(y) = Min\{g(-1); g(0); g(1)\} = g(0) = -4$

Từ đó ta có $f(x) + g(y) \ge 0, \forall x, y \in [-1;1]$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

Thử lại ta thấy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1. \end{cases}$

Nhận xét. *Ta có thể giải quyết bài toán một cách ngắn gọn hơn từ việc giải quyết phương trình (*) như sau*

$$(*) \Leftrightarrow \left(x^2+1\right) - 4\sqrt{x^2+1} + 3 = y^3 - 3y + 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}-3\right) = (y+2)(y-1)^2$$

Với $|x| \le 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} - 1 \ge 0 \\ \sqrt{x^2+1} - 3 < 0 \end{cases}$ *đồng thời* $|y| \le 1 \Rightarrow (y+2)(y-1)^2 \ge 0$

Từ đó suy ra $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} - 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1. \end{cases}$

Bài toán 13.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt[4]{y+3} + x^2 + x = 8 & (1) \\ \sqrt{y+3} + y = x^2 - x - 3 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} y \ge -3 \\ x \ge 1 \end{cases}$

Từ phương trình (2) của hệ phương trình ta có

$$y+3+\sqrt{y+3}+\frac{1}{4}=x^2-x+\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left(\sqrt{y+3}+\frac{1}{2}\right)^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{y+3}+\frac{1}{2}=x-\frac{1}{2}\\ \sqrt{y+3}+\frac{1}{2}=-x+\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{y+3}=x-1\\ \sqrt{y+3}=-x\quad(L)\end{array}\right.$$

Với $\sqrt{y+3}=x-1\Leftrightarrow\sqrt[4]{y+3}=\sqrt{x-1}\ (do\ x\geq 1)$

Thế vào phương trình (1) ta có

$$2\sqrt{x-1}+x^2+x=8\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x-1}-1\right)+x^2+x-6=0$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+(x-2)(x+3)=0\Leftrightarrow(x-2)\left(\frac{2}{\sqrt{x-1}+1}+x+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=-2$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(2;-2)$.

Bài toán 14.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+\sqrt{xy}=3y & (1)\\ 4\sqrt{(x+2)(y+2x)}=3(x+3) & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases}4x^2+(4x-9)(x-y)\geq 0\\ xy\geq 0\\ (x+2)(y+2x)\geq 0\end{cases}$

Dễ thấy $(x;y)=(0;0)$ không là nghiệm của hệ. Từ phương trình (1) suy ra $y>0$ kết hợp với điều kiện $xy\geq 0\Rightarrow x>0$. Do đó:

$$(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}-2y\right)+\left(\sqrt{xy}-y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{4\left(x^2-y^2\right)+(4x-9)(x-y)}{\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+2y}+\frac{y(x-y)}{\sqrt{xy}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left[\frac{8x+4y-9}{\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+2y}+\frac{y}{\sqrt{xy}+y}\right]=0\ (3)\ .$$

Với $x>0,\ y>0$ từ

$$(2)\Rightarrow\sqrt{y+2x}=\frac{3}{4}\left(\frac{x+3}{\sqrt{x+2}}\right)=\frac{3}{4}\left(\sqrt{x+2}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)\geq\frac{3}{4}.2\sqrt{\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}}}=\frac{3}{2}\Rightarrow 4(y+2x)\geq 9$$

Kết hợp với (3) cho ta: $x=y$. Thay trở lại vào (2) ta có phương trình:

$$4\sqrt{3x(x+2)}=3(x+3)\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ 39x^2+42x-81=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Thử lại ta thấy, hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;1)$.

Bài toán 15. *(Trích tạp chí TH&TT số 418 – tháng 04 năm 2012)*
Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y} & (1) \\ (x+1)\left[y+\sqrt{xy}+x(1-x)\right]=4 & (2) \end{cases} \quad (x,y\in R)$$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)\ge 0 \end{cases}$ (*)

Ta có $(1)\Leftrightarrow\left[\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}-y\right]+(\sqrt{x}-\sqrt{y})=0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)(y+\sqrt{xy}-2)}{\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y}+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{y+\sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right]=0 \qquad (3)$$

Với điều kiện (*) , PT $(2)\Leftrightarrow y+\sqrt{xy}=x(x-1)+\frac{4}{x+1}\Leftrightarrow y+\sqrt{xy}=\frac{x^3-x+4}{x+1}$

Xét hàm số $f(x)=\frac{x^3-x+4}{x+1}$ trên nửa khoảng $[0;+\infty)$, ta có

$f'(x)=\frac{2x^3+3x^2-5}{(x+1)^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$. Ta có bảng biến thiên :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	4	↘	2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\underset{[0;+\infty)}{Min} f(x)=2$. Do đó :

$y+\sqrt{xy}=\frac{x^3-x+4}{x+1}\ge 2,\ \forall x\ge 0$. Kết hợp với (3) cho ta $x=y$.

Thay vào (2) ta có phương trình :

$$x^3-2x^2-3x+4=0\Leftrightarrow (x-1)(x^2-x-4)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \ (Do\ \ x\ge 0)$$

Thử lại ta thấy, các nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=\left\{(1;1);\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2};\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\right\}$

Bài toán 16.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y(x-1)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y} & (1)\\ \left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2y-x+6}\right)\left(\sqrt{2y-1}-3\right)=4 & (2)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge\frac{1}{2}\\ x+y(x-1)\ge 0\\ 2y-x+6\ge 0\end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có $\sqrt{x+y(x-1)}-y+\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$

$$\Leftrightarrow\frac{x+xy-y-y^2}{\sqrt{x+y(x-1)}+y}+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{1+y}{\sqrt{x+y(x-1)}+y}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x=y$

Do $\frac{1+y}{\sqrt{x+y(x-1)}+y}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}>0\ \ \forall x\ge 0;\ y\ge\frac{1}{2}$

Thế vào phương trình (2) ta có $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)=4$ (*)

Từ phương trình suy ra $\sqrt{2x-1}-3>0\Leftrightarrow x>5$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}>0$

Ta có $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}+\frac{1}{2\sqrt{x+6}}>0$ hàm số luôn đồng biến

Tương tự $g(x)=\sqrt{2x-1}-3>0\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}>0$ hàm số luôn đồng biến

Khi đó hàm số $f(x)g(x)=\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)$

Hàm số luôn đông biến

Nên phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x=7$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(7;7)$.

Bài toán 17. *(Trích tạp chí TH&TT số 407)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}}=x+y & (1)\\ x\sqrt{2xy+5x+3}=4xy-5x-3 & (2)\end{cases}$

Lời giải 1.

Điều kiện $2xy+5x+3\ge 0$.

Nhận thấy $x=y=0$ không là nghiệm của hệ phương trình, từ phương trình (1) suy ra $x+y>0$. Lúc đó chia 2 vế của phương trình (1) cho $x+y$, ta có :

$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2(x+y)^2}}+\sqrt{\frac{(x^2+y^2)+(x+y)^2}{6(x+y)^2}}=1$. Đặt $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2(x+y)^2}}=t,\ t>0$, ta có :

$$t+\sqrt{\frac{t^2}{3}+\frac{1}{6}}=1\Leftrightarrow\begin{cases}1-t\ge 0\\ \frac{2}{3}t^2-2t+\frac{5}{6}=0\end{cases}\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}.$$

Từ đó suy ra $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2(x+y)^2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2(x^2+y^2)=(x+y)^2\Leftrightarrow x=y$, thay vào phương trình (2) ta được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=(3;3)$.

Lời giải 2. Điều kiện $2xy+5x+3\ge 0$.

Ta có $\begin{cases}x^2+xy+y^2\ge\frac{3}{4}(x+y)^2\\ x^2+y^2\ge\frac{1}{2}(x+y)^2\end{cases}$. Do đó

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}}\ge\sqrt{\frac{1}{4}(x+y)^2}+\sqrt{\frac{1}{4}(x+y)^2}=|x+y|\ge(x+y)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y\ge 0$

Thay $x=y$ vào phương trình (2) ta được phương trình

$$x\sqrt{2x^2+5x+3}=4x^2-5x-3\Leftrightarrow(2x^2+5x+3)+x\sqrt{2x^2+5x+3}-6x^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x^2+5x+3}+3x\right)\left(\sqrt{2x^2+5x+3}-2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2+5x+3}=-3x\\ \sqrt{2x^2+5x+3}=2x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+5x+3}=2x\Leftrightarrow x=3.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(x;y)=(3;3)$.

Bài toán 18.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x^2+3x-y}-\sqrt{4x+y^2}=x+1 & (1)\\ 4\sqrt{2x+1}+x-2y+2=0 & (2)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện $x\ge-\frac{1}{2}$.

Phương trình (2) tương đương $4\sqrt{2x+1}-2(x+y)+3x+2=0$ suy ra $3x+2>0\Rightarrow x+y>0$.

Mặt khác từ phương trình (1) ta có

$$\left(\sqrt{x^2+3x-y}-\sqrt{4x+y^2}\right)+\left(\sqrt{x^2+3x-y}-x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+3x-y}+\sqrt{4x+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3x-y}+x+1}\right)=0 \quad (*)$$

Do $x \ge -\frac{1}{2} \Rightarrow x+1>0$ và $x+y>0$ nên

$$\frac{x+y}{\sqrt{x^2+3x-y}+\sqrt{4x+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3x-y}+x+1}>0$$

Vì vậy (*) $\Leftrightarrow y=x-1$

Thế vào phương trình (2) suy ra

$$4\sqrt{2x+1}-x+4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4 \\ 16(2x+1)=(x-4)^2 \end{cases} \Rightarrow x=40 \Rightarrow y=39$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(40;39)$.

Bài toán 19. *(Trích Nghệ An TST 2012)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{8xy}{x+y}=16 & (1) \\ \dfrac{x^2}{8y}+\dfrac{2x}{3}=\sqrt{\dfrac{x^3}{3y}+\dfrac{x^2}{4}}-\dfrac{y}{2} & (2) \end{cases}$

Lời giải 1. Điều kiện $\begin{cases} x+y\ne 0 \\ y\ne 0 \\ \dfrac{x}{3y}+\dfrac{1}{4}\ge 0 \end{cases}$

Từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{8y}+\dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{2}\ge 0 \\ \dfrac{x}{3y}+\dfrac{1}{4}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>0 \\ x+\dfrac{3}{4}y\ge 0 \end{cases}$.

Ta có $x^2+y^2+\dfrac{8xy}{x+y}=16 \Leftrightarrow (x+y)^2-16-2xy+\dfrac{8xy}{x+y}=0$

$$\Leftrightarrow (x+y-4)\left[(x+y)^2+4(x+y)-2xy\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-4)\left[x^2+y^2+4(x+y)\right]=0 \quad (*)$$

Do $x+y>x+\dfrac{3}{4}y\ge 0 \Rightarrow x^2+y^2+4(x+y)>0$ nên (*) $\Leftrightarrow x+y=4$. Mặt khác, do

$\dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{2}{3}\left(x+\dfrac{3}{4}y\right)>0$ nên áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{x^2}{8y}+\left(\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}\right)\ge 2\sqrt{\frac{x^2}{8y}\left(\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}\right)}=\sqrt{\frac{x^3}{3y}+\frac{x^2}{4}}$$

Suy ra phương trình thứ hai của hệ $\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{8y}=\dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{2}$

Do đó hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ \dfrac{x^2}{8y}=\dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ 3x^2-16xy-12y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{24}{7} \\ y=\dfrac{4}{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-8 \\ y=12 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\left\{\left(\dfrac{24}{7};\dfrac{4}{7}\right),(-8;12)\right\}$.

Lời giải 2.

$(2)\Leftrightarrow \dfrac{1}{y^2}.\left(\dfrac{x^2}{8y}+\dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{2}\right)^2=\dfrac{1}{y^2}\left(\dfrac{x^3}{3y}+\dfrac{x^2}{4}\right)\Leftrightarrow\left(\dfrac{x^2}{8y^2}+\dfrac{2x}{3y}+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{x^3}{3y^3}+\dfrac{x^2}{4y^2}$.

, với điều kiện : $\dfrac{x^2}{8y}+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{y}{2}>0\Leftrightarrow y\left(\dfrac{1}{8}\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{2}{3}\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{2}\right)>0$ (*)

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$, ta có : $\left(\dfrac{1}{8}t^2+\dfrac{2}{3}t+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{1}{4}t^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=6 \\ t=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

+) Với $t=6\Rightarrow x=6y$, thay vào (1) ta có phương trình :

$37y^2+\dfrac{48}{7}y-16=0\Leftrightarrow y=\dfrac{4}{7}$ hoặc $y=-\dfrac{28}{37}$ (loại, do không thỏa mãn **(*)**) .

Với trường hợp này, hệ có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{24}{7};\dfrac{4}{7}\right)$.

+) Với $t=-\dfrac{2}{3}\Rightarrow x=-\dfrac{2}{3}y$, thay vào (1) ta có phương trình : $\dfrac{13}{9}y^2-16y-16=0\Leftrightarrow$

y=12 hoặc $y=-\dfrac{12}{13}$ (loại, do không thỏa mãn **(*)**). Với trường hợp này hệ có nghiệm $(x;y)=(-8;12)$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left\{\left(\dfrac{24}{7};\dfrac{4}{7}\right);(-8;12)\right\}$.

Bài toán 20.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=y+\sqrt{y^2-1} & (1) \\ 3\sqrt{y-1}+\sqrt{x}=2\sqrt{y+1} & (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 1 \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có

$$x-\sqrt{y^2-1}+\sqrt{x^2+1}-y=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-y^2+1}{x+\sqrt{y^2-1}}+\frac{x^2+1-y^2}{\sqrt{x^2+1}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-y^2+1\right)\left(\frac{1}{x+\sqrt{y^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+y}\right)=0 \Leftrightarrow x^2-y^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow x^2=y^2-1 \ (*)$$

Mặt khác từ phương trình (2) ta có

$$3\sqrt{y-1}+\sqrt[4]{x^2}=2\sqrt{y+1} \Leftrightarrow 3\sqrt{y-1}+\sqrt[4]{y^2-1}-2\sqrt{y+1}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}+\sqrt[4]{\frac{y-1}{y+1}}-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{\dfrac{y-1}{y+1}}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow y=\dfrac{97}{65}\\ \sqrt[4]{\dfrac{y-1}{y+1}}=-1 \ (L)\end{array}\right.$$

Thế $y=\frac{97}{65}$ vào (*) ta có $x^2=\left(\frac{72}{65}\right)^2 \Rightarrow x=\frac{72}{65}$ $\left(Do\ x\ge 0\right)$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left(\frac{72}{65};\frac{97}{65}\right)$.

Bài toán 21. *(Trích tạp chí TH&TT số 431)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3(1-x)+y^3(1-y)=12xy+18 & (1)\\ |3x-2y+10|+|2x-3y|=10 & (2)\end{cases}$

Lời giải.

Nhận thấy $(x;y)=(0;0)$ không là nghiệm của hệ phương trình.

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow x^3+y^3=\left(x^2-y^2\right)^2+2(xy+3)^3\ge 0 \Rightarrow (x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)\ge 0 \Rightarrow x+y\ge 0 \ (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức $|A|+|B|\ge|A-B|$ ta lại có

$$(2) \Rightarrow 10=|3x-2y+10|+|2x-3y|\ge|x+y+10| \underset{Do\ (*)}{\ge} 10$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}(3x-2y+10)(2x-3y)\le 0\\ x+y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\le x\le 0\\ y=-x\end{cases}$

Thay $y=-x$ vào phương trình (1) ta có phương trình

$$2x^4-12x^2+18=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=-\sqrt{3},\ do\ -2\le x\le 0.$$

Thay trở lại ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

Bài toán 22.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2-5xy-y^2=1 & (1)\\ y\left(\sqrt{xy-2y^2}+\sqrt{4y^2-xy}\right)=1 & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} xy \ge 2y^2 \\ 4y^2 \ge xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x-2y) \ge 0 \\ y(4y-x) \ge 0 \end{cases}$

Từ (1) và (2) ta có $2x^2 - 5xy - y^2 = y\left(\sqrt{xy-2y^2} + \sqrt{4y^2-xy}\right)$ (*)

Từ $(2) \Rightarrow y > 0$. Chia cả hai vế của (*) cho y^2 ta được

$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{y}\right) - 1 = \sqrt{\frac{x}{y} - 2} + \sqrt{4 - \frac{x}{y}}$. Đặt $t = \frac{x}{y}$, ta có phương trình

$$2t^2 - 5t - 1 = \sqrt{t-2} + \sqrt{4-t} \Leftrightarrow \sqrt{t-2}\left(\sqrt{t-2} - 1\right) + \left(1 - \sqrt{4-t}\right) + 2t(t-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)\frac{\sqrt{t-2}}{\sqrt{t-2}+1} + \frac{t-3}{1+\sqrt{4-t}} + 2t(t-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)\left(\frac{\sqrt{t-2}}{\sqrt{t-2}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{4-t}} + 2t\right) = 0 \Leftrightarrow t = 3,\ do\, 2 \le t \le 4$$

Với $t = 3 \Rightarrow x = 3y$ thay vào (1) ta được $2y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Do $y > 0$ nên suy ra hệ đã cho chỉ có nghiệm $(x;y) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Bình luận. *Bài toán được xây dựng dưới một ý tưởng của một hệ phương trình đẳng cấp, tuy nhiên để giải quyết được phương trình đẳng cấp đó, đòi hỏi người giải toán phải nắm vững được kỹ thuật làm hẹp miền nghiệm của hệ phương trình trước khi thực hiện phép đặt ẩn phụ* $t = \frac{x}{y}$.

Bên cạnh đó, phương trình vô tỷ được tác giả lựa chọn có thể giải quyết một cách đẹp mắt nhờ phương pháp "Truy ngược dấu biểu thức liên hợp".

Chú ý. *Độc giả có thể tìm đọc phương pháp truy ngược dấu biểu thức liên hợp ở cuốn **"Phương trình vô tỷ - Phương pháp, suy luận và tư duy"** của cùng tác giả.*

Bài toán 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4y + \frac{1}{y} + x^2 - 7y = 0 & (1) \\ x^3y + x^3 + x - 5xy = 0 & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện $y \ne 0$.

Từ phương trình (2) cho ta $x\left(x^2y + x^2 + 1 - 5y\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2y + x^2 - 5y + 1 = 0 \end{array}\right.$

+) Với $x = 0$ thay vào phương trình (1) ta được $\frac{1}{y} - 7y = 0 \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}$

+) Với $x^2y + x^2 - 5y + 1 = 0$ ta có hệ $\begin{cases} x^4y + \frac{1}{y} + x^2 - 7y = 0 \\ x^2y + x^2 - 5y + 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{x^2}{y} = 7 \\ x^2 + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{1}{y} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 + \dfrac{1}{y}\right)^2 - \dfrac{x^2}{y} = 7 \\ \left(x^2 + \dfrac{1}{y}\right) + \dfrac{x^2}{y} = 5 \end{cases}$$

Đặt $x^2 + \dfrac{1}{y} = a, \dfrac{x^2}{y} = b \left(a^2 \ge 4b\right)$.

Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} a^2 - b = 7 \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 12 = 0 \\ b = 5 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 9 \end{cases}$ (loại); $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2. \end{cases}$

+) Với $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$, thay trở lại ta có hệ $\begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{y} = 3 \\ \dfrac{x^2}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ \dfrac{1}{y} = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2 = 2 \\ \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases}$

Từ đó suy ra nghiệm của hệ đã cho là

$$(x;y) = \left\{\left(0;-\frac{1}{\sqrt{7}}\right), \left(0;\frac{1}{\sqrt{7}}\right), \left(-1;\frac{1}{2}\right), \left(1;\frac{1}{2};\right), \left(\sqrt{2};1\right), \left(-\sqrt{2};1\right)\right\}.$$

Bài toán 24.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)^2 + y = 5 & (1) \\ 3(x+y)^3 - 22xy + 21 = 11x^2 + 12y^2 & (2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} (x+y)^2 + y = 5 \\ 3(x+y)^3 - 11(x+y)^2 + 21 = y^2 \end{cases}$

Đặt $a = x + y$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 + y = 5 \\ 3a^3 - 11a^2 + 21 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - a^2 \\ 3a^3 - 11a^2 + 21 = \left(5 - a^2\right)^2 \quad (*) \end{cases}$$

Giải phương trình (*) ta có $a^4 - 3a^3 + a^2 + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (a-2)^2\left(a^2 + a + 1\right) = 0 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y) = (1;1)$.

Bài toán 25.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2 - 3y = 2 & (1) \\ \left(2x^2 + y\right)\left[4x^2\left(x^2 - 3\right) + y\left(4x^2 + y + 6\right)\right] = 8 & (2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 4x^2 - 3y = 2 \\ \left(2x^2 + y\right)\left[\left(2x^2 + y\right)^2 - 3\left(x^2 - 2y\right)\right] = 8 \end{cases}$$

Đặt $2x^2+y=a,\ \ x^2-2y=b$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}a+2b=2\\ a\left(a^2-3b\right)=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{2-a}{2}\\ a^3-3a\left(\dfrac{2-a}{2}\right)=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{2-a}{2}\\ 2a^3+3a^2-6a-16=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\ a=2\end{cases}$$

Thay trở lại ta có: $\begin{cases}2x^2+y=2\\ x^2-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\dfrac{4}{5}\\ y=\dfrac{2}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\sqrt{\dfrac{4}{5}}\\ y=\dfrac{2}{5}\end{cases}$

Hay nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\left\{\left(\sqrt{\dfrac{4}{5}};\dfrac{2}{5}\right),\left(-\sqrt{\dfrac{4}{5}};\dfrac{2}{5}\right)\right\}$.

Bài toán 26.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^6+y^9+3x^2\left(x^2+1\right)=8 & (1)\\ 4x^2-3x^2y^3+y^3=2 & (2)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases}\left(x^2+1\right)^3+y^9=9\\ 4\left(x^2+1\right)+4y^3-3y^3\left(x^2+1\right)=6\end{cases}$

Đặt $x^2+1=a,\ y^3=b$ ta có hệ $\begin{cases}a^3+b^3=9\\ 4a+4b-3ab=6\end{cases}$

Đặt $S=a+b,\ P=ab\ \left(S^2\ge 4P\right)$

Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}S^3-3PS=9\\ 4S-3P=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3P=4S-6\\ S^3-\left(4S-6\right)S=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3P=4S-6\\ S^3-4S^2+6S-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=3\\ P=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\ ab=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}\\ \begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+1=1\\ y^3=2\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+1=2\\ y^3=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=\sqrt[3]{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\pm 1\\ y=1\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\left\{(1;1),(-1;1),\left(0;\sqrt[3]{2}\right)\right\}$.

Bài toán 27.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}y^2+y\sqrt{x^2+y^2}=2\\ x^2+2y^2+y\sqrt{x^2+4y^2}=4\end{cases}$

Lời giải. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}2y^2+2y\sqrt{x^2+y^2}=4 & (1)\\ x^2+2y^2+y\sqrt{x^2+4y^2}=4 & (2)\end{cases}.$$

Lấy $(1)-(2)$ theo từng vế cho ta : $-x^2+y\left(2\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2+4y^2}\right)=0$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{3x^2y}{2\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+4y^2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+4y^2}=y\end{array}\right.$$

+) Với $x=0$ thay vào (1) ta có $y^2+y|y|=2\Leftrightarrow y^2=1\Leftrightarrow y=\pm1$

Trường hợp này hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\{(0;-1),(0;1)\}$.

+) Với $2\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+4y^2}=y$, chia cả hai vế cho $y^2\,(do\ y>0)$ ta có:

$2\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1}+\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+4}=1\ (*)$, dễ thấy $VT(*)\ge2\sqrt{1}+\sqrt{4}=4>1=VP(*)$

Suy ra phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=\{(0;-1),(0;1)\}$.

Bài toán 28. *(Trích HSG Tỉnh Nghệ An năm 2013)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=5 & (1)\\(xy-1)^2=x^2-y^2+2 & (2)\end{cases}\quad(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases}x\ne0\\y\ne0.\end{cases}$ Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{y}\right)^2=5\\(x^2+1)(y^2-1)=2xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{y}\right)^2=5\\\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y-\dfrac{1}{y}\right)=2\end{cases}$$

Đặt $x+\frac{1}{x}=a,\ y-\frac{1}{y}=b\ (|a|\ge2)$, hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases}a^2+b^2=5\\ab=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)^2-2ab=5\\ab=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)^2=9\\ab=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+b=3\\ab=2\end{cases}\\\begin{cases}a+b=-3\\ab=2\end{cases}\end{array}\right.$$

+) Với $\begin{cases}a+b=3\\ab=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\ (\text{loại})\\\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}\end{array}\right.$

Thay trở lại ta được $\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}=2\\y-\dfrac{1}{y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases}$

+) Với $\begin{cases} a+b=-3 \\ ab=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases} (\text{loại}) \end{array}\right.$

Thay trở lại ta được $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=-2 \\ y-\dfrac{1}{y}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$(x;y)=\left\{\left(1;\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(1;\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right),\left(-1;\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(-1;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}.$

Bài toán 29.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y^2-4xy+3y-4x-1=3\sqrt{(y^2-1)(y-2x)} & (1) \\ \sqrt{y+1}+\sqrt{y-2x}=\sqrt{2(y-x+1)} & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} y\ge 1 \\ y\ge 2x \end{cases}$

Phương trình $(2)\Leftrightarrow 2\sqrt{(y+1)(y-2x)}=1\Leftrightarrow (y+1)(y-2x)=\dfrac{1}{4}$ (3)

Lại có $(1)\Leftrightarrow 2y^2+3y-1-4x(y+1)=3\sqrt{(y-1)(y+1)(y-2x)}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra

$$2y^2+3y-1-2\left(y-\frac{1}{4(y+1)}\right)(y+1)=\frac{3}{2}\sqrt{y-1}\Leftrightarrow 2y-1=3\sqrt{y-1}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=\left\{\left(\dfrac{41}{72};\dfrac{5}{4}\right),\left(\dfrac{23}{24};2\right)\right\}.$

Bài toán 30.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y+1)(x+y+1+xy)=12xy & (1) \\ y\sqrt{3x-2x^2-1}+x\sqrt{1+y-2y^2}+xy=1 & (2) \end{cases}$

Lời giải 1. Điều kiện $\begin{cases} 3x-2x^2-1\ge 0 \\ 1+y-2y^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}\le x\le 1 \\ \dfrac{-1}{2}\le y\le 1 \end{cases}$

+) Với $(x+y+1)(x+y+1+xy)=0$ hệ đã cho vô nghiệm.

+) Với $(x+y+1)(x+y+1+xy)\neq 0$

Từ phương trình (1) cho ta $\dfrac{1}{x+y+1}-\dfrac{1}{x+y+1+xy}=\dfrac{1}{12}$

Ta lại có $\dfrac{1}{x+y+1}-\dfrac{1}{x+y+1+xy}\le\dfrac{1}{x+y+1}-\dfrac{4}{(x+y+2)^2}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2},t\in[1;3]$ trong đó $t=x+y+1$

Lập bảng biến thiên ta tìm được $f(t)\le f(3)=\dfrac{1}{12}$

Vậy $\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=y+1\\x+y+1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

Thử lại ta có nghiệm của hệ đã cho là $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

Lời giải 2. Điều kiện $\begin{cases}3x-2x^2-1\ge0\\1+y-2y^2\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}\le x\le1\\\dfrac{-1}{2}\le y\le1\end{cases}$

Ta có $\begin{cases}x+y+1\ge\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1}{2}+1=1>0\\x+y+1+xy\ge\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1}{2}+1+1.\dfrac{-1}{2}=\dfrac{1}{2}>0\end{cases}$

Nên từ $12xy=(x+y+1)(x+y+1+xy)>0\Rightarrow xy>0$

Mà $x>0\Rightarrow y>0.$ Nên từ phương trình (2) suy ra $xy\le1$ (*)

Từ phương trình (1) và áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$12xy=(x+y+1)(x+y+1+xy)\ge3\sqrt[3]{x.y.1}.(2\sqrt{x.y}+2\sqrt{1.xy})=12(xy)^{\frac{5}{6}}\Rightarrow xy\ge1\ (**)$$

Từ (*) và (**) cho ta $\begin{cases}x,y>0\\x=y\\xy=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1.$

Thử lại ta có nghiệm của hệ đã cho là $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

Bài toán 31. *(Trích HSG Nghệ an năm 2013)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2 & (1)\\27x^6=x^3-8y+2 & (2)\end{cases}$

Lời giải.

Từ phương trình (1) ta có $\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+4}=\sqrt{(-2y)^2+4}+(-2y)$

Hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+4}+t$ đồng biến trên R nên $(1)\Leftrightarrow x=-2y$

Thế vào (2) ta có $27x^6 = x^3 + 4x + 3 \Leftrightarrow 3x^2 = \sqrt[3]{x^3 + 4x + 3}$

$\Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = x^3 + 4x + 3 + \sqrt[3]{x^3 + 4x + 3} \quad (3)$

Xét hàm số $g(t) = t^3 + t,\ t \in R \Rightarrow g'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in R$.

Suy ra hàm số $g(t)$ đồng biến trên R nên

$(3) \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{x^3 + 4x + 2} \Leftrightarrow 3x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$

Do đó nghiệm của hệ là $(x;y) = \left\{\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}; \dfrac{-1+\sqrt{13}}{12}\right), \left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}; \dfrac{-1-\sqrt{13}}{12}\right)\right\}$

Bài toán 32.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{2-y^2} + y\sqrt{2-x^2} = 2 & (1) \\ (x+y)^3 - 12(x-1)(y-1) + \sqrt{xy} = 9 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} xy \ge 0 \\ -\sqrt{2} \le x, y \le \sqrt{2} \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có:

$x\sqrt{2-y^2} + y\sqrt{2-x^2} \le \left|x\sqrt{2-y^2} + y\sqrt{2-x^2}\right| \le \sqrt{(x^2 + 2 - x^2)(2 - y^2 + y^2)} = 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow xy = \sqrt{2-x^2}.\sqrt{2-y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2$

$\begin{cases} 2 = x^2 + y^2 \ge 2xy \Rightarrow 0 \le xy \le 1 \\ 2 = x^2 + y^2 \ge \dfrac{(x+y)^2}{2} \Rightarrow x + y \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{xy} \ge 0 \\ (x+y-2)^3 \le 0 \end{cases} (*)$

Cũng từ $2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 2(1+xy)$ kết hợp với phương trình (2) cho ta:

$(x+y)^3 - 12xy + 12(x+y) + \sqrt{xy} = 21$

$\Leftrightarrow (x+y)^3 - 6(x+y)^2 + 12(x+y) - 8 = 12xy - \sqrt{xy} - 6(x+y)^2 + 13$

$\Leftrightarrow (x+y-2)^3 = 12xy - \sqrt{xy} - 12(1+xy) + 13 \Leftrightarrow (x+y-2)^3 = 1 - \sqrt{xy} \quad (**)$

Từ (*) và (**) ta có hệ phương trình $\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Thử lại ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y) = (1;1)$.

Bình luận. *Ta có thể nhận ra tổng của hai hàm* $f(u) = u^3 + 12u$, *với* $\begin{cases} u = x + y \\ -2 \le u \le 2 \end{cases}$ *và*

$g(v) = -12v^2 + v$, *với* $\begin{cases} v = \sqrt{xy} \\ 0 \le v \le 1 \end{cases}$ *trong phương trình :*

$$(x+y)^3 - 12xy + 12(x+y) + \sqrt{xy} = 21$$

Bài toán 33. (Chọn ĐT HSG TP Hồ Chí Minh – 2015)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+6y\sqrt{x-1}+12y=4 & (1) \\ \dfrac{xy}{1+y}+\dfrac{1}{xy+y}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge 0 \end{cases}$

Ta có $(2)\Leftrightarrow \dfrac{y}{\frac{1}{x}+\frac{y}{x}}+\dfrac{\frac{1}{x}}{y+\frac{y}{x}}=\dfrac{2}{1+\sqrt{\frac{y}{x}}}$. Đặt $a=\dfrac{1}{x},b=y$, ta có:

$\dfrac{a}{b+ab}+\dfrac{b}{a+ab}=\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta được

$$\frac{a}{b+ab}+\frac{b}{a+ab}\ge\frac{(a+b)^2}{ab+a^2b+ab+b^2a}=\frac{(a+b)^2}{ab(a+b)+2ab}=\frac{1}{\frac{ab}{a+b}+\frac{2ab}{(a+b)^2}}$$

$\ge\dfrac{1}{\frac{ab}{2\sqrt{ab}}+\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$ hay $y=\dfrac{1}{x}$

Thay vào (2) ta có $2\sqrt{x-1}=x-4\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 4 \\ 4(x-1)=(x-4)^2 \end{cases}\Leftrightarrow x=10$

Từ đó cho ta nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=\left(10;\dfrac{1}{10}\right)$.

Bài toán 34.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x^2+1}-1=x\left(\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1}\right) & (1) \\ x(x-2)+(y-1)^4=2xy(y-2) & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $y\ge 1$

Ta có $(1)\Leftrightarrow\dfrac{2x^2}{\sqrt{2x^2+1}+1}=\dfrac{2x}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+1}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}} \end{array}\right.$

+) Với $x=0$ thay vào (2) ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=(0;1)$.

+) Với $\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+1}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}\Rightarrow x>0$

Lại có $\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+1}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}$

Đặt $a=\frac{1}{x},b=\sqrt{y-1}\ \left(a>0,b\ge 0\right)$ ta có

$$\frac{1}{\sqrt{2+a^2}+a}=\frac{1}{\sqrt{2+b^2}+b}\Leftrightarrow\left(\sqrt{2+a^2}-\sqrt{2+b^2}\right)+\left(a-b\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2-b^2}{\sqrt{2+a^2}+\sqrt{2+b^2}}+\left(a-b\right)=0\Leftrightarrow\left(a-b\right)\left(\frac{a+b}{\sqrt{2+a^2}+\sqrt{2+b^2}}+1\right)=0\Leftrightarrow a=b,\forall\begin{cases}a>0\\b\ge 0\end{cases}$$

Suy ra $\frac{1}{x}=\sqrt{y-1}$ (*)

Từ (2) ta lại có $x\left(x-2\right)+\left(y-1\right)^4=2xy\left(y-2\right)\Leftrightarrow\left(y-1\right)^4-2x.\left(y-1\right)^2+x^2=0$

$$\Leftrightarrow\left[\left(y-1\right)^2-x\right]^2=0\Leftrightarrow\left(y-1\right)^2-x\quad(**)$$

Kết hợp (*) và (**) ta có $\begin{cases}\left(y-1\right)^2-\frac{1}{\sqrt{y-1}}=0\\y>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{y-1}\right)^5=1\\y>1\end{cases}\Leftrightarrow y=2$

Kết luận. Nghiệm của hệ phương trình đã cho là $\left(x;y\right)=\left\{\left(0;1\right),\left(1;2\right)\right\}$.

Nhận xét.

- *Ta có thể đưa phương trình (1) về dạng* $\sqrt{\frac{1}{x^2}+2}-\sqrt{\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\left(y-1\right)+2}-\sqrt{y-1}$ *và sử dụng hàm số đại diện* $f\left(t\right)=\sqrt{t+2}-\sqrt{t},\ t>0$ *để giải quyết bài toán.*
- *Điểm hay nhất của bài toán chính là sử dụng điều kiện có nghiệm* $x\ge 0$ *trong phương trình (1) và kỹ năng quan sát đưa phương trình (2) về dạng tích.*

Bài toán 35.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+2y^2+3xy+3=0 & (1)\\ \frac{x-y+18}{\left(x+y\right)^2}=9\sqrt{x-y} & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases}x\ge y\\x+y\ne 0\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}\sqrt{x-y}=a\left(a\ge 0\right)\\b=x+y\ (b\ne 0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y=a^2\\x+y=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=a^2+b\\2y=b-a^2\end{cases}$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}3b^2-ba^2+6=0\\a^2+18=9b^2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9b^2-3ba^2+18=0 & (1)\\a^2-9b^2a+18=0 & (2)\end{cases}$

Trừ (1) cho (2) theo từng vế sẽ có :

$$\left(9b^2-a^2\right)+3ba\left(3b-a\right)=0\Leftrightarrow\left(3b-a\right)\left(3b+a+3ba\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3b-a=0\\3b+a+3ba=0\end{array}\right.$$

+) Với $3b+a+3ba=0\Rightarrow 3ab=-3b-a$ thay vào (1) có :

$9b^2+3a(3b+a)+18=0 \Leftrightarrow 3b^2+3ba+a^2+6=0$ (Vô nghiệm)

+) Với $3b-a=0 \Leftrightarrow a=3b$ thay vào (2) ta có $3b^3-b^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \rightarrow a=3 \\ b=-\dfrac{2}{3}(loại) \end{array}\right.$

Khi đó ta có hệ $\begin{cases} x-y=9 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-4 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=(5;-4)$.

Nhận xét. *Chúng ta đã sử dụng biến đổi sau để hữu tỉ hóa hệ phương trình.*

$$x^2+2y^2+3xy=\left(\frac{a^2+b}{2}\right)^2+2\left(\frac{b-a^2}{2}\right)^2+3\left(\frac{a^2+b}{2}\right)\left(\frac{b-a^2}{2}\right)$$

$$=\frac{a^4+2a^2b+b^2+2\left(b^2-2ba^2+a^4\right)+3\left(b^2-a^4\right)}{4}=\frac{6b^2-2ba^2}{4}.$$

Bài toán 36.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-3x^2+2=\sqrt{y^3+3y^2} & (1) \\ \sqrt{-14x+2y+48}+5=x+\sqrt{x-3} & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq -3 \\ -14x+2y+48 \geq 0 \end{cases}$

Ta có $(2) \Leftrightarrow \sqrt{-14x+2y+48}=(x-3)+\sqrt{x-3}-2$

$\Leftrightarrow \sqrt{-14x+2y+48}=\left(\sqrt{x-3}-1\right)\left(\sqrt{x-3}+2\right) \Rightarrow \sqrt{x-3}-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$

Kết hợp với điều kiện $2y-14x+48 \geq 0 \Rightarrow 2y \geq 14x-48 \geq 8 \Rightarrow y \geq 4$

Do đó

$\Leftrightarrow (x-1)^3-3(x-1)=y\sqrt{y+3} \Leftrightarrow\Leftrightarrow (x-1)^3-3(x-1)=(y+3)\sqrt{y+3}-3\sqrt{y+3}$

Đặt $\begin{cases} a=x-1 \ (a \geq 3) \\ b=\sqrt{y+3} \ \left(b \geq \sqrt{7}\right) \end{cases}$ ta có

$a^3-3a=b^3-3b \Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+b^2+ab-3\right)=0 \Leftrightarrow a=b$

Do $a^2+b^2+ab-3>0, \forall a \geq 3, b \geq \sqrt{7}$

Với $a=b \Rightarrow x-1=\sqrt{y+3} \Rightarrow y=x^2-2x-2$. Thay vào (2) ta có

$\sqrt{2x^2-18x+44}=\left(\sqrt{x-3}-1\right)\left(\sqrt{x-3}+2\right)$

Đặt $\sqrt{x-3}=t \ (t \geq 1) \Rightarrow x=t^2+3$, ta được

$\sqrt{2\left(t^4-3t^2+4\right)}=t^2+t-2 \Leftrightarrow t^4-2t^3-3t^2+4t+4=0 \Leftrightarrow t=2 \ (do \ t \geq 1)$

Từ $t=2$ cho ta nghiệm của hệ phương trình ban đầu là $(x;y)=(7;33)$.

Bài toán 37.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=3 & (1)\\ \sqrt{3(x+y)^2+1}+\sqrt{x-5}=5 & (2)\end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải.

Hệ phương trình tương đương $\begin{cases}\sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=3\\ \sqrt{3(x+y)^2+1}+\sqrt{(2x+y+1)-(x+y)-6}=5\end{cases}$

Đặt $a=\sqrt{2x+y+1};\ b=\sqrt{x+y}\ (a;b\geq 0)$

Khi đó ta có hệ phương trình mới là

$$\begin{cases}a-b=3\\ \sqrt{3b^4+1}+\sqrt{a^2-b^2-6}=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=b+3\\ \sqrt{3b^4+1}+\sqrt{6b+3}=5\ (*)\end{cases}$$

Giải phương trình (*) ta có

$$\left(\sqrt{3b^4+1}-2\right)+\left(\sqrt{6b+3}-3\right)=0 \Leftrightarrow \frac{3(b^4-1)}{\sqrt{3b^4+1}+2}+\frac{6(b-1)}{\sqrt{6b+3}+3}=0$$

$$\Leftrightarrow 3(b-1)\left[\frac{(b+1)(b^2+1)}{\sqrt{3b^4+1}+2}+\frac{2}{\sqrt{6b+3}+3}\right]=0 \Leftrightarrow b=1$$

Vì $\dfrac{(b+1)(b^2+1)}{\sqrt{3b^4+1}+2}+\dfrac{2}{\sqrt{6b+3}+3}>0\ \ \forall b\geq 0$

Với $b=1 \Rightarrow a=4$ khi đó ta có $\begin{cases}2x+y=15\\ x+y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=14\\ y=-13\end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(14;-13)$.

Bài toán 38. *(Trích tạp chí TH&TT số 444)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x-3}-\sqrt{y}=2x-6 & (1)\\ x^3+y^3+7(x+y)xy=8xy\sqrt{2(x^2+y^2)} & (2)\end{cases}$

Lời giải 1. Điều kiện $x\geq \dfrac{3}{2}, y\geq 0.$

$$(2) \Leftrightarrow (x+y)^3+4xy(x+y)=8xy\sqrt{2(x+y)^2-4xy}$$

Đặt $x+y=S, xy=P\left(S^2\geq 4P, S>0, P\geq 0\right)$ ta có :

$$S^3+4SP=8P\sqrt{2S^2-4P}$$

$$\Leftrightarrow S^6+8S^4P-112S^2P^2+256P^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}S^2=-16P\ (loại)\\ S^2=4P\end{array}\right.$$

Với $S^2=4P \Rightarrow x=y$ thay vào (1) cho ta

$\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=2x-6 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=2\left(\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}\right)\left(2\sqrt{2x-3}+2\sqrt{x}-1\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=3$

Do $2\sqrt{2x-3}+2\sqrt{x}-1>0, \forall x \ge \frac{3}{2}$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=(3;3)$.

Lời giải 2. Điều kiện $x \ge \frac{3}{2}, y \ge 0.$

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$x^3+y^3+7(x+y)xy=(x+y)^3+4(x+y)xy \ge 2\sqrt{(x+y)^3 4(x+y)xy}$

$=4(x+y)^2\sqrt{xy}=4\sqrt{xy}\left[\left(x^2+y^2\right)+2xy\right] \ge 4\sqrt{xy}.2\sqrt{\left(x^2+y^2\right)2xy}=8xy\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$.

Như vậy $x^3+y^3+7(x+y)xy \ge 8xy\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y$

+) Với $x=y$ thay vào (1) cho ta

$\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=2x-6 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=2\left(\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}\right)\left(2\sqrt{2x-3}+2\sqrt{x}-1\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=3$

Do $2\sqrt{2x-3}+2\sqrt{x}-1>0, \forall x \ge \frac{3}{2}$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=(3;3)$.

Nhận xét.

- *Có thể đưa phương trình (2) về dạng tích :*

  $(x-y)^2\left[(x+y)^2+(x+y)\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}-8xy\right]=0$

- *Có thể sử dụng tính đẳng cấp của phương trình (2).*

Bài toán 39.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2+x+\sqrt{x+2}=2y^2+y+\sqrt{2y+1} & (1) \\ x^2+2y^2-2x+y-2=0 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $x \ge -2, y \ge -\frac{1}{2}$. Lấy (1)-(2) theo từng vế ta có:

$$x^2+3x+2+\sqrt{x+1}=4y^2+2y+\sqrt{2y+1}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(x+1)+\sqrt{x+2}=4y^2+2y+\sqrt{2y+1}$$

Xét hàm số $f(t)=t^2+t+\sqrt{t+1},\ t \ge -1.$

Ta có $f'(t)=2t+1+\frac{1}{2\sqrt{t+1}}$. Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ cho ta

$2(t+1)+\frac{1}{4\sqrt{t+1}}+\frac{1}{4\sqrt{t+1}}-1\ge\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}\Rightarrow f'(t)>0,\forall t>-1$

Do vậy $f(x+1)=f(2y)\Leftrightarrow x+1=2y$

Thay vào phương trình (2) ta có $6y^2-7y+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\y=\frac{1}{6}\end{array}\right.$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=\left\{(1;2),\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{6}\right)\right\}$.

Bài toán 40.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+\sqrt{x^2-2x+5}=3y+\sqrt{y^2+4} & (1)\\ x^2-y^2-3x+3y+1=0 & (2)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải.

Từ phương trình (2) ta có $3y=-x^2+y^2+3x-1$

Thế vào phương trình (1) ta có

$x+\sqrt{x^2-2x+5}=-x^2+y^2+3x-1+\sqrt{y^2+4}$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+\sqrt{(x-1)^2+4}=y^2+\sqrt{y^2+4}$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t+4}\quad(t\ge0)\Rightarrow f'(t)=1+\frac{1}{2\sqrt{t+4}}>0$

Hàm số luôn đồng biến $\forall t\ge0$

Phương trình (*) $\Leftrightarrow f\left[(x-1)^2\right]=f(y^2)\Leftrightarrow(x-1)^2=y^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y+1\\x=1-y\end{array}\right.$

TH1: Với $x=y+1$ thế vào phương trình (2) ta được

$(y+1)^2-y^2-3(y+1)+3y+1=0\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{3}{2}$

TH2: Với $x=1-y$ thế vào phương trình (2) ta được

$(1-y)^2-y^2-3(1-y)+3y+1=0\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\frac{3}{4}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left\{\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)\right\}$.

Bài toán 41.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x.\sqrt{y-1}+y\sqrt{2x-1}=4 & (1)\\ (2x+y-1)^3=27x(2-x) & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $x\ge\frac{1}{2},y\ge1$.

Áp dụng bất đẳng thức BCS ta có:

$$\left[VT(1)\right]^2=\left(2x.\sqrt{y-1}+y\sqrt{2x-1}\right)^2\le(1+1)\left[4x^2(y-1)+y^2(2x-1)\right]\ (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta lại có

- $x^2(y-1)\le\left(\frac{x+x+y-1}{3}\right)^3=\left(\frac{2x+y-1}{3}\right)^3$
- $y^2.(2x-1)=4.\frac{y}{2}.\frac{y}{2}(2x-1)\le4\left(\frac{y+2x-1}{3}\right)^3$

Kết hợp với (*) cho ta: $\left[VT(1)\right]^2\le16\left(\frac{y+2x-1}{3}\right)^3$

Từ (2) ta lại có

$$(2x+y-1)^3=27x(2-x)\Rightarrow\left(\frac{2x+y-1}{3}\right)^3=x(2-x)=1-(x-1)^2\le1$$

Do vậy $\left[VT(1)\right]^2\le16\left(\frac{y+2x-1}{3}\right)^3\le16\Rightarrow \text{VT}(1)\le4$

Kết hợp với (1) ta có $4=VP(1)=\text{VT}(1)\le4$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;2)$.

Bài toán 42.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+1)\sqrt{y^2+5}+(y-1)\sqrt{x^2-3}=10 & (1)\\ \left(x-y+\frac{1}{2}\right)^2+(xy-3)^2=\frac{5}{4} & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $x^2\ge3$.

Ta có

$$(2)\Leftrightarrow x^2+y^2+x-y=8-(xy-4)^2\Rightarrow x^2+y^2+x-y\le8\ (*)$$

Lại có $\begin{cases}(y-1)\sqrt{x^2-3}\le\frac{(y-1)^2+x^2-3}{2}=\frac{x^2+y^2-2y-2}{2}\\(x+1)\sqrt{y^2+5}\le\frac{(x+1)^2+y^2+5}{2}=\frac{x^2+y^2+2x+6}{2}\end{cases}$

Nên từ (1) ta lại có:

$$10=(x+1)\sqrt{y^2+5}+(y-1)\sqrt{x^2-3}\le x^2+y^2+x-y+2\Rightarrow x^2+y^2+x-y\ge8(**)$$

Từ (*) và (**) suy ra hệ có nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}xy=4\\y-1=\sqrt{x^2-3}\\x+1=\sqrt{y^2+5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(2;2)$.

Bài toán 43. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{8-x^2}+y\sqrt{3-2y}=5 & (1) \\ (3-2y)\sqrt{x+1}=2y+\sqrt{4-y}-2 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $y\le\frac{3}{2}, -1\le x\le 2\sqrt{2}$

Ta có $(2)\Leftrightarrow\left(2-\sqrt{4-y}\right)\left(2\sqrt{4-y}+3\right)=(3-2y)\sqrt{x+1}$

Do $(3-2y)\sqrt{x+1}\ge 0, \forall\begin{cases} y\le\frac{3}{2} \\ -1\le x\le 2\sqrt{2} \end{cases}$.

Suy ra $\left(2-\sqrt{4-y}\right)\left(2\sqrt{4-y}+3\right)\ge 0\Rightarrow 2-\sqrt{4-y}\ge 0\Rightarrow y\ge 0$

Ta lại có

- $x\sqrt{8-x^2}\le\frac{x^2+\left(8-x^2\right)}{2}=4$
- $y^2(3-2y)\underset{AM-GM}{\le}\left(\frac{y+y+(3-2y)}{3}\right)^3=1\Rightarrow y\sqrt{3-2y}\le 1$

Hay $VT(1)\le 5=VP(1)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases} y=3-2y \\ x=\sqrt{8-x^2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$

Thử lại ta thấy, hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;2)$.

Nhận xét.

- *Mấu chốt của bài toán chính là việc sử dụng điều kiện có nghiệm để làm chặt khoảng nghiệm của biến y, từ đó sử dụng bất đẳng thức AM-GM.*
- *Việc sử dụng đánh giá* $x\sqrt{8-x^2}\le\frac{x^2+\left(8-x^2\right)}{2}=4$ *không cần đến điều kiện* $x\ge 0$
- *Ta cũng có thể khảo sát các hàm số* $f(x)=x^2\left(8-x^2\right), 0\le x^2\le 2$ *và* $g(y)=y^2(3-2y), 0\le y\le\frac{3}{2}$ *để tìm giá trị lớn nhất của* $f(x)+g(y)$

Bài toán 44.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2+4x=4\left(y\sqrt{x+1}-1\right) & (1) \\ (x-1)^3-8\sqrt{y}=3y^2-x-53 & (2) \end{cases}$ $(x,y\in R)$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x\ge -1 \\ y\ge 0 \end{cases}$

Ta có $(1)\Leftrightarrow y^2-2y\sqrt{4x+4}+(4x+4)=0\Leftrightarrow\left(y-\sqrt{4x+4}\right)^2=0\Leftrightarrow y=\sqrt{4x+4}$

Thay vào (2) ta có phương trình $x^3-3x^2-8x+40=8\sqrt[4]{4x+4}$ (*)

Áp dụng bất đẳng thứ c AM-GM ta có :

$$VP(*)=8\sqrt[4]{4x+4}=2.2.2.\sqrt[4]{4x+4}\underset{AM-GM}{\le}\frac{2^4+2^4+2^4+4x+4}{4}=x+13\ .$$

Dấu ‘=’ xảy ra khi và chỉ khi x =3 .

Ta sẽ chứng minh : $VT(*)\ge x+13,\ \forall x\ge -1$ (*) . Thật vậy :

$\Leftrightarrow x^3-3x^2-8x+40\ge x+13\Leftrightarrow x^3-3x^2-9x+27\ge 0\Leftrightarrow (x-3)^2(x+3)\ge 0$ luôn đúng với mọi $x\ge -1$. Dấu ‘=’ xảy ra khi và chỉ khi x =3 .

Từ đó cho ta : $\begin{cases}VP(*)\le x+13\\ VT(*)\ge x+13\end{cases}\Rightarrow (*)\Leftrightarrow\begin{cases}8\sqrt[4]{4x+4}=x+13\\ x^3-3x^2-8x+40=x+13\end{cases}\Leftrightarrow x=3$

Thay trở lại, ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=(3;4)$.

Bài toán 45. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(y-2x)^2+4=y-6x+2\sqrt{2(x+1)(y+1)} & (1)\\ (y-1)(x^2+x)+1=\sqrt{y}.\sqrt[3]{1-3x} & (2)\end{cases}\quad (x,y\in R)$$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases}x\ge -1\\ y\ge 0\end{cases}$

Ta có $(1)\Leftrightarrow\left[(y-2x)^2-2(y-2x)+1\right]+\left(y+1-2\sqrt{(y+1)(2x+2)}+2x+2\right)=0$

$$\Leftrightarrow (y-2x-1)^2+\left(\sqrt{y+1}-\sqrt{2x+2}\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}y-2x-1=0\\ \sqrt{y+1}-\sqrt{2x+2}=0\end{cases}\Leftrightarrow y=2x+1$$

Thay vào (2) ta có phương trình $2x^3+2x^2+1=\sqrt{1+2x}.\sqrt[3]{1-3x}$

Từ phương trình trên suy ra $x\ge -\frac{1}{2}$ nên $2x^3+2x^2+1=2x^2(x+1)+1>0$, suy ra $\sqrt{1+2x}.\sqrt[3]{1-3x}>0\Rightarrow\sqrt[3]{1-3x}>0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có :

$$\begin{cases}1.\sqrt{1+2x}\le\dfrac{1+(1+2x)}{2}\\ 1.1.\sqrt[3]{1-3x}\le\dfrac{1+1+(1-3x)}{3}\end{cases}\Rightarrow 0<\sqrt{1+2x}.\sqrt[3]{1-3x}\le(1+x)(1-x).$$

Ta sẽ chứng minh $2x^3+2x^2+1\ge(1-x)(1+x)$. (*) Thật vậy :

$(*)\Leftrightarrow 2x^3+3x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2(2x+3)\ge 0$ đúng với mọi $x\ge -\frac{1}{2}$ hay (*) được chứng minh. Dấu ‘‘=’’ xảy ra khi và chỉ khi $x=0$.

Thay trở lại ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=(0;1)$.

Bài toán 46. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt[4]{7(x+1)^2 - y^2} - \sqrt{y^2-1} = x-6 & (1) \\ (y^2-3x)^2 - y^2 = 2y\sqrt{3x+1} - 9x - 2 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} 3x+1 \ge 0 \\ y^2 - 1 \ge 0 \\ 7(x+1)^2 - y^2 \ge 0 \end{cases}$

Ta có $(2) \Leftrightarrow \left[(y^2-3x)^2 - 2(y^2-3x)+1\right] + \left[y^2 - 2y\sqrt{3x+1} + (3x+1)\right] = 0$

$\Leftrightarrow (y^2-3x-1)^2 + (y-\sqrt{3x+1})^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{3x+1} \\ y^2 = 3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 3x+1 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Thay vào (1) cho ta phương trình $\left(\sqrt[4]{7x^2+11x+6} - \sqrt{3x}\right) + (6-x) = 0$ (*)

+) Nhận thấy x = 3 là nghiệm của phương trình (*).

+) Xét các hệ bất phương trình:

- $\begin{cases} 6-x>0 \\ \sqrt[4]{7x^2+11x+6} - \sqrt{3x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<6 \\ (x-6)(2x+1)<0 \Leftrightarrow 0 \le x < 6 \\ x \ge 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} 6-x<0 \\ \sqrt[4]{7x^2+11x+6} - \sqrt{3x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>6 \\ (x-6)(2x+1)>0 \Leftrightarrow x>6 \\ x \ge 0 \end{cases}$

Suy ra:

+) Nếu $0 \le x < 6$ thì $\left(\sqrt[4]{7x^2+11x+6} - \sqrt{3x}\right) + (6-x) > 0$ hay (*) không có nghiệm $x \in [0;6)$

+) Nếu $x > 6$ thì $\left(\sqrt[4]{7x^2+11x+6} - \sqrt{3x}\right) + (6-x) < 0$ hay (*) không có nghiệm $x \in (6;+\infty)$. Vậy PT (*) có nghiệm duy nhất $x = 6$

Thay trở lại ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y) = (6;\sqrt{19})$.

Bài toán 47.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x(2-y)} + \sqrt{y(2-x)} = 2 & (1) \\ x^2 + y^2 + 1 = 2(x+y) & (2) \end{cases}$ $(x, y \in R)$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x(2-y) \ge 0 \\ y(2-x) \ge 0 \end{cases}$

Ta có $(2) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} |x-1| \le 1 \\ |y-1| \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases} (*)$

Từ điều kiện (*) và (1), áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$VT(1) \le \dfrac{x+(2-y)}{2} + \dfrac{y+(2-x)}{2} = 2 = VP(1)$, do đó $(1) \Leftrightarrow x + y = 2$

Kết hợp với (2) cho ta hệ $\begin{cases} x+y=2 \\ xy = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{array} \right.$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y) = \left\{ \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}; \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \right), \left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}; \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \right) \right\}.$

Bài toán 48.*(Trích HSGQG năm 2009)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}} & (1) \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \dfrac{2}{9} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải.Điều kiện $\begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 0 \le y \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad (*)$

Từ phương trình (1) áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \right)^2 \le 2\left(\dfrac{1}{1+2x^2} + \dfrac{1}{1+2y^2} \right) \quad (3)$

Mặt khác ta có $\dfrac{1}{1+2x^2} + \dfrac{1}{1+2y^2} - \dfrac{2}{1+2xy} = \dfrac{2(y-x)^2(2xy-1)}{(1+2xy)(1+2x^2)(1+2y^2)} \le 0$,

Do từ (*) ta có $0 \le xy \le \dfrac{1}{4} \Rightarrow 1 + 2xy > 0,\ 2xy - 1 < 0$

Khi đó (3) là một nghiệm của hệ phương trình

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \right)^2 \le \dfrac{4}{1+2xy} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \le \dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}}$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y$, thế vào phương trình (2) ta được

$$2\sqrt{x-2x^2}=\frac{2}{9}\Leftrightarrow 2x^2-x+\frac{1}{81}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=\dfrac{9-\sqrt{73}}{36}\\ x=y=\dfrac{9+\sqrt{73}}{36}\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left(\dfrac{9\pm\sqrt{73}}{36};\dfrac{9\pm\sqrt{73}}{36}\right)$.

Bài toán 49.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)=x+\sqrt{x^2+1} & (1)\\ \sqrt{3+x}-\sqrt{2-x}=\dfrac{1}{2y}-4\sqrt{\dfrac{1}{2y}+3}+8 & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases}-3\le x\le 2\\ \left[\begin{array}{l}y>0\\ y\le -\dfrac{1}{6}\end{array}\right.\end{cases}$

Từ (1) ta có $VP(1)=x+\sqrt{x^2+1}>x+|x|\ge 0\Rightarrow VT(1)>0\Rightarrow y>0$

Lại có $(2)\Leftrightarrow\sqrt{3+x}-\sqrt{2-x}=\left[\left(\dfrac{1}{2y}+3\right)-4\sqrt{\dfrac{1}{2y}+3}+4\right]+1$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3+x}-\sqrt{2-x}=\left(\sqrt{\frac{1}{2y}+3}-2\right)^2+1\Rightarrow\sqrt{3+x}-\sqrt{2-x}\ge 1$$

$$\Rightarrow x\ge\sqrt{2-x}\Rightarrow x\ge 1$$

Từ điều kiện $x\ge 1$ ta có $(1)\Leftrightarrow 2y+2y\sqrt{4y^2+1}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$

Xét hàm số $f(t)=t+t\sqrt{1+t^2},t>0$, ta có

$$f'(t)=1+\sqrt{1+t^2}+\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}>0,\forall t>0.$$

Do đó $f(2y)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)\Leftrightarrow 2y=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2y}$

Thay vào (2) ta có phương trình $x-5\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}+8=0$ (*)

Xét hàm số $f(x)=x-5\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}+8,x\ge 1$ có

$$f'(x)=1-\frac{5}{2\sqrt{x+3}}+\frac{1}{2\sqrt{2-x}}=\frac{2\sqrt{x+3}-4}{2\sqrt{x+3}}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)$$

Do $2\sqrt{x+3}-4\ge 0,\forall x\ge 1$ và

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}}-\frac{1}{\sqrt{x+3}}=\frac{2x+1}{\sqrt{(2-x)(x+3)}\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+3}\right)}>0,\forall x\ge 1$$

Nên $f'(x) > 0, \forall x \ge 1$.

Đồng thời $f(1) = 0$ suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 50. *(Trích chọn đội tuyển HSGQG Nghệ an năm 2014-2015)*

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x\left(4y^3 + 3y + \sqrt{5y^2 - x^2}\right) = y^2\left(x^2 + 4y^2 + 8\right) & (1) \\ x + \sqrt{12 - 2x} = 2y^2 - 2\sqrt{y} - 4 & (2) \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} 5y^2 - x^2 \ge 0 \\ x \le 6 \\ y \ge 0 \end{cases}$ (*)

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (x - 2y)^2\left(4y^2 + 3\right) + \left(x - 2\sqrt{5y^2 - x^2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = 2\sqrt{5y^2 - x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x = 2y \end{cases}$$

Thay vào (2) ta có

$$2y + \sqrt{12 - 4y} = 2y^2 - 2\sqrt{y} - 4 \Leftrightarrow y + \sqrt{3 - y} = y^2 - \sqrt{y} - 2 \quad (4)$$

$$\Rightarrow y^2 - y - 2 = \sqrt{3 - y} + \sqrt{y} \ge 0 \Rightarrow y \ge 2 \Rightarrow 2 \le y \le 3$$

$$(4) \Leftrightarrow y^2 - 3y + 1 = \sqrt{y} - (y - 1) + \sqrt{3 - y} - (y - 2)$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 3y + 1 = -\frac{y^2 - 3y + 1}{y - 1 + \sqrt{y}} - \frac{y^2 - 3y + 1}{y - 2 + \sqrt{3 - y}}$$

$$\Leftrightarrow \left(y^2 - 3y + 1\right)\left(\frac{1}{y - 1 + \sqrt{y}} + \frac{1}{y - 2 + \sqrt{3 - y}} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow y^2 - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Kết hợp điều kiện ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = \left(3 + \sqrt{5}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$

Bình luận. *Có nhiều cách để chúng ta tìm ra mối quan hệ $x = 2y$ ở phương trình (1), song cái hay của bài toán chính lại là việc xử lý phương trình vô tỷ $y^2 - y - 2 = \sqrt{3 - y} + \sqrt{y}$ bằng kỹ thuật sử dụng lượng liên hợp, từ việc làm chặt miền nghiệm của phương trình.*

Bài toán 51. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{y + 2x - 1} + \sqrt{1 - y} = y + 2 & (1) \\ x\sqrt{x} = \sqrt{y(x - 1)} + \sqrt{x^2 - y} & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} y + 2x - 1 \\ x \ge 0 \\ 1 - y \ge 0 \\ y(x - 1) \ge 0 \\ x^2 - y \ge 0 \end{cases}$

Nhận thấy $(x;y)=(0;y)$ không là nghiệm của hệ.

Với $x\neq 0$, ta có :

$$\sqrt{y(x-1)}-\sqrt{x^2-y}=\frac{x(y-x)}{\sqrt{y(x-1)}+\sqrt{x^2-y}}=\frac{x(y-x)}{x\sqrt{x}}=\frac{y-x}{\sqrt{x}}$$

Kết hợp với (2) cho ta

$$\begin{cases}\sqrt{y(x-1)}+\sqrt{x^2-y}=x\sqrt{x}\\ \sqrt{y(x-1)}-\sqrt{x^2-y}=\dfrac{y-x}{\sqrt{x}}\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{y(x-1)}=x\sqrt{x}+\frac{y-x}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y(x^2-x)}=(x^2-x)+y\Rightarrow\left[(x^2-x)-y\right]^2=0\Rightarrow y=x^2-x$$

Thay vào phương trình (1) cho ta : $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}=x^2-x+2\ \ (*)$

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+x-1}\le\dfrac{x^2+x}{2}\\ \sqrt{-x^2+x+1}\le\dfrac{-x^2+x+2}{2}\end{cases}\Rightarrow VT(*)\le x+1$$

Ta sẽ chứng minh $VP(*)\ge x+1$.

Thật vậy $x^2-x+2\ge x+1\Leftrightarrow(x-1)^2\ge 0$ (luôn đúng)

Vậy $\begin{cases}VT(*)\le x+1\\ VP(*)\ge x+1\end{cases}\Rightarrow(*)\Leftrightarrow\begin{cases}VT(*)=x+1\\ VP(*)=x+1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

Thử lại ta thấy nghiệm của phương trình đã cho là $(x;y)=(1;0)$.

Bình luận.

- *Phép biến đổi để cho ta $y=x^2-x$ là một phép biến đổi hệ quả, vì vậy sau khi tìm được kết quả cuối cùng, bắt buộc chúng ta phải thử lại vào hệ ban đầu để kiểm tra nó là nghiệm hay không.*
- *Ta cũng có thể nâng lên lũy thừa ở phương trình (2) cũng có thể đưa về kết quả $y=x^2-x$.*
- *Sai lầm thường gặp là đánh giá $\begin{cases}\sqrt{y(x-1)}\le\dfrac{x+y-1}{2}\\ \sqrt{x^2-y}\le\dfrac{x^2-y+1}{2}\end{cases}$ chỉ sử dụng cho các số không âm.*

Bài toán 52.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+2y-1)\sqrt{2y+1}=(x-2y)\sqrt{x+1} & (1)\\ 2xy+5y=\sqrt{(x+1)(2y+1)} & (2)\end{cases}$

Lời giải 1. Điều kiện $\begin{cases} 2y+1 \ge 0 \\ x+1 \ge 0 \end{cases}$

Nhận thấy $(x;y) = \left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ không là nghiệm của hệ .

Từ phương trình (1) ta có

$(1) \Leftrightarrow (x-2y+4y-1)\sqrt{2y+1} = (x-2y)\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow (4y-1)\sqrt{2y+1} = (x-2y)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2y+1}\right)$

$\Leftrightarrow (4y-1)\sqrt{2y+1} = \dfrac{(x-2y)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2y+1}} \ge 0 \Rightarrow y \ge \dfrac{1}{4}$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta lại có

$(2) \Rightarrow 2xy+5y = \sqrt{(x+1)(2y+1)} \le \dfrac{x+1+2y+1}{2}$

$\Rightarrow x+2 \ge 4y(x+2) \Rightarrow (x+2)(1-4y) \ge 0 \Rightarrow y \le \dfrac{1}{4},\ do\, x \ge -1$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra hệ có nghiệm khi $\begin{cases} y = \frac{1}{4} \\ x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Thử lại suy ra hệ đã cho có nghiệm $(x;y) = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải 2. Điều kiện $\begin{cases} 2y+1 \ge 0 \\ x+1 \ge 0 \end{cases}$

Đặt $\sqrt{x+1} = a, \sqrt{2y+1} = b\ (a,b \ge 0)$. Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} (a-b)^2(a+b) = b\left(2b^2-3\right) & (3) \\ (a-b)^2 = \left(a^2+1\right)\left(3-2b^2\right) & (4) \end{cases}$$

Nhận thấy $a=b=0$ không phải là nghiệm của hệ phương trình. Khi đó

$PT(3)-(a+b)PT(4) = 0 \Leftrightarrow \left(2b^2-3\right)\left[b+(a+b)\left(a^2+1\right)\right] = 0 \Rightarrow b = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

Từ đó cho ta $a = b = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Thay trở lại ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y) = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$.

Bài toán 53.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+(xy)^2 = 3 & (1) \\ x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1} & (2) \end{cases}$

Lời giải.

Ta có

$(1) \Rightarrow (x+y)^2 - 2xy + (xy)^2 = 3 \Rightarrow 4 = (x+y)^2 + (xy-1)^2 \geq (xy-1)^2 \Rightarrow -1 \leq xy \leq 3$ (*)

Lại có:

$(2) \Rightarrow x^2(y^2+1) + y^2(x^2+1) + 2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} = 4(x^2+y^2+2xy)$

$\Rightarrow 2x^2y^2 - 3(x^2+y^2) - 8xy + 2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} = 0$

$\Rightarrow 2x^2y^2 - 3(3-x^2y^2) - 8xy + 2xy\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1} = 0$

$\Rightarrow 5x^2y^2 - 4xy - 9 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} xy = -1 \\ xy = \dfrac{9}{5} \end{array}\right.$ $(**)$

Từ (*) và (**) suy ra $xy = -1$.

Từ đó ta có hệ $\begin{cases} xy = -1 \\ x^2 + y^2 + (xy)^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \end{array}\right.$

Thử lại ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y) = \{(-1;1),(1;-1)\}$.

Bài toán 54.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} + \dfrac{1}{\sqrt{y-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{x+y}} & (1) \\ x^2 + y^2 + 4xy - 4x + 2y - 5 = 0 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x > -2; y > 1 \\ x + y > 0 \end{cases}$

Ta có $(2) \Leftrightarrow 2(x+y)^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x+2}{x+y}\right)^2 + \left(\dfrac{y-1}{x+y}\right)^2 = 2$

và $(1) \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x+y}{x+2}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{y-1}} = 2$. Đặt $\sqrt{\dfrac{x+y}{x+2}} = a; \sqrt{\dfrac{x+y}{y-1}} = b$ $(a,b>0)$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a + b = 2 \\ \dfrac{1}{a^4} + \dfrac{1}{b^4} = 2 \end{cases}$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$\begin{cases} (2) \Rightarrow 2 = \dfrac{1}{a^4} + \dfrac{1}{b^4} \geq 2\sqrt{\dfrac{1}{a^4}.\dfrac{1}{b^4}} \Rightarrow \dfrac{1}{a^2.b^2} \leq 1 \Rightarrow ab \geq 1 \\ (1) \Rightarrow 2 = a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq 1 \end{cases}$

Do đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1$

Với $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y}{x+2}=1 \\ \dfrac{x+y}{y-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(-1;2)$.

Bài toán 55.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4xy+x+4\sqrt{(2-x)(y+2)}=14 & (1) \\ x^2+y^2+2x-1=0 & (2) \end{cases}$

Lời giải 1. Điều kiện $(2-x)(y+2)\ge 0$

Từ phương trình (1) ta có $2=(x+1)^2+y^2\ge 2(x+1)y \Rightarrow y(x+1)\le 1$ (*)

Cũng từ phương trình (1) $\Rightarrow (x+1)^2+y^2=2 \Rightarrow -\sqrt{2}\le y\le \sqrt{2} \Rightarrow y+2>0$

Do đó

$(2) \Rightarrow 14-4xy-x=2.\sqrt{2-x}.\left(2\sqrt{y+2}\right)\le (2-x)+4(y+2) \Rightarrow y(x+1)\ge 1$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra hệ đã cho có nghiệm khi hệ sau có nghiệm:

$\begin{cases} x+1=y \\ \sqrt{2-x}=2\sqrt{y+2} \\ y(x+1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

Thử lại ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=(-2;-1)$

Lời giải 2. Điều kiện $(2-x)(y+2)\ge 0$

Từ phương trình (1) $\Rightarrow (x+1)^2+y^2=2 \Rightarrow -\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2} \Rightarrow y+2>0 \Rightarrow 2-x>0$

Do đó $(1) \Leftrightarrow 4(xy+y-1)=\left(\sqrt{2-x}-2\sqrt{2+y}\right)^2\ge 0 \Rightarrow xy+y-1\ge 0 (*)$

Lại có $(2) \Leftrightarrow (1-xy-y)=(x-y+1)^2\ge 0 \Rightarrow xy+y-1\le 0$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} \sqrt{2-x}=2\sqrt{2+y} \\ x-y+1=0 \\ xy+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

Hay hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(-2;-1)$.

Bài toán 56.

Giải hệ phương trình

$\begin{cases} (x+2)^2-|x+y|(y-1)+(x+y)^2=0 & (1) \\ (y-1)(x+y)^2-y+1=|x+y|\left(y^2-2y\right) & (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Từ phương trình (1) ta có $|x+y|(y-1)\ge 0$ (*)

Nếu $|x+y|=0\Rightarrow y=1\Rightarrow x=-1$ (L)

Với $|x+y|\ne 0\Rightarrow y-1>0$

Mặt khác từ (2) suy ra $|x+y|-\dfrac{1}{|x+y|}=y-1-\dfrac{1}{y-1}$

Xét hàm số $f(t)=t-\dfrac{1}{t}\Rightarrow f'(t)=1+\dfrac{1}{t^2}>0$ $(\forall t>0)$

Hàm số luôn đồng biến $\forall t>0$ nên $f(|x+y|)=f(y-1)\Leftrightarrow |x+y|=y-1$

Thế vào (1) suy ra $(x+2)^2=0\Leftrightarrow x=-2\Rightarrow |y-2|=y-1\Rightarrow y=\dfrac{3}{2}$

Thử lại ta thấy, các nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=\left(-2;\dfrac{3}{2}\right)$.

Bài toán 57.

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2+y^3+y^6=\sqrt{xy-x^2y^2} & (1) \\ 4xy^3+y^3+\dfrac{1}{2}=2x^2+\sqrt{1+(2x-y)^2} & (2) \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Lời giải. Điều kiện $xy-x^2y^2\ge 0$ (*)

Ta có $y^6+y^3+2x^2=\sqrt{\dfrac{1}{4}-\left(xy-\dfrac{1}{2}\right)^2}\le\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow y^6+2y^3+2x^2+4xy^3\le\dfrac{1}{2}+y^3+4xy^3$

Cộng với (2) ta được

$\Leftrightarrow y^6+2y^3+2x^2+4xy^3+2x^2+\sqrt{1+(2x-y)^2}\le 1+2y^3+8xy^3$

$\Leftrightarrow y^6+4x^2-4xy^3+\sqrt{1+(2x-y)^2}\le 1\Leftrightarrow (y^3-2x)^2+\sqrt{1+(2x-y)^2}\le 1$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} y-2x=0 \\ y^3-2x=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y^3-y=0 \\ x=\dfrac{y}{2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}\vee\begin{cases} y=1 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}\vee\begin{cases} y=-1 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Thử lại ta thấy, nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=\left(-\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Bài toán 58.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+\sqrt{2(x^4+y^4)}=1 & (1) \\ x^5y+xy^5=\dfrac{2}{27} & (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải.

Từ (2) ta có $xy\left(x^4+y^4\right)=\frac{2}{27}>0\Rightarrow xy>0$

$1-xy=\sqrt{2\left(x^4+y^4\right)}\ge 2|xy|=2xy\Rightarrow xy\le\frac{1}{3};\ x^4+y^4=\frac{(1-xy)^2}{2}$

Xét

$VT=xy\left(x^4+y^4\right)=xy\frac{(1-xy)^2}{2}$

$=2xy.\frac{1-xy}{2}.\frac{1-xy}{2}\le 2\left(\frac{xy+\frac{1-xy}{2}+\frac{1-xy}{2}}{3}\right)^3=\frac{2}{27}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}xy=\frac{1-xy}{2}\\xy=\frac{1}{3}\\x^4=y^4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt3}\\y=\frac{1}{\sqrt3}\end{cases}\vee\begin{cases}x=-\frac{1}{\sqrt3}\\y=-\frac{1}{\sqrt3}\end{cases}$

Thử lại ta thấy, nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt3};\frac{1}{\sqrt3}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt3};-\frac{1}{\sqrt3}\right)\right\}$.

Bình luận.

Đối với hệ phương trình trên ta có thể biến đổi từ (1) như sau

$$\begin{cases}xy\le 1\\x^4+y^4=\frac{(1-xy)^2}{2}\end{cases}$$

Thế vào phương trình (2) ta có $xy\frac{(1-xy)^2}{2}=\frac{2}{27}$

Bài toán 59.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt[4]{(x+1)(3-y)}+\sqrt{xy}-\sqrt{x}=2x+2 & (1)\\3\sqrt[3]{(3x+8)(y+6)}+\sqrt{x}=12+\sqrt{xy} & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases}(x+1)(3-y)\ge 0\\x\ge 0\\xy\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0\\0\le y\le 3\end{cases}$

Cộng (1) và (2) theo từng vế ta được

$4\sqrt[4]{(x+1)(3-y)}+6\sqrt[3]{(3x+8)(y+6)}=4x+28$ (*)

Áp dụng BĐT AM-GM ta có:

$$\begin{cases} 4\sqrt[4]{(x+1)(3-y)} \le 1+1+(x+1)+(3-y) = 6+x-y \\ 6\sqrt[3]{(3x+8)(y+6)} \le 8+(3x+8)+(y+6) = 3x+y+22 \end{cases}$$

$\Rightarrow VT(*) \le 4x+28 = VP(*)$

Do vậy $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x+1 = 3-y \\ 8 = 3x+8 = y+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $(x;y) = (0;2)$.

Bài toán 60.

Giải hệ $\begin{cases} \sqrt{3x-2} - \sqrt{1-y} = x & (1) \\ \sqrt{(x+3)(5-y)} + \sqrt{y^2-3y+2} + x\sqrt{2-y} = 2x-y+4 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \ge \dfrac{2}{3} \\ y \le 1 \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(5-y)} + \sqrt{y-1}.\sqrt{2-y} + x\sqrt{2-y} = 2x-y+4 \;\; (3)$

Từ phương trình $(1) \Rightarrow \sqrt{1-y} = \sqrt{3x-2} - x$, thay vào (3) ta được

$\sqrt{(x+3)(5-y)} + \left(\sqrt{3x-2} - x\right)\sqrt{2-y} + x\sqrt{2-y} = 2x-y+4$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(5-y)} + \sqrt{(3x-2)(2-y)} = 2x-y+4 \;\; (*)$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ta

$$\begin{cases} \sqrt{(3x-2)(2-y)} \le \dfrac{3x-2+2-y}{2} = \dfrac{3x-y}{2} \\ \sqrt{(x+3)(5-y)} \le \dfrac{x-y+8}{2} \end{cases}$$

Do đó $VT(*) \le \dfrac{3x-y}{2} + \dfrac{x-y+8}{2} = 2x-y+4 = VP(*)$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 = 2-y \\ x+3 = 5-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Thay trở lại ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y) = (1;1)$.

Bài toán 61. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2} + 1 = 2\left(\dfrac{x+y}{xy}\right) & (1) \\ 6\sqrt[3]{(x+1)(y+1)^2} + 3\sqrt{(2x-1)(2y-1)} = 5x+7y+3 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x, y \ne 0 \\ (2x-1)(2y-1) \ge 0 \end{cases}$

Ta có $(1)\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{2}{x}-\frac{2}{y}+1=0\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}-1\right)^2+\left(\frac{1}{y}-1\right)^2=1$

Suy ra $\begin{cases}0\le \frac{1}{x}\le 2\\ 0\le \frac{1}{y}\le 2\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x\ge \frac{1}{2}\\ y\ge \frac{1}{2}\end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{cases}6\sqrt[3]{(x+1)(y+1)^2}\le 6\frac{(x+1)+(y+1)+(y+1)}{3}=2x+4y+6\\ 3\sqrt{(2x-1)(2y-1)}\le 3\frac{(2x-1)+(2y-1)}{2}=3x+3y-3\end{cases}$$

Suy ra $VT(2)\le 5x+7y+3=VP(*)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}x+1=y+1\\ 2x-1=2y-1\end{cases}\Rightarrow x=y$

Thay vào (1) ta có $\left(\frac{1}{x}-1\right)^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2+\sqrt{2}\\ x=2-\sqrt{2}\end{array}\right.$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là

$$(x;y)=\left\{\left(2+\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right),\left(2-\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right)\right\}.$$

Bài toán 62.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}4\left(1+2\sqrt{y+1}\right)\sqrt{x-2}=1-4y\\ \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{y+1}+1}+\frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{x-2}+1}=\frac{2}{3}\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases}x\ge 2\\ y\ge -1\end{cases}$

Đặt $\sqrt{x-2}=a,\sqrt{y+1}=b\,(a,b\ge 0)$

Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases}8ab+4a=1-4\left(b^2-1\right)\\ \frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}=\frac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}4(a+b)^2=4+(2a-1)^2 & (1)\\ \frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}=\frac{2}{3} & (2)\end{cases}$$

Từ (1) ta có $(a+b)^2\ge 1\Rightarrow a+b\ge 1$

Từ (2) ta lại có

$$VT(*)=\frac{a^2}{ab+b}+\frac{b^2}{ab+a}\ge \frac{(a+b)^2}{2ab+(a+b)}\ge \frac{(a+b)^2}{2\frac{(a+b)^2}{4}+(a+b)}=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{a+b}}\ge \frac{2}{3}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

Thay trở lại ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y) = \left(\frac{9}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

Bài toán 63.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{y(x-2)} + \sqrt{x(y+2)} = x + y & (1) \\ \sqrt{y+3} + \dfrac{4\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)}{3\left(\sqrt{y}+1\right)^2} = 3 & (2) \end{cases}$

Lời giải.

Từ điều kiện $x \ge 2 \Rightarrow y \ge 0$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$VT(1) = \sqrt{y(x-2)} + \sqrt{x(y+2)} \le \frac{y+(x-2)}{2} + \frac{x+(y+2)}{2} = x + y = VP(1)$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} y = x-2 \\ x = y+2 \end{cases} \Leftrightarrow y = x-2$

Do đó $(1) \Rightarrow y = x-2$

Thay vào (2) ta có phương trình

$$\sqrt{x+1} + \frac{4\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)}{3\left(\sqrt{x-2}+1\right)^2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \frac{4}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x-2}+1\right)^2} = 3$$

Đặt : $\sqrt{x+1} = a; \sqrt{x-2} = b \; (a > b \ge 0)$.

Ta có phương trình : $a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} = 3$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ta :

$$a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} + 1 = (a-b) + \left(\frac{b+1}{2}\right) + \left(\frac{b+1}{2}\right) + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2}$$

$$\ge 4\sqrt[4]{(a-b)\left(\frac{b+1}{2}\right)^2 . \frac{4}{(a-b)(b+1)^2}} = 4 \text{ hay : } \quad a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} \ge 3 .$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

Thay trở lại ta tìm được x =3.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

Bài toán 64.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{x}+y}-\dfrac{x}{\left(y+\sqrt{x}\right)^2}=\dfrac{y^4}{\left(x+y^2\right)^2} & (1) \\ \sqrt{y+\sqrt{x-1}}=32(x-2y+1)\sqrt{2y-2} & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge 1 \\ y+\sqrt{x-1}\ge 0 \end{cases}$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{1}{\left(\dfrac{x}{y^2}+1\right)^2}+\frac{1}{\left(\dfrac{y}{\sqrt{x}}+1\right)^2}=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{x}}{y}+1}$$

Đặt $a=\dfrac{x}{y};b=y\ (a,b>0)$ ta có $\dfrac{1}{(a+1)^2}+\dfrac{1}{(b+1)^2}=\dfrac{1}{ab+1}$ (*)

Theo bất đẳng thức $B.C.S$ ta có

$$\begin{cases} (ab+1)\left(\dfrac{a}{b}+1\right)\ge (a+1)^2 \\ (ab+1)\left(\dfrac{b}{a}+1\right)\ge (b+1)^2 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{(a+1)^2}\ge \dfrac{b}{a+b}.\dfrac{1}{ab+1} \\ \dfrac{1}{(b+1)^2}\ge \dfrac{a}{a+b}.\dfrac{1}{ab+1} \end{cases}$$

Suy ra $VT(*)\ge \dfrac{a+b}{(a+b)(ab+1)}=\dfrac{1}{ab+1}=VP(*)$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} ab=\dfrac{a}{b} \\ ab=\dfrac{b}{a} \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=1 \end{cases}\Rightarrow x=y^2$

Với $x=y^2$ thay trở lại ta có phương trình :

$\sqrt{y+\sqrt{y-1}}=32(y-1)^2\sqrt{2y-2}\Leftrightarrow y+\sqrt{y^2-1}=2(4y-4)^5$

Đặt : $4y-4=u\ (u\ge 0)$. Phương trình đã cho trở thành :

$$2u^5-\frac{u+4}{4}-\sqrt{\left(\frac{u+4}{4}\right)^2-1}=0\Leftrightarrow 8u^5=\sqrt{u^2+8u}+u+4\ (*)$$

+) Rõ ràng $u=0$ không là nghiệm của phương trình (*)

+) Với $u\ne 0$, phương trình (*) tương đương với : $8=\dfrac{4}{u^5}+\dfrac{1}{u^4}+\sqrt{\dfrac{1}{u^8}+\dfrac{8}{u^9}}$

Hàm số : $f(a)=\dfrac{4}{u^5}+\dfrac{1}{u^4}+\sqrt{\dfrac{1}{u^8}+\dfrac{8}{u^9}}$, nghịch biến trên $(0;+\infty)$ và $f(1)=0$

Suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất $u=1$.

Thay trở lại ta có nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\left(\frac{25}{16};\frac{5}{4}\right)$.

Bài toán 65. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}2(x+y)^3+4xy-3=0 & (1)\\ (x+y)^4-2x^2-4xy+2y^2+x-3y+1=0 & (2)\end{cases},(x,y\in\mathbb{R})$$

Lời giải.

Ta có $(x+y)^2\ge 4xy\Rightarrow 2(x+y)^3+(x+y)^2-3\ge 2(x+y)^3+4xy-3=0$

$\Rightarrow 2(x+y)^3+(x+y)^2-3\ge 0$ $(*)$ đặt

$t=x+y$ $(*)\Leftrightarrow 2t^3+t^2-3\ge 0\Leftrightarrow (t-1)(2t^2+3t+3)\ge 0\Leftrightarrow t\ge 1$

Viết lại (2) dưới dạng $(x+y)^4-2(x+y)^2+(x+y)+(2y-1)^2=0$

Xét hàm số $f(t)=t^4-2t^2+t$ $(\forall t\ge 1)$

Khi đó $f'(t)=4t^3-4t+1>0$ $(\forall t\ge 1)$

Hàm số luôn đồng biến $\forall t\ge 1\Rightarrow f(t)\ge f(1)=0$

Hay $(x+y)^4-2(x+y)^2+x+y\ge 0$ và $(2y-1)^2\ge 0$.

Suy ra $(x+y)^4-2(x+y)^2+(x+y)+(2y-1)^2\ge 0$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}x+y=1\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$

Kết hợp các điều kiện suy ra nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Bài toán 66.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2(1+y^2)+y^2(1+x^2)=4\sqrt{xy} & (1)\\ x-\sqrt{1+x^2}=x^2y\left(1-\sqrt{1+y^2}\right) & (2)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện $xy\ge 0$

Ta có $x-\sqrt{1+x^2}<0, 1-\sqrt{1+y^2}<0$ nên từ phương trình (2) ta có $x^2y>0$

Kết hợp điều kiện suy ra $y>0\Rightarrow x>0$

Khi đó phương trình (2) $\Leftrightarrow \frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=y-y\sqrt{1+y^2}$ $(*)$

Xét hàm số $f(t)=t-t\sqrt{1+t^2}$ với $t>0$

Ta có $f'(t)=\left(1-\sqrt{1+t^2}\right)-\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}<0$ do $1-\sqrt{1+t^2}<0$

Từ (*) $\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=f(y)\Leftrightarrow\frac{1}{x}=y\Leftrightarrow xy=1$

Thế vào phương trình (1) ta được $\begin{cases}xy=1\\x^2+y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=y=1 & (TM)\\x=y=-1 & (L)\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(1;1)$.

Bài toán 67.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\left(y^3-x^3\right)=6x^2+7x-y+3 & (1)\\4\sqrt{3-y}+2\sqrt{2(1+y)}=\sqrt{9x^2+16} & (2)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải.

Điều kiện $-1\le y\le 3$

Từ (1) ta có $2y^3+y=3(x+1)^3+(x+1)$

Xét hàm số: $f(t)=2t^3+t\Rightarrow f'(t)=6t^2+1>0\ \forall t$

Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên suy ra $f(y)=f(x+1)\Leftrightarrow y=x+1$

thế vào (2) ta được $4\sqrt{2-x}+2\sqrt{2(2-x)}=\sqrt{9x^2+16}$

Điều kiện $-2\le x\le 2$ bình phương hai vế ta có

$32+16\sqrt{8-2x^2}-9x^2-8x=0\Leftrightarrow 4\left(8-2x^2\right)+16\sqrt{8-2x^2}-x^2-8x=0$

Đặt $t=2\sqrt{8-2x^2}\quad(t\ge 0)$

Phương trình trở thành $t^2+8t-x^2-8x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=x\\t+x+8=0\quad VN\ (-2\le x\le 2)\end{array}\right.$

$2\sqrt{8-2x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x^2=\frac{32}{9}\end{cases}\Rightarrow x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{3+4\sqrt{2}}{3}\right)$.

Bài toán 68.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1 & (1)\\(1-x)(1+y)=2 & (2)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}|x|\le 1\\|y|\le 1\end{cases}$

Đặt $x=\cos\alpha;\ y=\cos\beta$ với $\alpha,\beta\in[0;\pi]$

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases}\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha=1\\(1-\cos\alpha)(1+\cos\beta)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=1\\\sin\alpha-\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}\\\sin\alpha-\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-1=0\quad(*)\end{cases}$$

Giải (*) đặt $t=\sin\alpha-\cos\alpha,\ |t|\le\sqrt{2}\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1-t^2}{2}$

Khi đó phương trình trở thành $t^2+2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\quad(TM)\\t=-3\ (L)\end{array}\right.$

Với $t=1\Leftrightarrow\sin\alpha-\cos\alpha=1\Leftrightarrow\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\beta=0$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(x;y)=(0;1)$.

Bài toán 69.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{x+y}=3\quad(1)\\\sqrt{y}-\dfrac{\sqrt{y}-3\sqrt{x}}{x+y}=0\quad(2)\end{cases}\ (x,y\in\mathbb{R})$

Phân tích. Bài toán trên có nhiều cách giải. Tuy nhiên ta cũng có thể giải bằng phương pháp lượng giác hóa như sau. Giả sử $(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2=a^2$

Đặt $\sqrt{x}=a.\sin\alpha;\sqrt{y}=a.\cos\alpha$

Với định hướng như trên ta có cách giải bài toán như sau.

Lới giải. Điều kiện $\begin{cases}x\ge0\\y\ge0\\x+y\ne0\end{cases}$

Đặt $\sqrt{x}=a.\sin\alpha;\sqrt{y}=a.\cos\alpha$ với $a\ne0$

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases}a.\sin\alpha+\dfrac{a.\sin\alpha+3a.\cos\alpha}{a^2}=3\\a.\cos\alpha-\dfrac{a.\cos\alpha-3a.\sin\alpha}{a^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a^2+1)\sin\alpha+3\cos\alpha=3a\\3\sin\alpha+(a^2-1)\cos\alpha=0\end{cases}$$

Đặt $X=\sin\alpha;\ Y=\cos\alpha$

Khi đó hệ phương trình trở thành $\begin{cases}(a^2+1)X+3Y=3a\\3X+(a^2-1)Y=0\end{cases}$

Ta có $D=a^4-10;\ D_x=3a(a^2-1);\ D_y=9a$

Với $D=0\Rightarrow D_y\ne0$ hệ phương trình vô nghiệm

Với $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm\sqrt[4]{10}$ khi đó nghiệm của hệ phương trình là

$X = \dfrac{3a\left(a^2-1\right)}{a^4-10}; Y = \dfrac{-9a}{a^4-10}$

Mặt khác $X^2+Y^2=1 \Leftrightarrow 9a^2\left(a^2-1\right)^2+81a^2=\left(a^4-10\right)^2$, đặt $t=a^2 \geq 0$

Khi đó ta có phương trình

$$9t\left(t-1\right)^2+81t=\left(t^2-10\right)^2 \Leftrightarrow t^4-9t^3-2t^2-90t+100=0$$

$$\Leftrightarrow t^2+\frac{100}{t^2}-9\left(t+\frac{10}{t}\right)-2=0 \Leftrightarrow \left(t+\frac{10}{t}\right)^2-9\left(t+\frac{10}{t}\right)-22=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+\dfrac{10}{t}=11 \\ t+\dfrac{10}{t}=-2\ (L) \end{array}\right. \Rightarrow t^2-11t+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=10 \end{array}\right.$$

Với $t=1 \Leftrightarrow a^2=1 \Leftrightarrow x+y=1$

thế vào hệ ban đầu ta có $\begin{cases} x+y=1 \\ \sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{x+y}=3 \\ \sqrt{y}-\dfrac{\sqrt{y}-3\sqrt{x}}{x+y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

Với $t=10 \Leftrightarrow a^2=10 \Leftrightarrow x+y=10$

thế vào hệ ban đầu ta có $\begin{cases} x+y=10 \\ \sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{x+y}=3\ (VN) \\ \sqrt{y}-\dfrac{\sqrt{y}-3\sqrt{x}}{x+y}=0 \end{cases}$

B. PHỤ LỤC

SỰ HỖ TRỢ CỦA MÁY TÍNH CASIO–FX 570ES

A. PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

1. Tìm nghiệm hữu tỷ của phương trình bậc cao

Thí dụ. Tìm nghiệm của phương trình: $6x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 9x + 2 = 0$

THỨ TỰ	THAO TÁC TRÊN MÁY TÍNH CASIO	KẾT QUẢ HIỂN THỊ	Ý NGHĨA
1.1	**6**	**6**	
1.2	**ALPHA**	X	Viết ẩn X trên CaSiO
1.3	**)**		
1.4	$x^{\square}$	$6X^4$	Viết phương trình đã cho trên máy tính CaSiO
1.5	**4**		
1.6	**(REPLAY) ▷**	$6X^4 -$	
1.7	**-**		
1.8	**1**	$6X^4 - 13X^3$	
1.9	**3**		
1.10	**ALPHA**		
1.11	**)**		
1.12	$x^{\square}$		
1.13	**3**		
1.14	**(REPLAY) ▷**	$6X^4 - 13X^3 + 15X^2$	
1.15	**+**		
1.16	**1**		
1.17	**5**		
1.18	**ALPHA**		
1.19	**)**		
1.20	x^2		
1.21	**9**	$6X^4 - 13X^3 + 15X^2 - 9X$	
1.22	**ALPHA**		
1.23	**)**		
1.24	**+**	$6X^4 - 13X^3 + 15X^2 - 9X + 2$	
1.25	**2**		
1.26	**ALPHA**	$6X^4 - 13X^3 + 15X^2 - 9X + 2 = 0$	
1.27	**CALC**		
1.28	**0**		
1.29	**SHIFT**	$6X^4 - 13X^3 + 15X^2 - \ldots$ **X** = 0.6666666667 L–R = **0**	Nghiệm của phương trình đã cho là
1.30	**CALC**		
1.31	**1**		
1.32	**=**		

			$x=\dfrac{2}{3}$

☼ **Bình luận.** *Từ việc biết trước nghiệm của phương trình đã cho, ta dễ dàng đưa phương trình đó về dạng tích:* $(3x-2)(2x^3-3x^2+3x-1)=0$.

2. Tìm nhân tử trong phương trình bậc cao có nghiệm vô tỷ.

<u>Phương án 01</u>: Sử dụng chức năng TABLE

Thí dụ 1. Tìm nhân tử của phương trình: $x^4-2x^3+x^2-1=0$

THỨ TỰ	NỘI DUNG	THAO TÁC TRÊN MÁY TÍNH CASIO	KẾT QUẢ HIỂN THỊ	Ý NGHĨA
2.a.1	**Viết phương trình** $x^4-2x^3+x^2-1=0$ **trên máy tính CaSiO**	Tương tự các bước từ: **1.1** đến **1.28**	$X^4-2X^3+X^2-1=0$	
2.a.2	Gán giá trị: **Solve for X là: 9** và chờ kết quả…	Thực hiện lại các bước từ **1.29** đến **1.32**	$X^4-2X^3+X^2-1=0$ **X = 1.618033989** L–R = **0**	Phương trình có nghiệm **1.618033989**
❍ **Chú ý:** Chúng ta không quy đổi kết quảđó có giá trị chính xác là bao nhiêu màdi tìm nhân tử của phương trình ban đầu dựa vào kết quảđó.				
2.a.3	Gán biến **X** cho biến **A**	**ALPHA**		
2.a.4		**)**		
2.a.4		**SHIFT**		
2.a.5		**RCL**		
2.a.6		**(–)**	$X\to A$ **1.618033989**	
2.a.7	Kiểm tra giá trị của hàm số $f(X)=A^2-AX$ trong khoảng $(-9;\,9)$ và cách nhau 1 đơn vị	**MODE SETUP**		Nhập hàm số
2.a.8		**7**	**f(X) =**	
2.a.9		**ALPHA**		
2.a.10		**(–)**		
2.a.11		x^2	$f(X)=A^2$	

2.a.12		–		
2.a.13		**ALPHA**		
2.a.14		**(–)**		
2.a.15		**ALPHA**		
2.a.16		**)**	$f(X) = A^2 - AX$	
2.a.17		**=**	**Start ?** **1**	Giá trị bắt đầu
2.a.18		–		Bắt đầu bằng: **–9**
2.a.19		**9**		
2.a.20		**=**	**End ?** **5**	Giá trị kết thúc
2.a.21		**9**		Kết thúc là: **9**
2.a.22		**=**	**Step ?** **1**	Cách nhau **1**đơn vị
2.a.23		**1**		
2.a.24	Kiểm tra các giá trị của F(X) thể hiện trên bảng. Chúng ta chỉ quan tâm đến giá trị F(X) nguyên	**=**	**X | F(X)** **...** **11 | 1 | 1** **...**	**Phương trình có nhân tử là** $x^2 - x - 1 = 0$
Kết quả:		**Phương trình có nhân tử là:** $\left(x^2 - x - 1\right)$		
Đề xuất: Phương pháp giải toán		**Đưa phương trình về dạng tích:** $\left(x^2 - x - 1\right).\left(x^2 - x + 1\right) = 0$		

✍ **Chú ý :** *Cách làm này tuy nhanh, nhưng chúng ta chỉ nên áp dụng cho các phương trình bậc bốn có hệ số* $a = 1$.

<u>Phương án 02</u>: Sử dụng chức năng RCL (gán biến)

Thí dụ 2*:*Tìm nhân tử của phương trình: $16x^4 + 112x^3 + 284x^2 + 212x - 39 = 0$

THỨ TỰ	**NỘI DUNG**	**THAO TÁC TRÊN MÁY TÍNH CASIO**	**KẾT QUẢ HIỂN THỊ**	**Ý NGHĨA**

3.b.1	**Viết phương trình** $16x^4+112x^3+284x^2$ $+212x-39=0$ **trên máy tính CaSiO**	Tương tự các bước từ: **1.1** đến **1.14**	$16X^4+112X^3+284X^2$ $+212X-39=0$	
3.b.2	Gán giá trị: **Solve for X là: 9** và chờ kết quả…	Thực hiện lại các bước từ **1.15** đến **1.18**	$16X^4+112X^3+284X^2$ $+212X-39=0$ **X = 0.1513878189** L–R = **0**	Phương trình có nghiệm **0.1513878189**
Tìm nghiệm của phương trình và gán biến **X** cho biến **A**				
3.b.3	Gán biến **X** cho biến **A**	**ALPHA**		
3.b.4		**)**		
3.b.5		**SHIFT**		
3.b.6		**RCL**		
3.b.7		**(–)**	$X \rightarrow A$ **0.1513878189**	
Tìm nghiệm khác của phương trình và gán biến **X** cho biến **B**				
3.b.8	**Viết phương trình** $16x^4+112x^3+284x^2$ $+212x-39=0$ **trên máy tính CaSiO**	Tương tự các bước từ: **1.1** đến **1.14**	$16X^4+112X^3+284X^2$ $+212X-39=0$	
3.b.9	Gán giá trị: **Solve for X là: – 9** và chờ kết quả…	Thực hiện lại các bước từ**1.15** đến **1.18**	$16X^4+112X^3+284X^2$ $+212X-39=0$ **X = –1.651387819** L–R = **0**	Phương trình có nghiệm **–1.651387819**
3.b.10	Gán biến **X** cho biến **B**	**ALPHA**		
3.b.11		**)**		
3.b.12		**SHIFT**		
3.b.13		**RCL**		
3.b.14		°,,,	$X \rightarrow B$ **–1.651387819**	

Nhận thấy biến A và biến B có giá trị khác nhau. Ta tiếp tục thực hiện như sau: (Chú ý: Nếu bước: **3.b.9** cho kết quả giống với bước **3.b.2** ta cần gán giá trị**Solve for X** khác)				
3.b.15		**ALPHA**		
3.b.16		**(–)**	**A**	
3.b.17		**+**		
3.b.18	Tìm tổng: **A+B**	**ALPHA**		
3.b.19		°,,,	**A+B**	
3.b.20		**=**	**A+B** $-\frac{3}{2}$	
3.b.21		**ALPHA**		
3.b.22		**(–)**		
3.b.23		X		
3.b.24		**ALPHA**		
3.b.25	Tìm tích: **A.B**	°,,,	**AxB**	
3.b.26		**=**	**AxB** $-\frac{1}{4}$	
Kết quả:		**Nhân tử của phương trình đã cho là:** $x^2-(A+B)x+A.B$, **tức là:** $\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\right)$		
Đề xuất: Phương pháp giải toán		**Đưa phương trình đã cho về dạng tích:** $(4x^2+6x-1).(4x^2+22x+39)=0$		

Chú ý : *Trong trường hợp* $A+B$ *và* $A.B$ *không hữu tỷ, ta tiếp tục tìm nghiệm và gán cho biến* C *sau đó thử với* $A+C$ *và* $B+C$ *để tìm xem tổng nào có kết quả hữu tỷ*

B. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

1. Tìm nghiệm hữu tỷ của phương trình vô tỷ

Thí dụ. Tìm nghiệm của phương trình: $x^2+\sqrt{3x-2}=2$

THỨ TỰ	THAO TÁC TRÊN MÁY TÍNH CASIO	KẾT QUẢ HIỂN THỊ	Ý NGHĨA
1.1	**ALPHA**	X	Viết ẩn X trên CaSiO
1.2	**)**		
1.3	x^2	X^2	
1.4	**+**	X^2+	
1.5	$\sqrt{\square}$	$X^2+\sqrt{\square}$	Viết $\sqrt{3X}$ trên CaSiO
1.6	**3**	$X^2+\sqrt{3}$	
1.7	**ALPHA**	$X^2+\sqrt{3X}$	
1.8	**)**		
1.9	**–**	$X^2+\sqrt{3X-}$	
1.10	**2**	$X^2+\sqrt{3X-2}$	
1.11	**(REPLAY)** ▹	$X^2+\sqrt{3X-2}$	Đưa dấu nhắc ra ngoài căn thức
1.12	**ALPHA**	$X^2+\sqrt{3X-2}\ =$	
1.13	**CALC**		
1.14	**2**	$X^2+\sqrt{3X-2}=2$	Viết phương trình: $x^2+\sqrt{3x-2}=2$ lên máy tính CasiO
1.15	**SHIFT**	Solve for X 0	Ở bước 1.17 có thể nhập một giá trị bất kỳ
1.16	**CALC**		
1.17	**9**		
1.18	**=**	$X^2+\sqrt{3X-2}=2$ X = 1 L–R = 0	Nghiệm của phương trình là $x=1$

☼ **Bình luận.** *Việc biết trước nghiệm của một phương trình vô tỷ là khá quan trọng trong quá trình đi tìm lời giải cho bài toán phương trình vô tỷđó. Máy tính CaSiO có thể giúp chúng ta trả lời câu hỏi nghiệm của phương trình bằng bao nhiêu một cách nhanh chóng.*

2. Kiểm tra số nghiệm của phương trình vô tỷ

Thí dụ 1 . Tìm tất cả các nghiệm của phương trình: $x^2+3=\sqrt{2x+1}$

THỨ TỰ	NỘI DUNG	THAO TÁC TRÊN MÁY TÍNH CASIO	KẾT QUẢ HIỂN THỊ	Ý NGHĨA
2.a.1	**Viết phương trình** $x^2+3=\sqrt{2x+1}$ **trên máy tính CaSiO**	Tương tự các bước từ: **1.1** đến **1.14**	$X^2+3=\sqrt{2X+1}$	
2.a.2	Gán giá trị: **Solve for X là: 9** và chờ kết quả…	Thực hiện lại các bước từ**1.15** đến **1.18**	**Can't Solve** [AC] : Cancel [◁][▷] : Goto	**Phương trình vô nghiệm.**
❍ **Chú ý:** Khi gặp trường hợp này để chắc chắn bạn nên thử gán **Solve for X** với một giá trị khác. (Giá trị này nên chọn giá trị nguyên lân cận $X=-\frac{1}{2}$, chọn là**0** chẳng hạn)				
2.a.3		◁ **(REPLAY)**	$X^2+3=\sqrt{2X+1}$	**Quay về bước hiển thị phương trình**
2.a.4	Gán giá trị: **Solve for X là: 0**	**SHIFT**	**Solve for X**	
2.a.5		**CALC**	**0**	
2.a.6		**0**		
2.a.7		**=**	**Can't Solve** [AC] : Cancel [◁][▷] : Goto	**Phương trình vô nghiệm.**
Dựđoán		**Phương trình đã cho vô nghiệm**		
Đề xuất: Phương pháp giải toán		**Hàm số, đánh giá**		

✪ **Thí dụ 2.** Tìm tất cả các nghiệm của phương trình: $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0$

THỨ TỰ	NỘI DUNG	THAO TÁC TRÊN MÁY TÍNH CASIO	KẾT QUẢ HIỂN THỊ	Ý NGHĨA
2.b.1	**Viết phương trình** $2\sqrt[3]{3x-2}$ $+3\sqrt{6-5x}-8=0$ **trên máy tính CaSiO**	Tương tự các bước từ: **1.1** đến **1.14**	$2\sqrt[3]{3X-2}+3\sqrt{6-5X}-8=0$	
2.b.2	Gán giá trị**:** **Solve for X là 9** và chờ kết quả…	Thực hiện lại các bước từ**1.15** đến **1.18**	$2\sqrt[3]{3X-2}+3\sqrt{6-5X}-8=0$ **X** = **–2** L–R = **0**	**Phương trình có nghiệm** $x=-2$ **.**
❍ **Chú ý:** Ta tiếp tục kiểm tra xem phương trình có nghiệm nào khác ngoài $x=-2$ bằng cách gán **Solve for X** bởi một giá trị khác lân cận $X=\frac{6}{5}$.				
2.b.3	Gán giá trị**:** **Solve for X là: 2**	**SHIFT**	**Solve for X**	
2.b.4		**CALC**	**–2**	
2.b.5		**2**		
2.b.6		**=**	$2\sqrt[3]{3X-2}+3\sqrt{6-5X}-8=0$ **X** = **–2** L–R = **0**	**Phương trình có nghiệm** $x=-2$ **.**
Dự đoán		**Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất** $x=-2$		
Đề xuất: Phương pháp giải toán		**Liên hợp, đánh giá, hàm số**		

✪ **Thí dụ 3.** Tìm tất cả các nghiệm của phương trình: $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+2)}=2\sqrt{x^2}$

THỨ TỰ	NỘI DUNG	THAO TÁC TRÊN MÁY TÍNH CASIO	KẾT QUẢ HIỂN THỊ	Ý NGHĨA
2.c.1	**Viết phương trình** $\sqrt{x(x-1)}$ $+\sqrt{x(x+2)}$ $=2\sqrt{x^2}$ **trên máy tính CaSiO**	Tương tự các bước từ: **1.1** đến **1.14**	$\sqrt{X(X-1)}+\sqrt{X(X+2)}=2\sqrt{X^2}$	
2.c.2	Gán giá trị: **Solve for X là 9** và chờ kết quả…	Thực hiện lại các bước từ **1.15** đến **1.18**	$\sqrt{X(X-1)}+\sqrt{X(X+2)}=2\sqrt{X^2}$ **X** = **0** L–R = **0**	**Phương trình có nghiệm** $x=0$.
❍ **Chú ý:** Ta tiếp tục kiểm tra xem phương trình có nghiệm nào khác ngoài $x=1$ bằng cách gán **Solve for X** bởi một giá trị khác lân cận $X=1$.				
2.c.3	Gán giá trị: **Solve for X là: 2**	**SHIFT**	**Solve for X** **0**	
2.c.4		**CALC**		
2.c.5		**2**		
2.c.6		**=**	$\sqrt{X(X-1)}+\sqrt{X(X+2)}=2\sqrt{X^2}$ **X** = **1.125** L–R = **0**	**Phương trình có nghiệm** $x=\frac{9}{8}$.
❍ **Chú ý:** Ta tiếp tục kiểm tra xem phương trình có nghiệm nào khác ngoài $x=0$ và $x=\frac{9}{8}$ bằng cách gán **Solve for X** bởi một giá trị khác lân cận $X=-2$.				
2.c.7	Gán giá trị: **Solve for X là: –3**	**SHIFT**	**Solve for X** **1.125**	
2.c.8		**CALC**		
		–		
2.c.9		**3**		
2.c.10		**=**	$\sqrt{X(X-1)}+\sqrt{X(X+2)}=2\sqrt{X^2}$ **X** = **0** L–R = **0**	**Phương trình có nghiệm** $x=0$.

Dự đoán	**Phương trình đã cho chỉ có 2 nghiệm** $x=0$ và $x=\frac{9}{8}$
Đề xuất: Phương pháp giải toán	**Nhân liên hợp đưa về dạng:** $(8x^2-9).f(x)=0$

❍ **Chú ý:** Chúng ta có thể sử dụng liên tục nút SHIFT CALC để thử các khoảng chứa nghiệm của phương trình. Việc thử càng nhiều giá trị **(Solve for X)** chúng ta sẽ nhận đoán được kết quả càng chính xác!

3. Tìm nhân tử của phương trình có nghiệm vô tỷ

Phương án 01: Sử dụng chức năng TABLE

✪ **Thí dụ 1.**Tìm nhân tử của phương trình: $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1$

THỨ TỰ	NỘI DUNG	THAO TÁC TRÊN MÁY TÍNH CASIO	KẾT QUẢ HIỂN THỊ	Ý NGHĨA
3.a.1	**Viết phương trình** $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1$ **trên máy tính CaSiO**	Tương tự các bước từ: **1.1** đến **1.14**	$X^2+\sqrt[3]{X^4-X^2}=2X+1$	
3.a.2	Gán giá trị: **Solve for X là: 9** và chờ kết quả…	Thực hiện lại các bước từ**1.15** đến **1.18**	$X^2+\sqrt[3]{X^4-X^2}=2X+1$ **X = 1.618033989** L–R = **0**	Phương trình có nghiệm **1.618033989**
❍ **Chú ý:** Chúng ta không quy đổi kết quảđó có giá trị chính xác là bao nhiêu màdi tìm nhân tử của phương trình ban đầu dựa vào kết quảđó.				
3.a.3	Gán biến **X** cho biến **A**	**ALPHA**		
3.a.4		**)**		
3.a.4		**SHIFT**		
3.a.5		**RCL**		
3.a.6		**(–)**	$X\to A$ **1.618033989**	
3.a.7	Kiểm tra giá trị của hàm số $f(X)=A^2-AX$ trong khoảng $(-9;\ 9)$ và cách nhau 1 đơn vị	**MODE** SET UP		Nhập hàm số
3.a.8		**7**	**f(X) =**	
3.a.9		**ALPHA**		

3.a.10		**(–)**		
3.a.11		x^2	$\mathrm{f}(\mathrm{X}) = \mathrm{A}^2$	
3.a.12		–		
3.a.13		**ALPHA**		
3.a.14		**(–)**		
3.a.15		**ALPHA**		
3.a.16		**)**	$\mathrm{f}(\mathrm{X}) = \mathrm{A}^2 - \mathrm{AX}$	
3.a.17		**=**	**Start ?** **1**	Giá trị bắt đầu
3.a.18		–		Bắt đầu bằng: **–9**
3.a.19		**9**		
3.a.20		**=**	**End ?** **5**	Giá trị kết thúc
3.a.21		**9**		Kết thúc là: **9**
3.a.22		**=**	**Step ?** **1**	Cách nhau **1**đơn vị
3.a.23		**1**		
3.a.24	Kiểm tra các giá trị của F(X) thể hiện trên bảng. Chúng ta chỉ quan tâm đến giá trị F(X) nguyên	**=**	**...** **11** **...** | **X** **1** | **F(X)** **1**	**Phương trình có nhân tử là** $x^2 - x - 1 = 0$
Kết quả:		**Phương trình có nhân tử là:** $(x^2 - x - 1)$		
Đề xuất: Phương pháp giải toán		**Nhân liên hợp đưa phương trình về dạng:** $(x^2 - x - 1).f(x) = 0$		

> ***Nhận xét:*** *Phương án 01 chỉđưa vềđược phương trình:*
> $x^2 - mx + n = 0$ *(m, n ∈ N), không đưa vềđược phương trình:* $x^2 - px + q = 0$ *(p, q ∈ Q).*

Nguyên nhân: Trên bảng TABLE ta cho **Step?** nhận giá trị là**1** nên máy tính chỉ kiểm tra các giá trị của biến **X** nguyên và cách nhau 1 đơn vị.

Phương án 02: Sử dụng chức năng RCL (gán biến)

✪ **Thí dụ 2:**Tìm nhân tử của phương trình: $4x^2+14x+11=4\sqrt{6x+10}$

THỨ TỰ	NỘI DUNG	THAO TÁC TRÊN MÁY TÍNH CASIO	KẾT QUẢ HIỂN THỊ	Ý NGHĨA
3.b.1	**Viết phương trình** $\left(4x^2+14x+11\right)^2=16\left(6x+10\right)$ **trên máy tính CaSiO**	Tương tự các bước từ: **1.1** đến **1.14**	$\left(4X^2+14X+11\right)^2=16\left(6X+10\right)$	
3.b.2	Gán giá trị: **Solve for X là: 9** và chờ kết quả…	Thực hiện lại các bước từ**1.15** đến **1.18**	$\left(4X^2+14X+11\right)^2=16\left(6X+10\right)$ **X = 0.1513878189** L–R = **0**	Phương trình có nghiệm **0.1513878189**
Tìm nghiệm của phương trình và gán biến **X** cho biến **A**				
3.b.3	Gán biến **X** cho biến **A**	**ALPHA**		
3.b.4		**)**		
3.b.5		**SHIFT**		
3.b.6		**RCL**		
3.b.7		**(–)**	$X\to A$ **0.1513878189**	
Tìm nghiệm khác của phương trình và gán biến **X** cho biến **B**				
3.b.8	**Viết phương trình** $\left(4x^2+14x+11\right)^2=16\left(6x+10\right)$ **trên máy tính CaSiO**	Tương tự các bước từ: **1.1** đến **1.14**	$\left(4X^2+14X+11\right)^2=16\left(6X+10\right)$	
3.b.9	Gán giá trị: **Solve for X là: – 9** và chờ kết quả…	Thực hiện lại các bước từ**1.15** đến **1.18**	$\left(4X^2+14X+11\right)^2=16\left(6X+10\right)$ **X = –1.651387819** L–R = **0**	Phương trình có nghiệm **–1.651387819**
3.b.10	Gán biến **X** cho biến	**ALPHA**		

3.b.11	**B**	**)**		
3.b.12		**SHIFT**		
3.b.13		**RCL**		
3.b.14		°,,,	$X \to B$ **–1.651387819**	
Nhận thấy biến A và biến B có giá trị khác nhau. Ta tiếp tục thực hiện như sau: (Chúý: Nếu bước: **3.b.9** cho kết quả giống với bước **3.b.2** ta cần gán giá trị**Solve for X** khác)				
3.b.15	Tìm tổng: **A+B**	**ALPHA**		
3.b.16		**(–)**	**A**	
3.b.17		**+**		
3.b.18		**ALPHA**		
3.b.19		°,,,	**A+B**	
3.b.20		**=**	**A+B** $-\frac{3}{2}$	
3.b.21	Tìm tích: **A.B**	**ALPHA**		
3.b.22		**(–)**		
3.b.23		X		
3.b.24		**ALPHA**		
3.b.25		°,,,	**AxB**	
3.b.26		**=**	**AxB** $-\frac{1}{4}$	
Kết quả:		**Nhân tử của phương trình đã cho là:** $x^2-(A+B)x+A.B$, **tức là:** $\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\right)$		
Đề xuất: Phương pháp giải toán		**Nhân liên hợp, đưa phương trình về dạng:** $\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\right).f(x)=0$		

✍ ***Nhận xét:*** *Điểm mạnh của* ***phương án 02*** *là tìm nhân tửđối với những phương trình không chứa căn thức (phương trình sau phép lũy thừa).*

Nguyên nhân: Một phương trình vô tỷ có thể có 2 nghiệm, nhưng một nghiệm không thỏa mãn điều kiện. Vì vậy máy tính đã tựđộng loại bỏ nó!

4. Kiểm tra miền giá trị của hàm số bằng chức năng TABLE

✪ **Thí dụ.** Kiểm tra miền giá trị của hàm số: $f(x) = 2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x-4}$ và nêu định hướng cách giải phương trình: $2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x-4} = 0$ **(VMO–1995)**

– **Bước 1**: *Kiểm tra được rằng phương trình có nghiệm duy nhất* $x = 3$ *(xem mục **B**)*

– **Bước 2**: *Kiểm tra miền giá trị của hàm số* $f(x) = 2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x-4}$ *trong khoảng (–9; 9) và cách nhau 1 đơn vị.*

THỨ TỰ	**NỘI DUNG**	**THAO TÁC TRÊN MÁY TÍNH CASIO**	**KẾT QUẢ HIỂN THỊ**	**Ý NGHĨA**
4.a.1	**Kiểm tra trên TABLE hàm số** $f(x) = 2x^2 - 11x$ $+21 - 3\sqrt[3]{4x-4}$ **trong khoảng (–9; 9) và cách nhau 1 đơn vị**	Tương tự các bước từ: **3.a.7** đến **3.a.22**	**X | F(X)** **1 | –9 | 292.25** **2 | –8 | 246.9** **… | … | …** **12 | 2 | 2.2377** **13 | 3 | 0** **14 | 4 | 2.1317** **…** **19 | 9 | 74.475**	Tại vị trí**13** ta thấy **X=3** và **F(X)=0,** nghĩa là phương trình có nghiệm $x = 3$ Các giá trị còn lại của **X** luôn cho giá trị**F(X)>0**
Bước 3: Kiểm tra giá trị của **X** trong khoảng **(2;4)** với độ rộng **0.1** (lân cận nghiệm $x = 3$)				
4.a.2	**Viết hàm số** $f(x) = 2x^2 - 11x$ $+21 - 3\sqrt[3]{4x-4}$ **trong TABLE**	Tương tự các bước từ: **3.a.7** đến **3.a.16**	$f(X) = 2X^2 - 11X$ $+21 - 3\sqrt[3]{4X-4}$	
4.a.3	Kiểm tra giá trị của **X** trong khoảng **(2;4)** với độ rộng **0.1**	=	**Start ?** **1**	
4.a.4		2		Bắt đầu với $x = 2$
4.a.5		=	**End ?** **5**	
4.a.6		4		Kết thúc với $x = 4$
4.a.7		=	**Step ?** **1**	

4.a.8		**0**		Kiểm tra các giá trị cách nhau một khoảng **0.1**
4.a.9		**•**		
4.a.10		**1**		
4.a.11	Kiểm tra dấu **F(X)** thể hiện trên bảng.	**=**	<table><tr><td></td><td>**X**</td><td>**F(X)**</td></tr><tr><td>**1**</td><td>**2**</td><td>**2.2377**</td></tr><tr><td>**2**</td><td>**2.1**</td><td>**1.804**</td></tr><tr><td>**...**</td><td>**...**</td><td>**...**</td></tr><tr><td>**10**</td><td>**2.9**</td><td>**0.0217**</td></tr><tr><td>**11**</td><td>**3**</td><td>**0**</td></tr><tr><td>**12**</td><td>**3.1**</td><td>**0.0216**</td></tr><tr><td>**...**</td><td></td><td></td></tr><tr><td>**21**</td><td>**4**</td><td>**2.1317**</td></tr></table>	Các giá trị của **X** khác **3** trong bảng luôn làm cho **F(X) > 0**
Nhận định:		$2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x-4} \ge 0, \forall x \in R$		
Đề xuất: Phương pháp giải toán		**Đánh giá, hàm số, liên hợp**		

✍ ***Nhận xét:*** *Trong quá trình giải toán, chúng ta sẽ gặp phải những phương trình cần sử dụng phương pháp đánh giáđể giải quyết trọn vẹn bài toán. Chức năng kiểm tra các giá trị của* ***F(X)*** *trên bảng* ***TABLE*** *sẽ giúp chúng ta có những nhận định chính xác hơn như: f(x) > 0 hay f(x) < 0, hàm số cóđơn điệu không? …*

❍ **Chú ý:**

Nếu các giá trị của **F(X)** tăng dần theo giá trị của **X** chứng tỏ hàm sốđồng biến, và giá trị**F(X)** giảm dần khi giá trị của **X** tăng dần chứng tỏ hàm số nghịch biến.

Không nên thử các giá trị ngoài tập xác định, bởi chúng ta sẽ không nhận được kết quả với những giá trịđó.